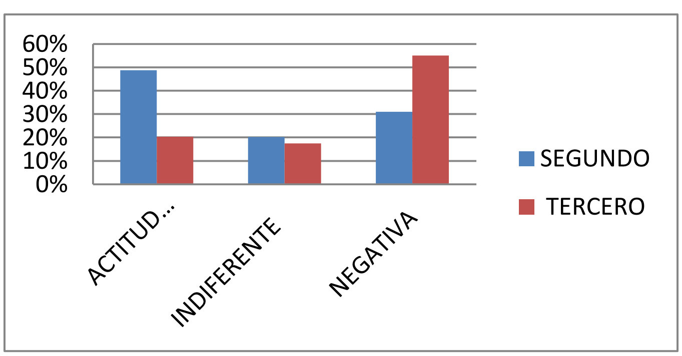
Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, Vol. 2, No. especial, 38-64
ISSN: 2215-8421

La crisis de la multiplicación: Una propuesta para la estructuración conceptual

Luz Lotero Botero
Alandra Investigación Educativa, Medellín, Colombia (a.loterobotero@alandradifuciencia.org)
Edgar Andrade Londoño
Alandra Investigación Educativa, Medellín, Colombia (edandrade@alandradifuciencia.org)
Luis Andrade Lotero
Indiana University, Bloomington, Estados Unidos (laandrad@indiana.edu)

EL PROBLEMA: APRENDER LA MULTIPLICACIÓN

Una reciente encuesta adelantada por los autores de este artículo con treinta grupos de grados primero a tercero en colegios de la comuna trece de Medellín (Lotero Botero y Andrade Londoño, 2011) reveló que el gusto por la materia matemáticas disminuye drásticamente en el grado tercero (figura 1). Una posible explicación puede deberse a la insistencia en la memorización de las tablas de multiplicar. Dado que usualmente los estudiantes ingresan de lleno al trabajo con la multiplicación al final del grado segundo y comienzos de tercero (García, 2003), la insistencia en la memorización de las tablas de multiplicar plantea una gran presión emocional, tanto a los niños aprendices como a sus padres, quienes tratan de apelar a toda suerte de prácticas mnemotécnicas. Algunos autores han llegado a proponer diferentes maniobras de operaciones con el número para dar con el resultado de las tablas (Kaplan, Yamamoto y Ginsburg, 2007).



Fuente: Lotero Botero y Andrade Londoño, 2011.

Figura 1. Actitud positiva hacia las matemáticas disminuye entre el grado segundo y el tercero

Esta perentoria demanda de memorización de las tablas de multiplicar, una de las tradiciones más generalizadas y persistentes de la matemática escolar (Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007), solo tiene sentido cuando el propósito del aprendizaje de la multiplicación es resolver rápida y eficientemente expresiones como las siguientes:

$$\begin{array}{r} 453 \\ \times 6 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1837 \\ \times 23 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24748 \\ \times 713 \\ \hline \end{array}$$

Desde este enfoque de enseñanza, necesariamente se requerirá el dominio memorístico de las tablas de multiplicar. Si el novel estudiante no ha memorizado dichas tablas, encontrará muchos retrasos en el dominio de esta forma de operatividad. A este escollo habría que agregar las dificultades con el sistema posicional decimal con números de varios dígitos. Por ejemplo, usualmente se presentan problemas con el valor posicional y llevar números de una columna a la otra (Lampert, 1986).

Investigadores del aprendizaje infantil de las matemáticas han llamado la atención acerca de las dificultades que plantea la multiplicación cuando se atiende a la manera como los niños, entre ocho y nueve años de edad, pueden concebir esta expresión matemática y su operatividad en la solución de problemas (Ferreiro, 2003; Lampert, 1986; Nunes y Bryant, 2005; Wood, 2000).

La circunstancia de que la multiplicación se plantee a los niños desde la enseñanza de su operatividad simbólica genera, en la planeación curricular, una apariencia de logro alcanzable en un corto periodo, puesto que, en el mejor de los casos, un alto porcentaje de los niños acaba por aprenderse las tablas de multiplicar. No obstante, enfrentados a situaciones problema en las que no son directamente visibles las dos cantidades que se van a multiplicar, estos chicos evidencian la ausencia de significado de los tres términos involucrados en dicho trámite. Nos referimos aquí a las tres cantidades que resultan al considerar la multiplicación como agregado de varios grupos de cantidades iguales: a) la cantidad que contiene cada grupo, b) el número de veces que se itera o "toma" este grupo y c) la cantidad total resultante.

Típicamente, al resolver problemas de la manera antes anotada, a los niños les cuesta dificultad expresar claramente las unidades del resultado, aun cuando hayan encontrado sin dificultad el número multiplicado (p. ej.: "cuatro por seis igual veinticuatro", a la manera de las tablas). Sobre el significado de estos tres términos y su importancia en la construcción conceptual volveremos más adelante.

Parece ser una tendencia que los niños efectúen de manera inmediata una operación de multiplicación cuando el enunciado textual incluye dos números y una pregunta con la expresión: "¿Cuántos…?". Además, esta tendencia parece estar reforzada por la circunstancia de que los problemas de este tipo se proponen en un momento en el que el escolar ha aprendido de memoria las tablas de multiplicar (Schoenfeld, 2000 y 2007). Este proceder irreflexivo también ha sido observado en diversas evaluaciones a los niños que ingresaron al Centro Tutorial (Lotero Botero, Andrade Londoño y Andrade Lotero, 2010) y, más recientemente, en una evaluación al ya mencionado grupo de niños de la comuna trece de Medellín que acababan de ingresar a grado tercero (Lotero Botero y Andrade Londoño, 2011).

Cuando los números que componen las tablas de multiplicar no tienen sentido en el contexto de situaciones de vida, sino que tales números pueden representar cualquier cosa, no es de extrañar que para el niño revista gran dificultad un enunciado de problema que no conduzca de manera inmediata a proponer una operación de multiplicación.

ESTUDIO DE LAS DEMANDAS COGNITIVAS PARA CONCEPTUALIZAR LA MULTIPLICACIÓN

Por varias razones, el ingreso de los niños al pensamiento de la multiplicación plantea algo así como una inflexión en la línea de razonamiento en la construcción del concepto de número (Nunes y Bryant, 2005). En las operaciones de suma o resta, el niño procede en forma lineal, coordinando en un mismo conjunto de cosas el aumento o disminución de la cantidad (por ejemplo, 4 + 2 manzanas). En primera instancia, podría asumirse que la multiplicación consiste en esta misma operación, esto es, coordinar en un mismo conjunto el aumento o disminución de la cantidad. En este caso, simplemente se trataría de adicionar varias cantidades iguales de un mismo conjunto (3 + 3 + 3 + 3 manzanas). Esta situación permanecería en el mismo nivel en el pensamiento del niño si fuera asumida siempre como ese agregado de 3 + 3 + 3 + 3. Pero ¡he aquí la transición!: hay cuatro veces tres; tres por cuatro o 3 × 4. Pensado así, la situación pasa a otro nivel. Se pasa de pensar una suma en la que los sumandos son cantidades iguales, a pensar y coordinar simultáneamente dos cantidades. Pero, ¿qué es ese 4?, ¿qué es ese "veces", "por" o "x"?

Aunque puede parecer fácil desde nuestra perspectiva de adulto, para un niño se trata de una gran exigencia, si es que se pretende que para él tenga significado este nuevo planteamiento, esto es, una expresión matemática de multiplicación. ¿Puede el niño conferirle significado a un símbolo numérico, en este caso 4, que resulta de la actividad de agrupar cantidades? ¿El niño es consciente de que ahora se trata de contar grupos y no unidades? O, por el contrario, ¿está simplemente recitando, por ejemplo, 3 por 4 igual 12, sin conciencia de lo que significan los números 3 y 4, en el contexto de una situación de multiplicación? En efecto, esto último es lo que parece suceder en el caso de muchos niños.

Sin embargo, en cualquier momento, poco o mucho después, el niño revelará dificultades al enfrentarse a solucionar problemas más allá de una aplicación directa de la operación entre los dos números que aparecen en el enunciado, y, consiguientemente, mostrará dificultades para pensar situaciones matemáticas más complejas que implican estructuras multiplicativas, con todas las consecuencias que esto conlleva. Se hace referencia aquí principalmente a conceptos matemáticos como cociente, razón, proporción y función (Hall y Rubin, 1998; Nunes y Bryant, 2005).

De cierta manera, a lo largo de nuestro trabajo como tutores, vivimos la ilusión de la "explicación" y su aparente logro, y fuimos confrontados por la riqueza y diversidad de significados matemáticos que encierra la formalización sucinta: $a \times b = c$. En nuestro estudio cuidadoso que, de aquí en adelante expondremos, acerca del significado de los tres términos que entran en juego en este proceso matemático ($a \times b = c$), en apariencia simple, encontramos la necesidad de un prolongado camino de experimentaciones por parte del niño. A lo largo de estas, el sujeto infantil podrá ir, paso a paso, cimentando el significado en el contexto de muchas situaciones que deben imbricarse en un todo sistemático de pensamiento constructivo. En este artículo expondremos cuatro de estas situaciones.

