COLABORACIÓN

LAS FRACCIONES: ¿PROBLEMA DE APRENDIZAJE O PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA?

Por Vilma Pruzzo de Di Pego
vilmapruzzo@yahoo.com.ar
Facultad de Ciencias Humanas - Universidad Nacional de La Pampa

RESUMEN

Las dificultades de aprendizaje nos plantean una problemática que hemos delimitado centrándonos en la construcción del concepto de fracción con los siguientes objetivos: Comparar los aprendizajes curriculares esperados (nivel primario) con los desempeños de los alumnos de 1° Año del secundario. Analizar los errores como medio de conocer el pensamiento matemático desarrollado. Establecer las relaciones entre las actividades escolares y los aprendizajes logrados. A partir de una metodología de perspectiva cualitativa, evaluamos el aprendizaje de cuatrocientos treinta y tres estudiantes y realizamos el análisis documental de manuales, cuadernos y diseño curricular. Numerosos alumnos no logran representar números fraccionarios, operar con ellos o establecer equivalencias. Los errores post instruccionales analizados señalan que no han construido el concepto de “fracción” centrado en las relaciones “parte-todo”. Quedan comprometidos, así, todos los aprendizajes sobre números racionales subsiguientes. Los errores, se vinculan con actividades que presentan las fracciones, tanto vinculadas a la medida como con el reparto, alejadas de las acciones y centradas en *configuraciones perceptivas* de materiales continuos y discretos que no toman cuenta ni peso, ni volumen. Denominamos “enseñanza irrelevante” a la que estanca a los alumnos en el “no aprendizaje” -lagunas de aprendizaje- o inducen errores post instruccionales, que pasan inadvertidos en las evaluaciones.

Palabras clave: Fracciones; Enseñanza irrelevante; No-aprendizaje; Evaluación.

THE FRACTIONS: LEARNING PROBLEM OR TEACHING PROBLEMS?

ABSTRACT

Learning difficulties constitute an issue we have limited, focusing on the concept of fraction, with the following aims: To compare the expected curricular learning (primary level) with the first-year-students´ performances, at secondary level. To analyze errors as a means to know the mathematical thought developed. To set relationships between school activities and learning achieved. Through a qualitative methodology, we evaluated the learning of 433 students, together with their manuals and note books. Numerous students have not constructed neither the simplest interpretation of fraction (relation part- whole), nor its representation in continuous and discrete contexts. The learning of the global concept of fraction (rational number) and the algebraic knowledge related to fractions still remain underachieved. Post-instructional errors detected are linked to activities that present, simultaneously, the relation part-whole with those of distribution, detached from concrete operations and focused on *perceptive configurations* of continuous and discrete representations which do not take into account neither weight nor volume. By “irrelevant teaching” we mean the one which clogs students in the “non learning” area, unnoticed during evaluation processes.

Key words: Fractions; Irrelevant teaching; No-learning; Evaluation.

Recibido: 14/07/12 • **Aceptado:** 01/08/12

> Los niños y niñas latinoamericanos "sobreviven" muchos años en el sistema escolar. Sin embargo, lo hacen en condiciones cualitativamente diferentes [...] Para muchos, resulta el inicio y el fin de una corta experiencia educativa marcada por el fracaso impuesto, por la repetición obligada y por la expulsión prematura…un proceso de inclusión excluyente. Ayer, la exclusión era una barrera que se ponía en la puerta de la escuela. Hoy la exclusión está dentro de la escuela [...I monopolio del conocimiento es una de las más brutales formas de exclusión y segregación vividas históricamente por los más pobres.
>
> P. Gentile

El monopolio del conocimiento implica que, en nuestras sociedades, son pocos los que aprenden los saberes legitimados y muchos más los que quedan excluidos de esos cuerpos del saber. Es una de las formas con que se prolonga la injusticia social y se condena prematuramente a muchos niños a entrar al mundo de los excluidos y de la más brutal desigualdad. Mientras el sistema abre las puertas de la escuela a todas y todos, adentro de esa escuela se fortalece el fracaso escolar. Unos pocos monopolizarán el saber en la sociedad del conocimiento y entonces las diferencias culturales con que los estudiantes enfrentan la escolaridad se transforman en distancias escolares. La igualdad no se conquista desde el discurso inclusivo, sino depende de prácticas reales que enfrenten las desigualdades y por ende la exclusión. La pregunta sería cuánto aprenden y qué aprenden en la escuela nuestros niños.