METODOLOGÍA DEL CASO-ESTUDIO

A comienzos del 2006, en el Centro Tutorial, el grupo de aprendizaje de Matemáticas Básicas estaba integrado por dos niñas y cinco niños con edades entre los siete y los doce años. Un diagnóstico previo había evidenciado que, a pesar de estas diferencias de edad y que algunos de ellos ya contaban con hasta cinco o seis años de escolaridad anterior, se hacía necesario orientar la tarea tutorial desde una apropiada concepción del número natural. El propósito del Centro Tutorial se orientaba a brindar a los niños contextos de experiencias prácticas que propiciaran la construcción de significado a aquellos conocimientos académicos, hoy estandarizados y presentados a partir de definiciones, fórmulas, algoritmos y demás formalizaciones simbólicas.

Aunque algunos de los niños del grupo tutoriado conocían la caligrafía de los números en series extensas y otros sabían de memoria las tablas de multiplicación, todos habían fracasado en aspectos básicos como efectuar sumas y restas con cifras de varios dígitos. Además, mostraban desagrado por los números y las operaciones aritméticas, al punto que uno de ellos exclamó de entrada: "odio el libro de matemáticas". El menor del grupo, un niño de siete años que llevaba dos años previos de escolaridad, a quien presentaremos como Ray, no sujetaba bien el lápiz, no escribía el mínimo trazo y se mostraba indiferente a cualquier forma de comunicación.

Se hará referencia de manera especial a Ray, porque desde un inicio tan desalentador este niño ofrecerá una grata sorpresa al final de esta experiencia. A diferencia de los otros chicos, Ray tuvo la ventaja de comenzar a pensar el número como una cantidad antes que como un símbolo, algo que quizá tuvo mucho que ver con sus rápidos progresos en el desarrollo de su pensamiento matemático. Con este escenario, para este artículo se escogió como metodología el estudio de caso explicativo, cuyo alcance de generalización obedece a la inducción analítica más que a la generalización estadística (Bonache Pérez, 1999; Stake, 2007).

En el Centro Tutorial se adoptó el principio de que el aprendizaje infantil se construye a partir de experiencias propias de los niños y no basándose en explicaciones discursivas de adultos (Piaget, 1985). Además, en el transcurso de estas experiencias prácticas se realizó un intercambio comunicativo con el grupo de niños, mediante el cual fue posible identificar las dificultades y apoyar el aprendizaje con significado (Lotero Botero et ál., 2010). Como se evidenciará, las situaciones de aprendizaje propuestas por los tutores ayudarían a superar esas dificultades.

Las experiencias prácticas en el Centro Tutorial se desarrollaron empleando materiales tangibles. La utilización de esta clase de recursos para el aprendizaje matemático de los niños ha sido evaluada en diversos proyectos de investigación (Clements, 1999; Kaplan et çal., 2007; Manches y O'Malley, 2011; Uttal, Scudder y DeLoache, 1997). En el caso de la propuesta que aquí se expone, los tangibles se asumen como mediadores para formar cantidades concretas, transformarlas activamente, experimentar y modelar (figura 2). Es indudable que la versatilidad o la limitación de estos materiales no se hallan en sí mismos, sino en los propósitos de enseñanza-aprendizaje que se plantean para su aprovechamiento y en el andamiaje necesario para aprender a relacionarlos con los conceptos matemáticos que representan (Baquero, 2008)

Figura 2. Niños del grupo experimentando con materiales tangibles

Así es como en el Centro Tutorial cada actividad con materiales tangibles fue orientada por un propósito de enseñanza-aprendizaje. No obstante, tal propósito no fue necesariamente el de iniciar con una conceptualización ya completa y expresada como una fórmula o, menos aún, la ilustración o ejemplo de una definición. Más bien, el propósito se orientó a establecer *relaciones entre cantidades* de objetos a partir de una determinada manera de organizar espacialmente las cantidades concretas.

El propósito se presenta en una guía por medio de textos cortos y una gráfica de determinada organización de las cantidades. Aunque pudiera parecer obvio, es necesario resaltar aquí que la relación matemática no surge únicamente de visualizar la disposición o la organización espacial de los objetos, sino que esta debe ser una construcción en el pensamiento del niño. Entonces, el niño expresa *esta relación* en la guía por medio de pictogramas, palabras y símbolos. Los símbolos son la última y más elaborada expresión de los conceptos. Los materiales, por el contrario, están en el origen, en la concreción (Bruner, 1965; Hawkins y Blakeslee, 2005; Piaget, 1983 y 1985; Piaget y García, 1982). Pero la relación la establece el pensamiento del niño y la expresa por escrito en la guía correspondiente. El niño es quien dispone y organiza sus materiales conforme a las pautas dadas en la guía, y es quien establece las relaciones matemáticas.

Este modelo de intervención pedagógica, con retroalimentación tutorial (Wood, 2000; David Wood y Wood, 1996), se ha mostrado sumamente favorable al trabajo autónomo del niño, al tiempo que permite identificar dificultades de comprensión (Lotero Botero et ál., 2010; Lotero Botero, Andrade Londoño y Andrade Lotero, 2011). Más adelante se hará referencia a lo que aquí se entiende por dificultades de comprensión en el caso de la multiplicación.

A continuación, se presentan cuatro requerimientos para la construcción conceptual de la multiplicación, surgidos del análisis de las dificultades reveladas por los niños. Luego se expondrán cuatro situaciones de aprendizaje propuestas para cada uno de los requerimientos conceptuales definidos y la manera como fueron validadas en este estudio de caso. Finalmente, se discutirán las conclusiones referentes a esta propuesta

CONSTRUCCIÓN CONCEPTUAL DE LA MULTIPLICACIÓN

En este estudio se han identificado cuatro procesos de significación, que se llamarán aquí requerimientos para la construcción conceptual. Además, se entenderá la comprensión como una superación de dificultades para integrar, como un todo con significado, varios elementos o experiencias que en un principio están aisladas. Cada elemento o experiencia deberá, a su vez, tener significado para el niño. Cada elemento o experiencia particular con significado se constituye en un requerimiento que debe integrarse y coordinarse con los otros tres en una totalidad de significación (Lotero Botero et ál., 2011). Se trata de una cadena de implicaciones de significados que debe pensarse como un sistema más comprehensivo, más rico, como una herramienta para futuras comprensiones. Puede asumirse este proceso de significaciones implicadas como una construcción conceptual, un proceso continuado de equilibraciones o logros (Piaget y García, 1997).

Cada requerimiento se refiere a demandas de orden lógico-matemático implicadas en la comprensión de una expresión de multiplicación, y que son necesarias para construir significado en el pensamiento infantil. En otras palabras, se trata de que el niño logre pensar una expresión del tipo $a \times b = c$, a la manera de una síntesis o cuadro de significación que implica los cuatro requerimientos como un todo sistémico. Adicionalmente, para el tutor será un indicador de que el niño ha construido significado o no, el observar el desempeño de este en problemas de vida que impliquen la multiplicación.

PRIMER REQUERIMIENTO: LOS AGRUPAMIENTOS

En la multiplicación, a diferencia de las operaciones de suma y resta, el niño debe coordinar tres cantidades en una sola situación, algo obvio para el adulto, pero como ya se ha anotado, es un concepto nuevo para él. Además, cada una de esas cantidades encierra un significado matemático diferente. Según nuestra propuesta, los tres significados deben conjugarse en un solo cuadro de significado, como una sola situación. Por ejemplo, $3 \times 4 = 12$. En esta expresión hay implicados grupos de cantidades iguales. En una modelación con objetos concretos "se verán" los grupos, lo que aparentemente parecería obvio de pensar por parte del niño. Sin embargo, para la conciencia del niño no es ni obvio ni claro. Lo que en este artículo se quiere sugerir es que, para que sea explícito en la conciencia del niño, como una necesidad, como parte fundamental de una situación de multiplicación, el agrupamiento de cantidades tendrá que vivirse, experimentarse varias veces y de diferentes maneras.

Esta acción de agrupar para componer y descomponer cantidades puede considerarse la base para la conceptualización de la multiplicación. En este análisis se considera el primer requerimiento para la conceptualización. Y a este requerimiento le corresponderá una situación de aprendizaje específica.

SEGUNDO REQUERIMIENTO: LOS ENCAJAMIENTOS

Luego de los agrupamientos, el niño experimentará con lo que hemos denominado encajamientos. Para un niño novato, de ocho años, por ejemplo, puede ser muy complicada la pregunta: ¿cuántas veces cabe (o está) el 5 en 30? Y preguntas de este tipo pueden seguir perturbándolo durante un gran trecho de su recorrido escolar. Esta idea de cuántas veces cabe será lo que se pretende solucionar con el segundo tipo de actividades de aprendizaje, expuestas en la siguiente sección.

Ahora bien, es frecuente que en el currículo de matemáticas el tema múltiplos-submúltiplos se exponga luego del tema de la operación multiplicación. Eso puede obedecer a que en la matemática escolar es convencional que se parta de las definiciones de los libros de texto, y la definición de múltiplo-submúltiplo lleva implicada la operación de multiplicación.

Según la experiencia de los autores, luego de enseñar durante varios años al grupo de estudiantes del Centro Tutorial, es raro el caso en el que el niño es capaz de aplicar la operación de multiplicación a un grupo de cosas si solo ha aprendido la multiplicación a partir de las tablas de multiplicar —es decir, solo con símbolos numéricos—. Por el contrario, la hipótesis es que si procede a partir del hecho de aprender relacionando cantidades con grupos de cosas, es posible que pueda equilibrar el invariante *parte-todo*. De esta manera, resulta válido pensar que si las experiencias de aprendizaje a que se ve expuesto el niño no le permiten la oportunidad de relacionar cantidades de cosas agrupadas ordenadamente en una cantidad total o *todo*, muy probablemente encontrará dificultades en su pensamiento de la multiplicación.

Alguien podría preguntar, o afirmar, que aun sin el primer requerimiento, o sea, la actividad de agrupamientos, el niño podría pensar las relaciones parte-todo (múltiplos-submúltiplos). Nosotros responderíamos que sí. La diferencia es operar con plena conciencia, con un significado más rico y complejo del sentido matemático de lo que se está haciendo, del por qué se procede así.

TERCER REQUERIMIENTO: EL SIGNIFICADO DE "VECES"

En general, en la enseñanza de la matemática escolar basada en operaciones de cálculo que se consignan a partir de símbolos no queda lugar para experimentar las operaciones de la aritmética como un hacer, como una acción orientada a transformar cantidades. La perspectiva de la operación como un hacer que un sujeto realiza favorece una manera de proceder que está en la base del quehacer matemático. Históricamente, antes que un saber disciplinar de las matemáticas, fueron las acciones humanas de organizar cantidades y transformarlas (Bell, 2004). La necesidad de proceder paso a paso en toda acción física encaminada a un propósito se organiza en el pensamiento de manera secuencial (Hawkins y Blakeslee, 2005).

Podría asumirse, igualmente, que actuar organizadamente para transformar cantidades en relaciones matemáticas cada vez más complejas se halla en la base del método de razonamiento deductivo que le es propio a la matemática (Bell, 2004). Los autores de este estudio también asumen que este experimentar fáctico-histórico está también en la fundamentación cognitiva del desarrollo del pensamiento matemático infantil (Piaget y García, 1982). De ahí que se haya considerado que el procedimiento de las cuatro operaciones aritméticas con el número natural sea antes vivenciado como un hacer, orientado a un objetivo, casi siempre de cuantificación.

Cuando el niño ingresa a pensar la multiplicación, luego de que ha experimentado y hecho consciente el agrupamiento de cantidades y la relación *parte-todo* (múltiplo-submúltiplos), será importante que experimente y piense ahora esta misma relación como una sucesión o progresión de veces en que se agrega secuencialmente cada uno de los grupos *parte*. La perspectiva de asumir la operación de la multiplicación como una acción y experimentación de agregar consecutivamente cantidades iguales de grupos de cosas, a la manera de una progresión o de una cantidad que crece en la medida que se van agregando las cantidades iguales, favorece en el niño la construcción de significado del término *veces* como una sucesión progresiva.

CUARTO REQUERIMIENTO: LOS DOS FACTORES COMO RELACIÓN DE CORRESPONDENCIA

En una operación de multiplicación, por ejemplo, ¿por qué sumar grupos de 3 manzanas 5 veces? ¿De dónde surge la decisión de que sea 5 y no 8? Es importante que el niño logre comprender que la realización de una operación de multiplicación se configura en un contexto de vida en el que hay dos cantidades: en este caso, la decisión de agrupar de a 3 manzanas, y otra cantidad que determina cuántas veces tomamos grupos de 3 manzanas, por ejemplo, 5 niños. Este punto es importante, puesto que el 5 no es una cantidad de cosas que está en la cantidad transformada, o sea, multiplicada. En otras palabras, la cantidad transformada son manzanas y ese 5 será una cantidad de *referencia*, o sea, externa a la cantidad que se va a transformar. Esto, que parece complicado en palabras, bien puede expresarse gráficamente por medio de conjuntos (figura 3).

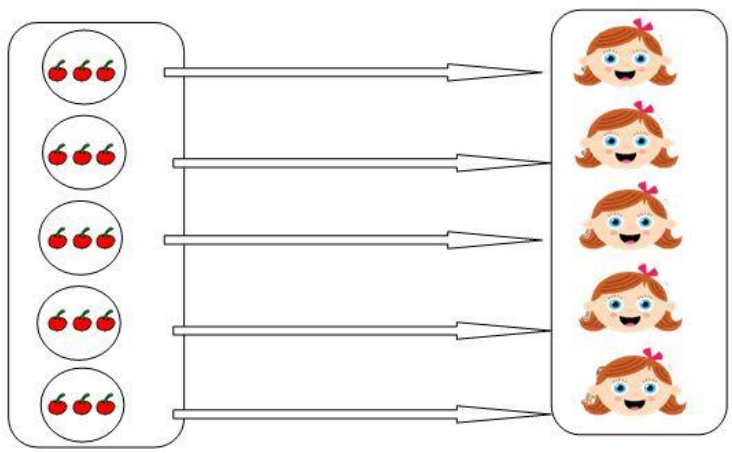


Figura 3. Representación gráfica de la correspondencia entre grupos y unidades de referencia

El conjunto de los 5 niños es el conjunto de referencia para incrementar la cantidad de 3 manzanas 5 veces, una vez por cada niño. Hacer consciente a los estudiantes que la operación o transformación de multiplicación está determinada por una cantidad de referencia, lo ayudará más adelante a plantear soluciones a problemas que involucren esta operación o, por lo menos, a hacer consciente el hecho de proceder multiplicando. Para este propósito, esta toma de conciencia resulta indispensable, antes que una aplicación automática de dos números sin ningún contexto diferente al de unas tablas de multiplicar.

Esta manera de pensar el incremento progresivo de una cantidad en correspondencia o dependencia de otra cantidad de referencia, se halla en la base de la construcción de un concepto más complejo, como el de función (Nunes y Bryant, 2005; Wood, 2000). De esta forma, los dos factores de la multiplicación se ubican en una perspectiva de significado que se orienta hacia el desarrollo del pensamiento matemático. En conclusión, aprender a multiplicar es mucho más que aprender de memoria las tablas de multiplicar.

DISEÑO DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE PARA ALCANZAR LOS REQUERIMIENTOS CONCEPTUALES

A continuación se expondrán cuatro ejemplos correspondientes a cada una de las situaciones de aprendizaje que responden a los cuatro requerimientos de construcción conceptual. Para cada situación, los autores han propuesto, diseñado y validado en este caso estudio una variedad de actividades a la manera de juego que, de diversas formas, se orientan en el sentido o propósito de cada requerimiento de construcción conceptual.

PRIMERA SITUACIÓN: HACER AGRUPAMIENTOS

Esta situación de aprendizaje se ilustra aquí por medio de un juego representativo del tipo de experiencias planteadas a los niños del caso-estudio. Se trata del juego del tren, para el que se emplean cubos. Aquí, el niño simplemente agrupará. El niño sólo experimentará cantidades agrupadas, esto es, unidades reunidas en un grupo. Estos grupos serán vagones. Con esos grupos vagones, formará por agregados otro grupo mayor que contendrá a los agregados, o sea, el tren completo.

En esta actividad de juego resultan tres cantidades, que se expresarán matemáticamente por medio de tres símbolos numéricos. En algunos casos, estos símbolos pueden ser iguales. Así, por ejemplo, tres cubos forman un vagón y tres vagones forman un tren, entonces ¿cuántos vagones en total tiene el tren? (figura 4

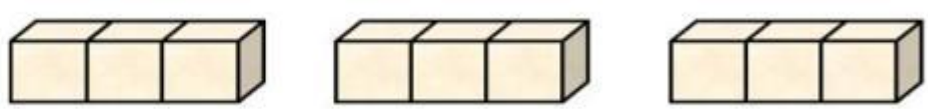


Figura 4. Juego del tren con cubos

Aquí el mismo símbolo numérico 3 expresa el conteo de cosas que son diferentes como objetos y con significado matemático también diferente: por una parte, contar cubos o unidades básicas: 1, 2, 3 cubos y, por otra parte, ¡contar grupos!: 1, 2, 3 grupos o vagones. Pero, además, ¡resultan tres unos!, o sea, tres cosas diferentes que en matemáticas se expresan simbólicamente como un uno (1): un (1) cubo, un (1) vagón, y un (1) tren.

Como si lo anterior fuera poca exigencia para el pensamiento del niño, se configura aquí una situación de inclusiones: cubos dentro de vagones y vagones dentro del tren. El tren tiene vagones, pero también tiene cubos. Los cubos y los vagones están dentro del tren, o, viceversa, el tren contiene vagones, pero también contiene cubos.

Es el proceso matemático de agrupar y operar con grupos. No obstante, aunque niños que ya estuvieran familiarizados con la multiplicación podrían reconocer aquí en este juego tal proceso, nosotros lo recomendamos solo como experiencia de significado básico, como parte de la acción inicial de componer y descomponer el número. Aún no debería nombrarse la multiplicación como consecuencia del juego. El niño ya tiene bastante tratando de equilibrar la coordinación de las tres cantidades que resultan de su acción de agrupar.

SEGUNDA SITUACIÓN: HACER ENCAJAMIENTOS

Se trata de la actividad o experiencia de encajar cantidades de grupos en otro grupo o cantidad mayor. A diferencia de la experiencia anterior de simple agrupamiento, para esta experiencia se explicita la cantidad mayor como algo delimitado, en analogía con un cajón. El cajón está compuesto por grupos de cubos encajados. Para la composición del cajón, en la guía se parte de preguntas diferentes que expresan la misma situación matemática (figura 5).