A pesar de los pocos escritos de Piaget (1985) sobre educación, ya había planteado en 1965 esta problemática que aún no hemos resuelto: "La primera y sorprendente constatación que se impone en el intervalo de treinta años, es la ignorancia en la que hemos permanecido en cuanto a los resultados de las técnicas educativas. En 1965, tanto como en 1935, desconocemos lo que queda de los diferentes conocimientos adquiridos en la escuela…después de 5, 10, o 20 años" Piaget, 1985: 11)

En este texto, Piaget parte del supuesto de que se adquieren *conocimientos* en la escuela, aunque pone en cuestión cuáles se recuerdan en el curso de la vida y plantea en este marco *el desconocimiento de los resultados* sobre el éxito de la enseñanza. Sin embargo, nosotros hemos construido una hipótesis aún más preocupante, a partir de nuestra línea de investigación: los estudiantes no estarían aprendiendo nociones curriculares consideradas básicas. Hoy retomamos en nuestra investigación una temática ya abordada (Pruzzo, 2004; Pruzzo, 2007; Pruzzo, 2008) en un reto que debe afrontar la Didáctica: las responsabilidades que le caben a la enseñanza en la falta de aprendizaje de nuestros alumnos. El Consejo Federal de Cultura y Educación ha establecido para nuestro país, los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP. CFCyE, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. 2005), aquellos saberes que el estado considera indispensables porque representan modos de pensar o actuar necesarios para garantizar las condiciones de igualdad y equidad. En nuestra investigación nos preguntamos si los alumnos aprenden esos saberes prioritarios. Nuestra hipótesis señala que un elevado porcentaje de alumnos de Nivel Medio manifiestan lagunas de aprendizajes y errores conceptuales severos sobre nociones de Nivel Primario, lagunas y errores *inducidos desde una enseñanza irrelevante.* Llamamos "lagunas de aprendizajes" a los saberes que, figurando en los NAP, no han sido aprendidos por los alumnos, en síntesis, el **"**no aprendizaje**"** de saberes básicos. Al hablar de "no aprendizajes" muchos colegas nos han planteado que los mismos no existirían: siempre se aprende algo, dicen. Coincidimos en que siempre es posible que se aprenda algo: se puede aprender a esperar turnos para conversar, se pueden aprender respuestas violentas, por ejemplo, pero nosotros nos referimos a los aprendizajes seleccionados en los NAP: en nuestro caso, números fraccionarios. ¿Cómo llamamos a la situación en la que un alumno del secundario no construyó la concepción más básica de fracción prevista para 4° del primario? (relación parte-todo) No existiría la palabra que nomine esta situación. Para los seguidores de Vigotsky (Itzigsohn, 1964) la palabra, a través de su significado, le permite al sujeto pensar sobre el referente, pero no se puede pensar sobre lo que no tiene nombre. Lo opuesto a aprender no existe en nuestro vocabulario y nosotros le llamaremos el "no aprendizaje", por el fuerte impacto que produce en el fracaso del escolar. Por ejemplo, ¿el joven ha aprendido el concepto fracción (relación parte-todo) que figura en los NAP? Si no lo ha construido, ese *no aprendizaje* (que también hemos denominado *laguna de aprendizaje)* va a obstruir el conocimiento de carácter algebraico vinculado a las fracciones. Además, hemos concebido la posibilidad de que a veces no existan lagunas de aprendizaje sino *errores conceptuales*, algunos de los cuales pueden derivarse de concepciones personales construidas fuera del ámbito escolar, pero los que indagamos han sido inducidos desde una enseñanza irrelevante. Mantenemos acuerdo generalizado acerca de que la enseñanza es una práctica social y humana que compromete moralmente al educador. Es decir, no es una práctica irresponsable. Por eso, llamamos enseñanza irrelevante aquélla que pierde de vista principios básicos de la Didáctica especialmente aquel que señala que la *enseñanza custodia el aprendizaje a través de la evaluación.* Sólo evaluando si se ha aprendido lo enseñado se pueden tomar decisiones de continuación, o transformación de la enseñanza y en este caso se hace cargo de controlar si la enseñanza está incidiendo en el aprendizaje, como forma de garantizar el derecho a aprender de nuestros estudiantes. Es una enseñanza moralmente comprometida con el aprendizaje. En síntesis, señalamos la existencia tanto de *lagunas de aprendizaje* (lo que no se ha aprendido) como de *errores post instruccionales* (errores inducidos desde la enseñanza) que se suman a los errores fundados en concepciones personales (errores constructivos)