Así, por ejemplo, ¿con cuántos grupos de *m* cubos formamos *un grupo total* de *n* cubos?; ¿cuántos grupos de *m* cubos caben en *un grupo total* de *n* cubos?; ¿con cuántos grupos de *m* cubos puede hacerse un grupo total de *n* cubos?; ¿cuántos grupos de *m* cubos caben exactamente *en otro grupo total* de *n* cubos? En algunos casos, el niño es enfrentado a situaciones en las que no cabe exactamente una cantidad de grupos, esto es, sobra o hay residuo. Puesto que siempre se trata de cubos, aunque las cantidades representan cosas distintas, en la construcción de las guías se hace explícita esa diferencia, enmarcando la cantidad total con un hexágono y la cantidad que conforma el grupo, con un círculo. Además, las filas que se construyen con los cubos en la guía representan grupos (figura 5). Por ejemplo, tanto la situación que el niño construye con los materiales tangibles, los cubos, como la representación gráfica de tal situación se construyen un andamiaje en el pensamiento del niño. En la figura 5 se pregunta, ¿en un grupo de 15 cubos caben exactamente grupos de 6 cubos? Nótese que el número 15 está enmarcado con un hexágono y el número 6 con un círculo. En esta situación, el niño organiza dos grupos de seis cubos y un grupo de tres cubos. Adicionalmente, para apoyar el desarrollo del invariante parte-todo, se pregunta la situación inversa: ¿cuántos grupos de 6 cubos caben en un grupo de 15 cubos? Finalmente, se le pide al niño que anote el resultado numérico para completar el significado de la frase “Resultaron ___ grupos de cubos, y no encaja exactamente un grupo de ___ cubos”. Al lado, se presenta un segundo ejercicio, nótese que ahora el encajamiento de cubos es exacto, dado que se pide que se reparta la cantidad total de 15 cubos en grupos de a 5 cubos. El niño vivencia este encajamiento exacto en su actividad con los cubos y en la representación gráfica, y no en el vacío de una operación de símbolos únicamente.

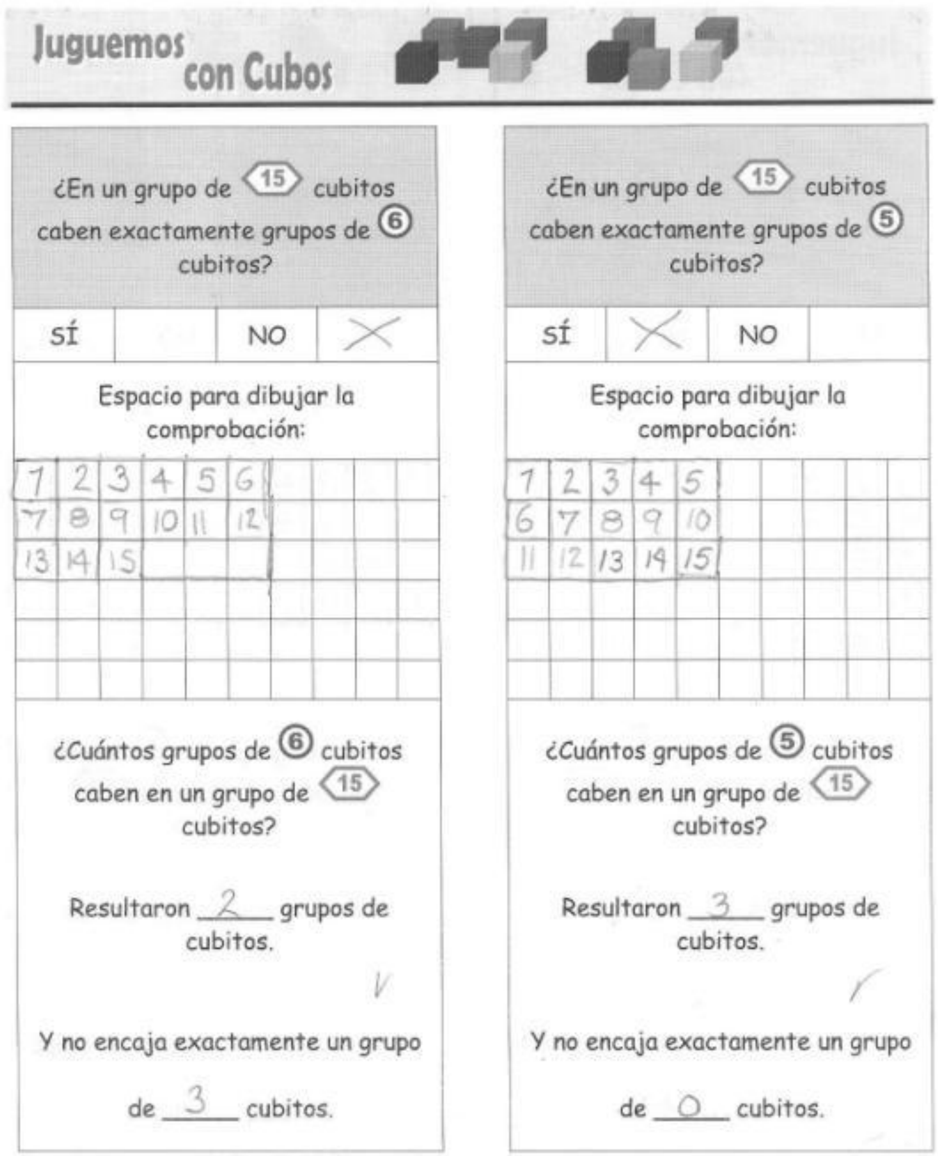


Figura 5. Ejemplo de guía del juego de los que encajan y los que no, con cubos representados como cuadros de una cuadrícula

El significado que se espera haya construido a partir de la primera situación, serviría al niño para tematizar el agrupamiento, lo cual es la base para pensar en un nuevo nivel. Se espera que el niño establezca una *relación* que integre en un *solo acto de pensamiento* las tres cantidades resultantes de la cantidad agrupada. En las acciones del requerimiento anterior se pone en contacto al niño con la existencia de tres cantidades que resultan de esta manera de organizar una cantidad en varios grupos iguales. A partir de este significado, también podría pensar cada una de estas cantidades como una relación parte-todo. En esta segunda situación, la idea es que ahora piense sumar grupos iguales de manera más amplia, con un significado más amplio, como una relación parte-todo, la cual incluye la relación anterior de agrupamientos.

TERCERA SITUACIÓN: FAVORECER EL SIGNIFICADO MATEMÁTICO DEL TÉRMINO “VECES”

La lectura de la tabla de multiplicar en español conduce al niño a leer el signo “×” como “por”[1]. Esta última palabra, sin embargo, no se refiere directamente a la relación matemática que con ella se expresa. Cuando a los niños acostumbrados a la recitación de las tablas de multiplicar se les plantea por primera vez una operación de multiplicación con el término “veces”, ellos se muestran desconcertados, como lo han observado los autores en experiencias con niños. Consecuentemente con esta manifestación de extrañeza, es muy probable que el significado de lo que es hacer una multiplicación sea también confuso para ellos.

Ahora se trata de pensar una cantidad que es diferente a la cantidad de cosas que se multiplica. Se trata de la cantidad de veces, por lo que a partir de aquí ya no será extraño para el niño la pregunta ¿cuántas veces?, ¿cuántas veces se multiplica?, o ¿cuántas veces cabe?

Nuestra propuesta se orienta a experimentar con las tablas de multiplicar del uno al diez, pensándolas en su construcción. De manera inversa, se descompondrá cada tabla de multiplicar como división. En este último caso, el sentido de “tantas veces” será un cociente. Para este propósito, los autores han diseñado como herramienta de experimentación la calculadora de cubitos. En esta se introducen a las ya conocidas imágenes de los encajamientos, algunas rueditas de colores para indicar la cantidad de veces, diferenciándola de la cantidad de unidades por grupo, que en este caso serán cubos (figura 6).

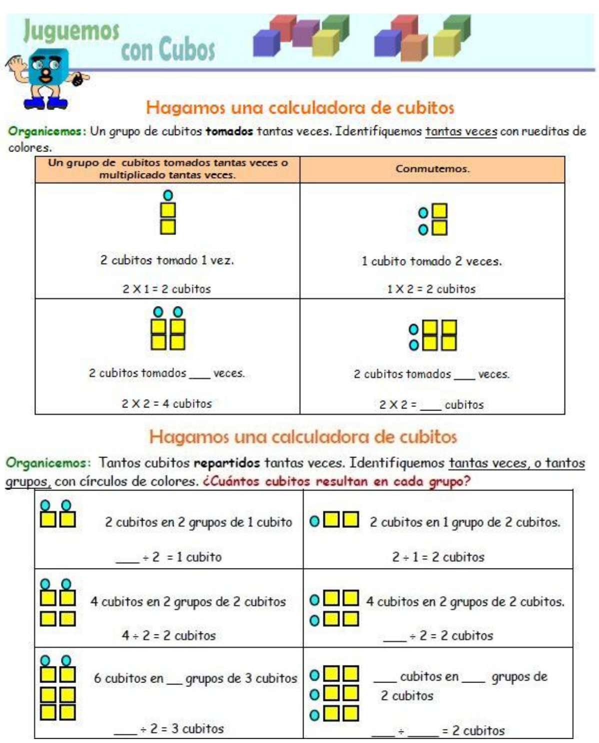


Figura 6. Calculadora de cubitos

[1] En otros idiomas no ocurre lo mismo. Por ejemplo, en inglés “3 × 4” se lee como “three times four”, esto es, “tres veces cuatro”.