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Continuando la línea de indagación sobre las dificultades de aprendizaje, en esta investigación hemos delimitado el problema, a partir de los siguientes interrogantes: ¿Qué aprendizajes han logrado los alumnos del secundario sobre los números fraccionarios? ¿Qué relaciones guardan esos desempeños, con los esperados en los NAP? ¿Qué errores se detectan? ¿Puede establecerse relaciones entre los errores y lagunas de aprendizaje con las propuestas de actividades?

A partir de este marco, nos hemos fijado los siguientes objetivos:

- Comparar los aprendizajes curriculares esperados (nivel primario) con los desempeños de los alumnos de 1° Año del secundario.
- Analizar los errores como medio de conocer el pensamiento matemático desarrollado.
- Establecer las relaciones entre las actividades escolares y los aprendizajes logrados.

METODOLOGÍA

El trabajo se enmarca en una perspectiva cualitativa que intenta asignar sentidos y significados a los desempeños escolares en el ámbito curricular de las fracciones. Estos aprendizajes que se esperan lograr en 4º Año de nivel primario, son contenidos que se repiten en 5º y 6º años aunque en distintos niveles de complejización. Nosotros decidimos rastrearlos en 1° Año del secundario, en veintitrés escuelas secundarias de la Capital y el interior de la Provincia de La Pampa, evaluando a cuatrocientos treinta y tres alumnos. Para ello, seleccionamos una prueba de evaluación redactada y empleada por una profesora de Matemáticas porque se consideró que son las docentes las que evalúan y determinan cotidianamente, la aprobación o desaprobación de los alumnos. Y por lo tanto, cualquier cambio que pudiéramos hacer en las evaluaciones en uso podría resultar un obstáculo para la resolución de los alumnos. Sometimos el dispositivo a juicio de expertos (cinco directores de escuela y dos coordinadores) Luego elaboramos escalas descriptivas para evaluar las respuestas de los alumnos en cuatro niveles: Nivel 3 o 4, que señalan el logro de aprendizajes básicos sobre fracciones que permitirán emprender otros conocimientos más complejos como el vinculado al carácter algebraico de las fracciones; Nivel 1 ó 2 indican riesgo pedagógico para iniciar nuevos aprendizajes en el ámbito. A esta visión global cuantitativa, se le agregó un análisis minucioso de los errores cometidos para inferir los modos de pensamiento que los inducía.

Finalmente se realizó el análisis documental de carpetas escolares y libros de texto a fin de triangular información con las formas de enseñanza que se vinculan con los errores detectados.

LOS RESULTADOS OBTENIDOS

El 66% de los alumnos de 1° Año del secundario evaluados, no han construido los aprendizajes sobre números fraccionarios considerados prioritarios para alumnos de 4º año del nivel primario. Se acompañan a continuación los resultados de tres de las situaciones problemáticas, que acotamos por motivos de espacio.

Resuelve las siguientes situaciones problemáticas:

3.- Compara las fracciones ½ y 2/3 de la misma unidad. Coloca entre ellas, los signos menor o mayor según corresponda: ½….2/3. Grafica la relación.