Para esta experimentación, el niño debería asumir con solvencia la acción de organizar una cantidad total en varios grupos de cantidades iguales, es decir, conceptualizar la relación parte-todo de múltiplos y submúltiplos. Esta acción operativa, que fuera la finalidad de la conceptualización anterior, ahora es la base operativa para pensar *tematizando* la cantidad "cuántas veces cabe (está)" (Piaget, 1985). Es importante explicitar cuantitativamente la relación de inclusión de la parte respecto del todo *¿cuántas veces?* en las situaciones de aprendizaje. Si bien esta relación estaba implícita en el requerimiento anterior de hacer encajamientos múltiplo-submúltiplo, este hacer está implicado aquí como operatividad de base.

De esta forma, ahora la cantidad de grupos o de submúltiplos, el segundo número de la tabla de multiplicar, se presenta como un sistema más complejo. Aquí se organizan las cantidades parte-todo de la misma manera, pero en este momento el niño deberá entenderlo de una manera más amplia, explicitando la cantidad de veces que toman los grupos de cantidades iguales. El pensamiento en torno a *cuántas veces* se multiplica una cantidad o en *cuántas cantidades* iguales se divide otra cantidad total, será para el niño la base de la operatividad de multiplicar y dividir. Este pensamiento de progresión, al agregar sucesivamente una cantidad igual en correspondencia o en dependencia con otra que indica cuántas veces, será la base para que posteriormente pueda pensar la relación que se establece en una función, "el concepto fundamental de la matemática moderna" (Dieudonné, 1988). Por ejemplo, en la figura 6 se espera que el niño pueda vivenciar cómo el número de grupos iguales de cubos crece en *función* del número de rueditas de colores.

CUARTA SITUACIÓN: ESTABLECIMIENTO DE RELACIONES DE CORRESPONDENCIA

En una investigación ya mencionada en este artículo (Lotero Botero y Andrade Londoño, 2011) se presentó un enunciado de un problema matemático con una situación de vida. El problema reza así:

> Don Mariano trabaja desde temprano en su taller de carpintería. A don Mariano le han encargado hacer 7 mesas para el colegio. Don Mariano necesita 5 puntillas para cada mesa. Entonces, él va a la ferretería a comprar 1 caja de puntillas. La caja trae 40 puntillas. Don Mariano dijo: "Mejor que sobren por si algunas se dañan al martillar". ¿Cuántas puntillas necesitará para las 7 mesas? ¿Sobrarán puntillas?

Ni uno solo de los 210 niños que trabajaron la prueba tuvo éxito en la solución, pese a que algunos de ellos revelaron comprender el texto de la situación del problema, no obstante que se les animó a efectuar dibujos para buscar la solución (Lotero Botero y Andrade Londoño, 2011).

Podría pensarse que la estrategia operativa más común para este enunciado sea la de encontrar primero, por medio de una multiplicación, la cantidad de puntillas que se utilizarán en las siete mesas y, a continuación, restar este resultado de la cantidad de puntillas de la caja. Sin embargo, esta vía de solución no parece ser fácilmente vislumbrada por los niños. Llamó poderosamente la atención que prácticamente ninguno de los niños que se enfrentaron a este problema realizara algún dibujo para intentar la solución.

Esta observación conduce a la siguiente pregunta: ¿no es obvio para el niño el establecimiento gráfico de una relación de correspondencia entre mesas y puntillas? La respuesta aquí es no, no es obvio. Precisamente, parece necesario que el niño aprenda a establecer dicha relación entre dos conjuntos, para el contexto de un problema de multiplicación. ¿Cuáles conjuntos? Uno, el conjunto de cosas que se multiplica (en el caso de este problema, las puntillas). Otro, el conjunto de cosas que indica cuántas veces se multiplica (en este caso, las mesas). Esta manera de abordar precisa que los símbolos numéricos de la multiplicación se refieran a cantidades de cosas, como es el caso de los problemas de vida. Si el niño logra establecer tal relación de correspondencia, dispondrá de una estrategia para abordar y solucionar problemas que requieran la multiplicación. El niño pensará la relación de correspondencia sobre la base de pensar un agregado sucesivo de una cantidad una vez, otra vez, un determinado número de veces, como se muestra en los ejemplos de la figura 7, que se presenta a continuación.

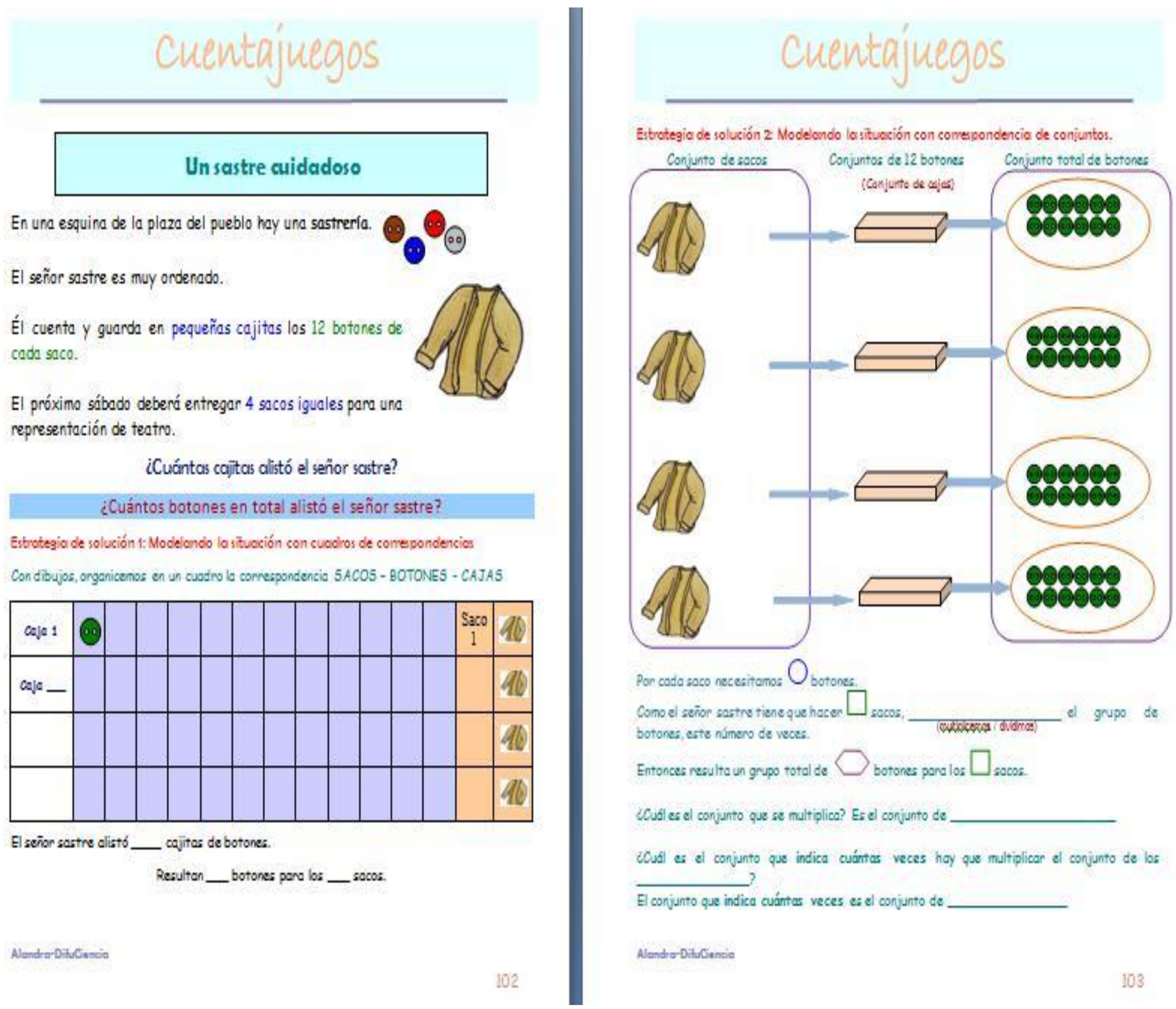


Figura 7. Ejemplo de planteamientos de estrategias según correspondencias

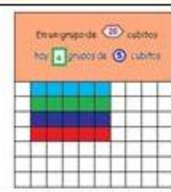
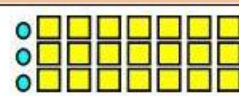
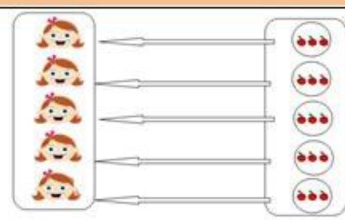
Esta situación de aprendizaje se propone a los niños en la práctica de solucionar problemas concretos, como el que se muestra en la figura 7 o como se mostrará en el apartado relativo a la validación. La situación está encaminada a propiciar el establecimiento de correspondencias entre subconjuntos, es decir, la cantidad que se multiplica y las unidades del conjunto que indica *cuántas veces.* Para estas actividades de aprendizaje, los niños utilizan materiales tangibles y, además, trabajan con representaciones pictóricas por medio de diagramas de Venn y flechas, como se ilustra en la figura 7.

SÍNTESIS DEL PROCESO GENERAL DE DISEÑO PARA LA CONSTRUCCIÓN CONCEPTUAL

La construcción conceptual se asume como una manera de pensar de una sola vez, como un solo significado de mayor nivel, una situación previa que ahora integra de manera consciente un aspecto nuevo. La situación previa debió ser igualmente conceptualizada a partir de una situación antecedente (Piaget y García, 1982). Aunque se observa la misma realidad concreta (en este caso los materiales concretos de cubos), se le podrán conferir significados cada vez más amplios a partir de un significado anterior (Piaget y García, 1997; Hawkins y Blakeslee, 2005). En el caso de las matemáticas, el significado anterior es una base operativa que sirve para pensar en un sistema más amplio la nueva (Bell, 2004; Hawking, 2008).

A continuación, en la Tabla 1 se presenta un resumen de los cuatro requerimientos y sus respectivas situaciones de aprendizaje, establecidos aquí para la construcción conceptual de la multiplicación.

Tabla 1. Requerimientos para construir el concepto de la multiplicación

CONCEPTUALIZACIÓN PREVIA	AHORA BASE OPERATIVA	MODELO ORGANIZADO CON MATERIALES TANGIBLES	NUEVA ADQUISICIÓN	SIGNIFICACIÓN MATEMÁTICA
Significado del principio aditivo del número.	Adicionar cantidades iguales.	3 cubos  3 grupos o vagones  Tren con 9 cubos	El niño observa que cuando se compone una cantidad con cantidades más pequeñas e iguales entre sí, resultan tres números.	El niño confiere significado de cada uno de los números en este tipo de organización. El niño piensa cada número separadamente.
Significado de cada uno de los números al agrupar cantidades iguales para componer una cantidad total más grande.	Organizar cantidades iguales (grupos) como partes de un todo.		El niño piensa los tres números *a la vez*, como una relación parte–todo.	Significado de *cantidades incluidas* y significado de *cantidad inclusora*. El niño piensa las dos cantidades en una sola relación.
Significado de cantidades incluídas y significado de cantidad inclusora. Una relación *parte-todo*.	Organización del tipo anterior, indicando para contar las partes que hay en un todo.	 7 cubitos tomados ___ veces. 7 X 3 = ___ cubitos	El niño explicita la cantidad de partes como *veces* en las que se agregan, una a una, consecutivamente, las partes iguales.	El niño hace corresponder como un sólo significado matemático, las partes del todo y la cantidad de veces que han sido agregadas esas partes iguales.
El niño comprende como un sólo significado matemático las partes del todo y la cantidad de veces que han sido agregadas esas partes iguales.	La organización anterior se reemplaza por conjuntos de subconjuntos y conjuntos de unidades de cosas de la experiencia cotidiana del niño.		El niño ahora piensa que se multiplica *tantas veces* como unidades hay en un conjunto de referencia.	El niño confiere significado matemático a enunciados de problemas en situaciones de vida.

El niño logrará pensar la expresión simbólica a x b = c con un significado que abarcará e integrará a los anteriores en una sola comprensión.

VALIDACIÓN DE LA ESTRUCTURACIÓN CONCEPTUAL

En el caso estudio, objeto del presente escrito, hemos asumido como criterio de evaluación el desempeño de los niños al resolver problemas de vida que se refieren a situaciones de multiplicación. En el diseño de esta propuesta, cada una de las situaciones de aprendizaje con las cuales se ha experimentado y establecido relaciones con el número, enfrenta a los niños a enunciados de problemas de vida que hemos denominado *cuentajuegos*.

En un primer momento, los enunciados de los cuentajuegos enseñan pautas para modelar la situación matemática que se plantea y, si se requiere, se acude a los materiales tangibles para este propósito. Este tipo de experimentación se adelanta pormenorizadamente, solicitando a los niños que verbalicen sus modelamientos y justifiquen las soluciones. En estas experiencias de aprendizaje, se trata de evaluar si el niño ha logrado dar significado a aquellas situaciones que se han planteado como de estructuración conceptual. En un segundo momento, se espera que el niño represente y describa en un espacio en blanco lo que para él significa una situación de multiplicación, al tiempo que revele las herramientas de pensamiento que ha utilizado para hallar la solución.

A continuación, se examina un caso de un problema del carpintero (figura 8). El enunciado del problema de vida es típico de la clase de problemas que suele plantearse a estudiantes de básica primaria. Aquí se pregunta a los niños por la cantidad de puntillas que sobran y no por el resultado de multiplicar dos cantidades. Si bien algunos estudiantes examinados (22%) en la experiencia de Medellín (Lotero Botero y Andrade Londoño, 2011) multiplicaron las puntillas y las mesas, estos niños no lograron avanzar más en la solución. El espacio de la hoja en el que se les animaba a plantear la solución con dibujos quedó en blanco.

¿Por qué estos niños mostraron no poseer herramientas de pensamiento que les permitieran plantear alguna estrategia de solución? Aunque en el contexto del presente artículo no es posible ofrecer una respuesta cierta a este interrogante, sí se afirma que algo no anda bien en la educación matemática de estos niños, opinión concordante con el resultado de las evaluaciones nacionales (*v. g*. Pruebas Saber) e internacionales (*v. g.* pruebas TIMSS o PISA).

Contrasta con lo anterior la solución sobresaliente que da Ray, aquel niño de complicado diagnóstico inicial, a este problema (figura 8). Esta solución la trabajó Ray luego de haber vivenciado las cuatro experiencias de aprendizaje antes descritas (en los anexos 1 y 2 se presentan ejemplos adicionales de problemas y la manera como fueron abordados por algunos de los niños del Centro Tutorial).

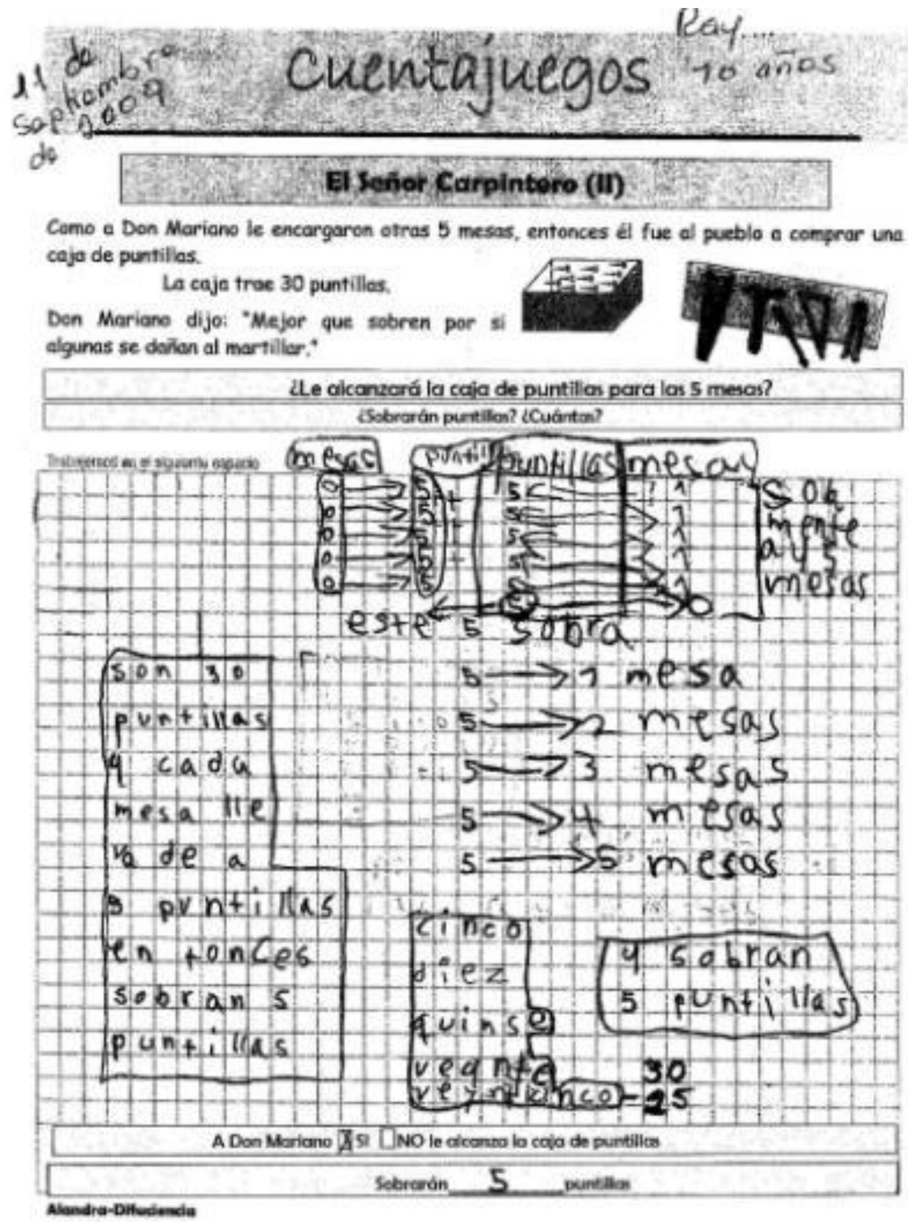


Figura 8. Solución de Ray al problema del carpintero

Lo valioso de esta solución gráfica es que deja ver varios aspectos del pensamiento matemático allí implicados, en los que unos son la base para otros de mayor complejidad:

- Concepto de número como cantidad o conjunto cardinal.
- Agrupamiento de las puntillas.
- Relación de correspondencia en la asignación de cinco puntillas a cada una de las cinco mesas.
- Suma consecutiva de cada uno de los grupos de cinco puntillas.
- Multiplicación, porque se trata de la progresión aditiva de cantidades iguales con un referente de hasta cinco veces (véase borde inferior de la figura 8).

- Conceptualización de múltiplo-submúltiplo. Grupos de cinco puntillas encajados.
- División, porque el total de puntillas se reparte en grupos de cinco.