4.- Luis tiene una caja con 16 alfajores para repartir entre los dos kioscos de la escuela, le deja ¼ al de Matías y 2/4 a Federico. Escribe la cantidad de alfajores que le dejó a cada uno y luego realiza la representación gráfica.

5.- Un agricultor de La Pampa siembra 1/6 de su campo con maíz y 2/6 con soja. Expresa en número fraccionario la parte del terreno que está sembrado y luego grafica.

Cuadro 3. Cantidad de alumnos según nivel de rendimiento en Problema 3

Problema 3		
Nivel	Cant. de alumnos	%
Nivel 4	**65**	**15%**
Nivel 3	**12**	**3%**
Nivel 2	**178**	**41%**
Nivel 1	**178**	**41%**
Total	**433**	**100%**

Cuadro 4. Cantidad de alumnos según nivel de rendimiento en Problema 4

Problema 4		
Nivel	Cant. de alumnos	%
Nivel 4	**115**	**27%**
Nivel 3	**16**	**4%**
Nivel 2	**53**	**11%**
Nivel 1	**249**	**58%**
Total	**433**	**100%**

Cuadro 5. Cantidad de alumnos según nivel de rendimiento en Problema 5

Problema 5		
Nivel	Cant. de alumnos	%
Nivel 4	**188**	**43%**
Nivel 3	**20**	**5%**
Nivel 2	**55**	**13%**
Nivel 1	**170**	**39%**
Total	**433**	**100%**

El Cuadro 3 describen los distintos niveles de aprendizaje en la comparación de fracciones. "Comparar entre sí y con n° naturales, fracciones de uso frecuente" (NAP. CFCyE. MCyE. 2005:18 y 19) Observamos que el 82 % de los alumnos de 1° Año (secundario) no han construido los atributos básicos que permiten la comparación y se encuentran en nivel de riesgo respecto a los aprendizajes prioritarios de las fracciones establecidos para 4º año de primario.

El Cuadro 4 muestra los niveles obtenidos por los alumnos al enfrentarse con un reparto de cantidades discretas (16 alfajores). El 60 % de los alumnos no ha logrado este aprendizaje prioritario.

En el Cuadro 5 se evalúa la resolución de un problema de suma de fracciones de cantidades continuas, uno de los más elementales aprendizajes sobre fracciones. Así mismo, sólo el 49 % de los alumnos del secundario han logrado su aprendizaje.

ANÁLISIS DE ERRORES: PENSAMIENTO MATEMÁTICO DESARROLLADO

Para analizar los trabajos de los alumnos hemos partido de las advertencias de Giordan (1995) sobre el rastreo de las concepciones de los alumnos. Señala al respecto que muchas veces se oscurece su evaluación porque se plantean situaciones vistas en el aula que provocan respuestas escolarizadas (memorizadas al margen de la comprensión), pero apenas se cambia la situación al solicitárseles gráficos, esquemas o dibujos, afloran los modos de pensar de los estudiantes. Por eso hemos pedido en todos los casos que grafiquen la situación problemática.

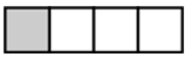
Los errores detectados nos permiten inferir el modo de pensamiento que les da origen, es decir las construcciones que subyacen, así como los obstáculos para nuevos aprendizajes que hemos reconstruido a través de dos ejes conceptuales: las relaciones parte-todo y la comparación de fracciones.

a.- Las relaciones parte / todo

Situación problemática: Tengo una barra de chocolate dividida en 8 barritas iguales y como tres barritas. Resuelve y representa gráficamente. Protocolo 5 (C8)