Cuando se le pidió a Ray presentar su solución en otra hoja, de manera más "limpia", esto fue lo que hizo (figura 9):

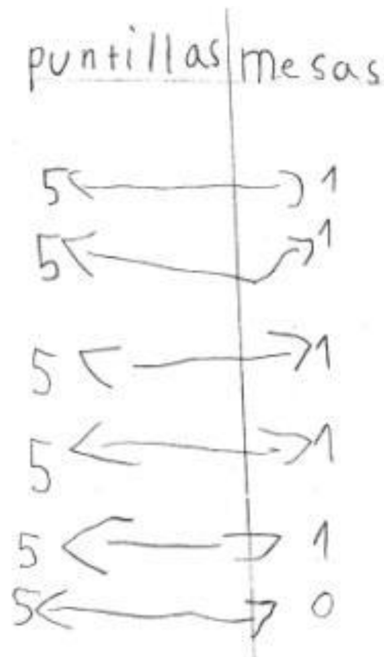


Figura 9. Planteamiento gráfico de Ray para la correspondencia entre los dos conjuntos: mesas y puntillas

De esta última figura desatacamos la flecha doble que hace corresponder el 5 con el 0. Esta relación fue verbalizada por el niño de la siguiente manera: "se acabaron las mesas, sobran 5 puntillas". Hay que agregar que, en el momento de esta solución, Ray no sabía de memoria las tablas de multiplicar y que, cuatro años antes, no había ingresado a la escolaridad trabajando con símbolos escritos de los números.

A continuación se presenta otro ejemplo de una niña mayor que Ray, quien también logró superar sus grandes dificultades con la escolaridad convencional. En este caso, ya se hace explícita la operación, pero luego de que ha adquirido un significado para ella (figura 10).

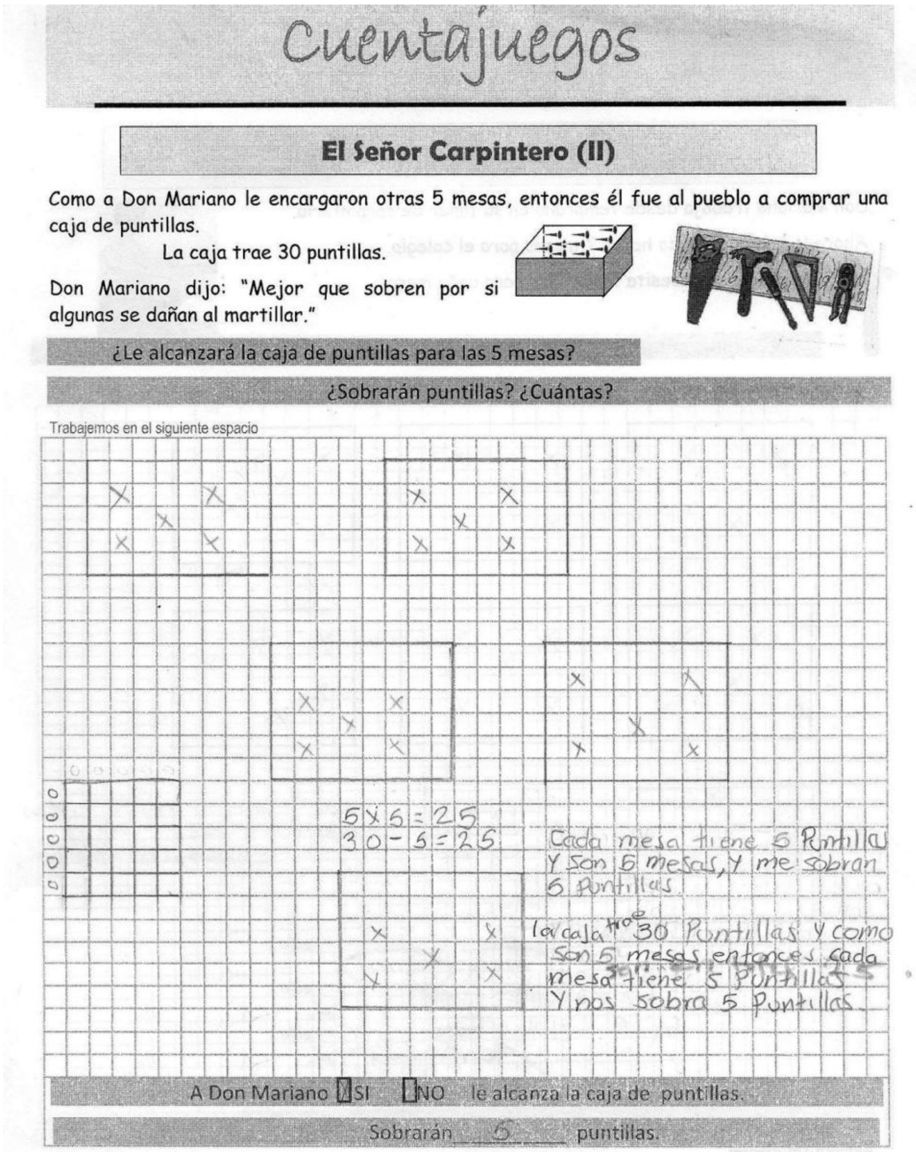


Figura 10. Resolución al problema del carpintero con operaciones explícitas

Estos ejemplos, de situaciones típicas de vida en las que se precisa apelar a la aritmética, sirven para poner de relieve la importancia de enseñar a los niños a pensar la multiplicación como una relación de correspondencia entre dos conjuntos como una modelación matemática que favorece la construcción de significado de la multiplicación. Se puede observar la relación de correspondencia en los dibujos hechos por estos niños, al presentar gráficamente dos grupos de elementos y las flechas que indican tal relación.

A diferencia de las operaciones de suma y resta, que son transformaciones de cantidades efectuadas dentro de un mismo conjunto, en las situaciones de multiplicación de un grupo de cosas, se hace necesario considerar otro conjunto de cosas. Este último conjunto se constituye en un marco de referencia, en el indicador de cuántas veces, en un conjunto externo a la cantidad de cosas que se multiplica.

CONCLUSIONES

El análisis de desempeño de los niños que participaron en esta experiencia al resolver problemas de vida que involucran multiplicación permite afirmar, con seguridad, que ellos lograron establecer significados matemáticos para cada situación planteada, antes que apelar exclusivamente a la memoria de las tablas de multiplicar. Además, en este estudio se pone de relieve la importancia de integrar diversos materiales tangibles al aprendizaje de las matemáticas, con propósitos muy definidos. Un requisito básico para esta construcción conceptual estriba en la comprensión del número como representación de un conjunto de cosas, antes que como un símbolo. Los autores piensan que este es un cambio conceptual importante en la educación matemática. Si el niño no logra conferir significado a las tres cantidades referidas, no podrá trasladar su conocimiento de las tablas de multiplicar al modelamiento matemático de situaciones de vida.

Se resalta aquí que la contribución fundamental de este estudio a la educación matemática se ubica en la *identificación* de cuatro requerimientos conceptuales para el proceso constructivo de la multiplicación y, consiguientemente, el diseño de una *propuesta concreta* de cuatro situaciones de aprendizaje que se corresponden con cada uno de los requerimientos para la conceptualización. Aunque varias instituciones educativas han adoptado el empleo de materiales tangibles, las situaciones de aprendizaje con tales materiales planteadas en este estudio son completamente originales, y hacen parte integral de la propuesta inédita de los cuatro requerimientos.

De la validación de esta propuesta en la práctica tutorial de aula, surgen dos reflexiones principales: 1) las cuatro situaciones de aprendizaje ayudaron a niños con reiterado fracaso escolar a superar la desmotivación y los escollos de comprensión en un tema clave de la educación matemática en básica primaria, cual es la multiplicación, y 2) el papel que empieza a desempeñar la investigación educativa en el diseño de actividades de aprendizaje.

En lo referente a la primera reflexión, la idea de que el niño le confiera significado a los términos de la multiplicación ($a \times b = c$) a partir de modelamientos con materiales tangibles, como fundamento de la conceptualización matemática, ha resultado ser una vía promisoria para la didáctica. Así es como a lo largo de las situaciones de aprendizaje se propuso un camino de construcción conceptual que sigue cuatro etapas.

En la primera de estas, en la experiencia de los autores, la actividad en la que se le dan al niño dos cantidades para que encuentre la tercera (esto es, cantidad de cubos del tren, cantidad de vagones o cantidad de cubos en cada vagón) y en el que solo realiza la acción de agrupar con cubos tangibles, permite la reflexión del niño para iniciar la coordinación de significados de los tres términos que aparecen en una operación de multiplicación. Esta forma de experiencia, en la que se representan las tres cantidades, ha mostrado ser de gran dificultad para la mayoría de los niños.

Respecto de la segunda situación de aprendizaje para la relación parte-todo, que implica la anterior situación del significado de cada número de los agrupamientos, se puso de presente la conveniencia de que el tema múltiplo-submúltiplo sea trabajado antes de las tablas de multiplicar. Además, en este caso estudio, se encontró que los niños tutoriados pudieron pensar con solvencia esta forma de relación parte-todo, a partir de manipular grupos iguales de unidades concretas, como un fundamento para la construcción conceptual de la operación de multiplicación.