Quedan 5/2

A partir de esta representación podemos inferir la forma de pensar las ocho porciones de un chocolate (el todo) y las tres partes que se han comido: no lo concibe a partir de una unidad (todo) dividida en ocho partes sino de *cuatro unidades divididas en dos partes* (el alumno usa el esquema asimilador construido para los números naturales y contando las partes que quedan obtiene el ocho) El error, que consideramos inducido desde la enseñanza, ha consistido en no poder pensar un único todo (la unidad) dividido en ocho partes, del que se sacan tres partes. Nada más y nada menos, que el concepto básico de fracción: la relación partes-todo. ¿Por qué consideramos que está inducido desde la enseñanza? Porque hemos encontrado en cuadernos y carpetas, presentaciones que obstaculizan la construcción de esa idea, por ejemplo: operaciones sobre una *misma* unidad se enseñan representadas en *distintos* enteros, como en el siguiente caso extraído de una carpeta escolar de 6° Año, en el que se le regala ¼ de chocolate a Juan y 2/4 de chocolate a Mario:



Le regalo ¼ a Juan

Le regalo 2/4 a Mario

Posiblemente muchos niños logren entender que aunque se representan dos unidades, en realidad estamos hablando de un solo chocolate (una unidad). Pero este gráfico obstaculiza la comprensión de que la *unidad se mantiene estable a pesar de que se opere con sus partes*. En síntesis, hemos detectado que *la doble o triple representación de la unidad por cada operación que se realiza con sus partes, se constituye en un obstáculo para que el alumno construya el concepto de fracción en su nivel básico, como relación parte-todo* que sería el subconstructo del concepto global de fracción.

En las recomendaciones actuales se ha considerado necesario enseñar las fracciones desde todas las perspectivas, y en todas las interpretaciones posibles (Pujadas y Eguiluz, 2000; Llinares y Sánchez, 1997), es decir presentarlas como un megaconcepto lo que implica concebir diversas situaciones y contextos y distintas interpretaciones que subyacen en ese megaconcepto:

a.- La fracción como un *todo* dividido en *partes* y sus relaciones (3/4 de la barra de chocolate); b.- la fracción como cociente (dividir tres barritas entre cuatro personas, es decir 3÷4).

El contexto, entonces, es una acción de *reparto.* Llinares y Sánchez (1997) explicitan que para el niño, resulta muy difícil concebir la diferencia entre tomar *partes* de un *todo* y repartir uno o varios *todos,* como sería repartir 3 chocolates entres 4 personas; sin embargo, preconizan la aprendizaje a través de las distintas interpretaciones de la fracción)

c.- la fracción como razón;

d.- la fracción como operador.

Esto nos estaría señalando que existe un mismo ente matemático que se usa para diversas situaciones y contextos. En la actualidad, se ha concebido que para que el niño consiga una comprensión amplia del concepto de fracción se le deben plantear experiencias con *la mayoría de las interpretaciones* mencionadas. Pero además, dentro de cada una de ellas se introducen múltiples construcciones conceptuales. Así, por ejemplo, se enseña simultáneamente la fracción como *relación parte-todo:*

a.- en *cantidades continuas* (entendidas como *superficies*: torta, campo, pizza, etc., pero también como *líquidos*: agua, leche, jugos; y en este sentido entra a jugar el concepto de *medida de capacidad,* pero no sólo usando la unidad convencional (litro), sino haciendo medir los líquidos con vasos u otros recipientes) y

b.- en *cantidades discretas*, (como objetos, bolitas, caramelos, etc.). Pero, además, empleando también medidas de peso (1 Kg de papas, naranjas, etc.)

La compleja presentación de las fracciones se aumenta con esta enorme mezcla de conceptos, a la vez que desaparecen las antiguas categorías de números mixto, fracciones propias e impropias porque se incluyen (todas juntas) como casos de fracciones. Además, se trabaja simultáneamente con números decimales, medidas de tiempo, capacidad, longitud, superficie, peso, volumen, etc.; las representaciones gráficas de las fracciones se complejizan con el uso de la recta numérica y con imágenes de figuras geométricas de todo tipo. Se les presenta también, la noción de fracción como cociente en contextos de reparto, en fin, una dispersión de casos, que complejiza la construcción del concepto, sin aportes a su consolidación. Se lo menciona a Piaget (1973), pero se olvidan sus estudios sobre la construcción de los conceptos de cantidad, peso, volumen, etc. Se lo menciona a Vigotsky (1964) aunque no se refieren a sus estudios detallados sobre la construcción de conceptos.