En lo referente a la tercera situación, en las bitácoras de los autores se registran algunos momentos en los que algunos niños manifestaron haber comprendido las tablas de multiplicar luego de experimentar con la calculadora de cubitos. Esta forma de experimentación resultó ser muy motivante para los niños más pequeños del grupo, novatos en cuanto al ingreso a la multiplicación, pues les facilitó pensar los números de la tabla; pero lo más revelador fueron las expresiones de aquellos niños del grupo que, antes de su ingreso al Centro Tutorial, habían sido expuestos a la memorización de las tablas. Declararon que ahora sí entendían las tablas de multiplicar. El niño asume lógicamente la expresión "cuántas veces", la cual plantea una relación parte-todo que luego puede ser expresada matemáticamente como un cociente o como un todo fraccionado. Además, esta expresión estará presente en el principio lógico de comparar tamaños de conjuntos que se expresarán algebraicamente como un coeficiente. Por ejemplo, A tiene cuatro veces más (o cuatro veces menos) canicas que B. Esta forma de relación se halla en la base del tránsito de la aritmética al álgebra, y si no logra establecerse con claridad, planteará dificultades para el ingreso a esta forma de pensamiento más compleja (Bednarz y Guzmán Hernández, 2003).

La cuarta situación demostró ser de gran ayuda para que el niño modelara el significado matemático de problemas de vida y pudiera, consecuentemente, planear la solución. Se apoya al niño para que identifique cada conjunto de manera consciente. Cada conjunto se corresponde con cada término de la multiplicación. Cada número de la tabla de multiplicar ocupará su lugar en este contexto de conjuntos diferenciados. En este orden de ideas, de aquí se colige que sea necesario hacer notar al niño que la conmutatividad de los factores de la multiplicación se refiere a números abstractos, no a cosas de situaciones de vida.

La segunda reflexión se orienta en el sentido de que la investigación educativa se debe sustentar en la observación directa y en la reflexión surgida del trabajo con niños de carne y hueso, en experiencias claramente sistematizadas hacia un propósito de aprendizaje. Esta manera de hacer investigación educativa comienza a ser adoptada por un creciente número de centros de investigación y de esta modalidad se conocen varios resultados interesantes (Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer, 2011; Hall y Rubin, 1998; Konold y Higgins, 2002; McClain, Cobb, Gravemeijer y Estes, 1999).

Definitivamente, conceptualizar la multiplicación es mucho más que aprender de memoria las tablas de multiplicar. Esta tradicional exigencia educativa, aún considerada indispensable por muchos, podría, al parecer, ser el primer escollo serio que enfrentan los niños en su aprendizaje escolar de las matemáticas y el origen de la bien documentada animadversión entre los escolares por esta área del conocimiento.

Finalmente, el caso estudio ha evidenciado la necesidad de un relativamente largo proceso de construcción conceptual, para que los niños coordinen las tres cantidades en dos planos de conceptualización, por así decirlo, implicadas en lo que significa la operación de multiplicación. Desdeñar esta dificultad, en opinión de los autores, está en el núcleo de los bien reconocidos problemas que afrontan los niños con esta operación. La más clara evidencia de estas dificultades es la imposibilidad práctica por parte de niños de solucionar problemas en situaciones de vida cotidiana, aun de aquellos que recitan de memoria las tablas de multiplicar.

REFERENCIAS

Baquero, R. (2008). Tensiones y paradojas en el uso de la psicología sociohistórica en la educación. En *Debates constructivistas* (pp. 123-145). Buenos Aires: Aique.

Bednarz, N. y Guzmán Hernández, J. (2003). ¿Cómo abordan los estudiantes de secundaria la resolución de problemas antes de ser introducidos al álgebra? Un estudio exploratorio: Quebec-México. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 11-40). México D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Bell, E. T. (2004). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Block, D.; Moscoso, A.; Ramírez, M. y Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 12 (33), 731-762.

Bonache Pérez, J. (1999). El estudio de casos como estrategia de construcción teórica: características, críticas y defensas. *Cuadernos de Economía y Dirección de la Empresa* (3), 123-140.

Bruner, J. E. A. (1965). *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Narcea.

Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1 (1), 45-60.

Cobb, P.; Stephan, M.; McClain, K. y Gravemeijer, K. (2011). Participating in classroom mathematical practices. *A Journey in Mathematics Education Research*, 117-163.

Dieudonné, J. (1988). Matemáticas vacías y matemática significativas. En F. Guénard y G. Lelièvre (Eds.), *Pensar la matemática* (pp. 167-193). Barcelona: Tusquets.

Ferreiro, E. (2003). *Vigencia de Jean Piaget*. México: Siglo XXI.

García, G. (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Mátemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Eduteka: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf.

Hall, R. y Rubin, A. (1998). There's five little notches in here: Dilemmas in teaching and learning the conventional structure of rate. En J. Greeno y S. Goldman (Eds.), *Thinking practices in mathematics and science learning* (pp. 189-235). London: Routledge.

Hawing, S. (2008). *Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia*. Barcelona: Crítica.

Hawkins, J. y Blakeslee, S. (2005). *Sobre la inteligencia*. Madrid: Espasa.

Kaplan, R. G.; Yamamoto, Y. y Ginsburg, H. P. (2007). La enseñanza de conceptos matemáticos. En L. Resnick y L. Klopfer (Eds.), *Currículum y cognición* (pp. 105-139). Buenos Aires: Aique.

Konold, C. y Higgins, T. (2002). Highlights of related research. En S. J. Russell, D. Schifter y V. Bastable (Eds.), *Developing mathematical ideas: Working with data* (pp. 165-201). Parsippany, NJ: Dale Seymour Publications.

Lampert, M. (1986). Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, 3 (4), 305-342.

Lotero Botero, L. A. y Andrade Londoño, E. A. (2011). *Validación de un programa para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la ciudad de Medellín*. Bogotá: Alandra.

Lotero Botero, L. A.; Andrade Londoño, E. A. y Andrade Lotero, L. A. (2010). *El aprendizaje con significado de la matemática: una propuesta desde la teoría a la práctica*. Bogotá: Alandra. Recuperado de: http://alandradifuciencia.org/images/stories/downloads/aprendizaje_sig.pdf.

Lotero Botero, L. A.; Andrade Londoño, E. A. y Andrade Lotero, L. A. (2011). *Cuadros de significado para la solución de problemas matemáticos*. Bogotá: Alandra. Recuperado de: http://alandradifuciencia.org/images/stories/downloads/cuadros_sig.pdf.

Manches, A. y O'Malley, C. (2011). Tangibles for learning: a representational analysis of physical manipulation. *Personal and Ubiquitous Computing*. Recuperado de: http://www.springerlink.com/content/n0l4513348p34545/fulltext.pdf

McClain, K.; Cobb, P.; Gravemeijer, K. y Estes, B. (1999). Developing mathematical reasoning within the context of measurement. En V. Stiff y R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12, 1999 Yearbook* (pp. 93-106). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, T. y Bryant, P. (2005). *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Piaget, J. (1983). *Teorías del lenguaje, teorías del aprendizaje: el debate entre Jean Piaget y Noam Chomsky*. Barcelona: Crítica.

Piaget, J. (1985). *La toma de conciencia*. Madrid: Morata.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Piaget, J. y García, R. (1997). *Hacia una lógica de significaciones*. Barcelona: Gedisa.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS*, 47 (6), 1-19.

Schoenfeld, A. H. (2007). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En L. Resnick y L. Klopfer (Eds.), *Currículum y cognición* (pp. 141-170). Buenos Aires: Aique.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Uttal, D. H.; Scudder, K. V. y DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: a new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18, 37-54.

Wood, D. (2000). *Cómo piensan y aprenden los niños*. México: Siglo XXI.

Wood, D. y Wood, H. (1996). Vygotsky, tutoring and learning. *Oxford Review of Education*, 22 (1), 5-17.

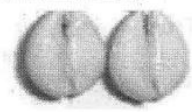
ANEXO 1. CUENTAJUEGOS PARA LAS SITUACIONES DE AGRUPAMIENTO: SOLUCIÓN DE UNA DE LAS NIÑAS DEL CENTRO TUTORIAL

Cuentajuegos

La edad de Paco

Paco quiere ser biólogo marino. Paco colecciona conchas de mar.

Su tío, quien viaja con frecuencia a las costas del Mar Caribe, le dijo:



"Te regalaré 2 conchas por cada año que tienes."

El tío le regaló a Paco 22 conchas.

¿Cuántos años tiene Paco?

Trabajemos en el siguiente espacio

1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
1 año ——— 2 conchas
Paco tiene 11 años

El tio le da a Paco Por cada año que tiene le 2 conchas y como son 22 conchas que le dio el tio entonces esto lo dividi y nos dio 11 años.

Por cada 2 conchas son 1 año entonces complete 22 conchas y nos dio 11 años.

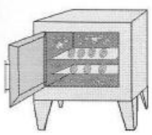
Yo reparti 22 conchas en 2 conchas y me resultaron 11 grupos.

Paco tiene ___11___ años.

ANEXO 2. SITUACIÓN DE ¿CUÁNTAS VECES? EXPRESADA COMO MOMENTOS

Cuentajuegos

Galletitas al horno



La abuelita Manuela está preparando 30 ricas galletas para sus pequeños nietos.

Los niños siguen paso a paso la receta de la abuela.

La abuela se queda pensando y dice: "El problema es que en este horno tan pequeño solo puedo hornear 10 galletas.

¿Cuántas veces deberá la abuela hornear galletas en el horno?
O sea, ¿en cuántas tandas será necesario hornear las 30 galletas?

Estrategia de solución

Con dibujos, organicemos la correspondencia GALLETAS - TANDAS O VECES EN EL HORNO

	Galletas									
Tanda 1										
Tanda2										
Tanda3										

Resulta que la abuela deberá hacer 3 tandas para hornear 30 galletas.