> Nuestros estudios experimentales confirman ampliamente esta tesis básica…el significado de la palabra está sujeto a un proceso evolutivo; este enfoque debe reemplazar al postulado de la inmutabilidad de los significados…El pensamiento verbal se eleva de las generalizaciones primitivas a los conceptos más abstractos. No cambia sólo el contenido de la palabra, sino el modo en que se generaliza la realidad y se refleja a través de la palabra (Vigotsky, 1964:134)

Sus estudios, que se apoyan también en la teoría del gran pedagogo ruso Tolstoi, fueron seguidos desde la investigación por Luria (1984) quien afirmaría en su último libro: "en cada etapa del desarrollo del niño la palabra, aun conservando la misma referencia objetal, adquiere nuevas estructuras semánticas, cambia y se enriquece el sistema de enlaces y de generalizaciones que están encerrados en ellas, lo que quiere decir que "el significado de la palabra se desarrolla" (1985: 56)

Las investigaciones desde la psicología, pedagogía y neurolingüística están demostrando que los conceptos no se construyen en toda su complejidad desde el primer momento, sino a través del desarrollo. Y para toda la escuela sociohistórica, la instrucción tiene un fuerte impacto en dicho desarrollo al punto que Vigotsky afirmaría: "Descubrimos que la instrucción precede al desarrollo" (1964: 116)

Pero las didácticas especiales de la matemática, en el caso que nos ocupa, no han tomado en cuenta estas investigaciones. No sólo el significado de la palabra fracción, en todas sus interpretaciones, es complejo. También es complejo el subconstructo relación parte -todo, la fracción indicando "la relación entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios *todos*)" (Llinares y Sánchez, 1997: 55) El aprendizaje de este concepto implica el desarrollo de distintas habilidades:

- Tener interiorizada la noción de inclusión de clases(según terminología de Piaget);

- La identificación de la unidad (qué todo es el que se considera como unidad en cada caso concreto);

- Las de realizar divisiones (el todo se conserva aun cuando lo dividamos en trozos, conservación de la cantidad) y

- Manejar la idea de área (en el caso de las representaciones continuas). (Llinares, Sánchez, 1997: 55 y 56)

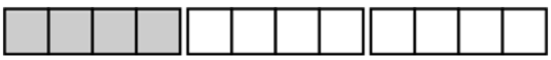
En realidad Piaget (1973) no se refería a *noción* de inclusión de clases como señalan Llinares y Sánchez en la primera habilidad descripta, sino a *operación*, conceptualmente muy diferentes. Para Piaget, debajo de cada *noción* hay una *operación* y no son dos conceptos equivalentes. Debajo de la *noción* de π hay una *operación* que resulta de la interiorización de la *acción efectiva* de trasladar 3,1415… veces el diámetro sobre la circunferencia. De ahí la importancia de la acción para construir la operación. Debajo de la *noción* de número están las *operaciones de seriar* (ordenar de mayor a menor o viceversa; un número 4 es a la vez, menor que cinco y mayor que tres, ocupa un lugar en la serie, lo que permitirá construir el número como ordinal: cuarto lugar, por ejemplo) y *clasificar* (hacer inclusión de clases: tengo 20 flores de las cuales 12 son crisantemos y las restantes son rosas; o 18 lilas y 2 alelíes. El todo se mantiene estable a pesar de las manipulaciones de las partes)

En síntesis, estoy señalando, a diferencia de los autores, que el estudiante construye la noción de número cuando:

> descubre la constancia de la cantidad pero además puede realizar dos operaciones y establecer la síntesis de ellas: la clasificación y la seriación. La inclusión de las partes en el todo implica que “los elementos aislados de una cantidad continúan siendo partes de la misma cantidad cualquiera sea la organización de las mismas” (Piaget, 1963). Y que esa cantidad permanece constante mientras se opera con las partes. La construcción de la fracción estaría requiriendo las mismas condiciones que las de la construcción del número natural (seriar- clasificar) pero a partir de su reconstrucción en un plano superior de organización, que contenga las características propias del número racional: por ejemplo, mientras que entre un número natural y el siguiente no hay otro número, entre un número racional y otro habría infinitos. Por eso, para construir el número fraccionario deberá poder realizar las dos operaciones, ordenar fracciones de mayor a menor (seriar) e incluir las partes en el todo (Pruzzo, 2007: 70)

El siguiente registro empírico muestra otra forma de pensar, también obstaculizada por la representación que hemos criticado:

Tengo ¾ de chocolate y me como ¼ ¿Cuánto chocolate me queda? Representar gráficamente. Protocolo 9 (C2)



Quedan ocho chocolates

Si se intenta seguir el pensamiento del adolescente podemos inferir que concibe los ¾ como tres unidades divididas en cuatro partes y para representar el ¼ que se ha comido, sombrea las 4 partes de un entero y aplicando el conteo con números naturales obtiene ocho partes que lo llevan a responder “Quedan ocho chocolates”. Cuando el alumno no ha asimilado el concepto de número fraccionario recurre al empleo de los esquemas asimiladores anteriores (el número natural). Mágicamente un chocolate se ha convertido en ocho chocolates. ¿Jóvenes desatentos o una enseñanza que obstaculizó con simultaneidad de conceptos y con gráficos inadecuados la construcción del chocolate como una unidad estable del que se han comido ¼ primero y ¼ después? Los estudiantes, no pueden construir la representación elemental del número fraccionario (relación partes-todo), ni tampoco su expresión simbólica, en la que el denominador representa las partes en que está dividida la unidad y el numerador las partes que se toman. Surge entonces la pregunta sobre las actuales tendencias de la enseñanza que presentan simultáneamente a los niños el número fraccionario a la vez como una partición, reparto y medida, tanto con cantidades continuas (chocolates, pizza, etc.) como con cantidades discontinuas (figuritas, caramelos, etc.): ¿se está evaluando si la gran mayoría de los alumnos logran aprender?

Según nuestro corpus empírico, la mayoría de los estudiantes no han construido el número fraccionario en ninguna de las perspectivas.

El protocolo 9 (C 12) es otro de los errores post instruccionales que hemos detectado.

¾ 1/4 Quedan 4 chocolates

En este caso se representan tantas unidades como operaciones se plantean, pero al encontrarse con una operación de resta necesita recurrir a sus esquemas asimiladores previos y usa el conteo de las partes blancas llegando a la conclusión de que le quedan cuatro chocolates. Evidentemente ha desaparecido la relación partes-todo. Con el mismo razonamiento pueden llegar a otra respuesta como en el siguiente caso: Protocolo 11 (C 23)

Me queda 4/4

También en este caso se dibujan tantos enteros como operaciones y al momento de leer lo que le queda, recurre al conteo y le da cuatro partes; al representarlo como número fraccionario obtiene 4/4, es decir una unidad, más de lo que tenía en un inicio.

Sin embargo, hay alumnos que han resuelto bien las situaciones problemáticas y por lo tanto, reconocemos que se puede aprender con el sistema descripto aunque alertamos acerca de los obstáculos que provoca en muchos estudiantes esta forma de enseñanza.

b.- La comparación de fracciones

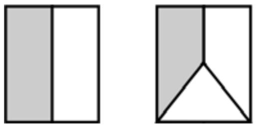
La comparación de fracciones entre sí, para establecer cuál es mayor, menor o igual a otra, (que activa la operación de seriar) figura entre los aprendizajes prioritarios establecidos por el CFE en 4° Año del primario. El 82% de alumnos de 1° Año no ha podido demostrar gráficamente la relación de comparación establecida entre dos fracciones, como en los siguientes testimonios:

Protocolo 9 (C8) *Compara las dos fracciones y coloca igual, mayor o menor. Representar gráficamente*

1/2 2/3

Tal como en la mayoría de los casos evaluados, las fracciones comparadas no mantienen estables la unidad, representadas incluso con formatos diferentes.

Aun cuando algunos estudiantes logran preservar estables las unidades que se comparan, surgen otros obstáculos como la representación de las partes a través de combinaciones de diferentes de figuras geométricas.

Protocolo 23 (C3)  1/2 < 2/3

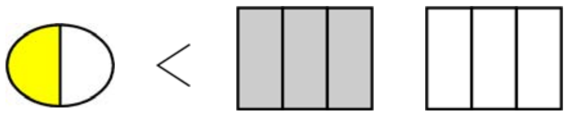
Este protocolo mantiene estable las unidades a comparar, pero contaminado con las nuevas formas de representación que traen los manuales actuales (con proliferación de formas geométricas) el alumno pierde el concepto de que las partes deben mantenerse congruentes (equivalentes como cantidad de superficie)

Otra forma de pensar la situación se infiere a partir de un error en la representación de la comparación. Protocolo 6 (C 20)*: 1/2 < 2/3*

1/2  2/3

En este caso el alumno grafica, primero, la fracción ½; al representar los 2/3 dibuja dos enteros a partir del 2 que figura como numerador y colorea tres partes según el denominador. Si bien escribe el signo “menor” arribando al resultado correcto: ½ es menor que 2/3, el gráfico demuestra la forma errónea de pensar las fracciones. La concepción de “menor” se corresponde a la apreciación perceptiva (menos espacio ocupado) y no a una construcción operativa.

El siguiente ejemplo, muestra dos de los errores posinstruccionales juntos. Las unidades que se comparan son totalmente distintas y en lugar de un entero, se representan tantos enteros como el número de su numerador.

Pr. 22 (C5) 

En síntesis, observamos lagunas de aprendizaje y errores conceptuales cuya máxima expresión señala que el 82% de los estudiantes del secundario no ha podido construir aprendizajes prioritarios de 4º (grado) del nivel primario:

- *Comparar, entre sí y con números naturales, fracciones… a través de distintos procedimientos.*

- *Sumar y restar cantidades expresadas con fracciones… utilizando distintos procedimientos y representaciones* (NAP, CFCyE, MCECyT, 2005: 18)

¿Por qué no han aprendido nuestros estudiantes? Mientras especialistas y docentes centran responsabilidades en los adolescentes actuales, impactados por las transformaciones aceleradas de la cultura en un contexto posmoderno que los ancla en el presente con una actitud de indiferencia, abulia, desatención, etc., los datos empíricos están sosteniendo nuestra hipótesis acerca de que la enseñanza irrelevante, que no sigue las construcciones de los alumno por la evaluación continua y longitudinal, provoca lagunas de aprendizaje y errores conceptuales que pueden, por eso mismo, ser revertidos.

LA ENSEÑANZA IRRELEVANTE DE LAS FRACCIONES

Resulta indudable que los docentes enseñan las nociones que hemos analizado, pero los desempeños de los alumnos de 1° años ponen de manifiesto tres cuestiones: 1.- luego de tres años de trabajar el concepto de fracción, la noción no ha sido aprendido por más de la mitad de los estudiantes evaluados. 2.-La enseñanza en las escuelas sigue las recomendaciones acerca de la presentación simultánea de los diversos casos de fracciones, agregando formas alternativas de medir peso, capacidad y volumen y perdiendo un atributo fundamental del concepto: la existencia de una unidad (o varias) que se dividen o reparten. 3.- La enseñanza no ha empleado la evaluación como custodia del aprendizaje, por lo que no pudo brindarse a los estudiantes posibilidades de reconstruir errores.

La discusión acerca de la presencia de los números fraccionarios entre los contenidos del nivel primario a partir de 4º año, se ha mantenido a través del último siglo. Según Llinares y Sánchez García (1997) hay tantos defensores como oponentes a que estos contenidos se desarrollen en la escuela primaria y llega a la conclusión de que falta investigación que dilucide esas cuestiones. Nosotros agregamos que falta también investigación didáctica centrada en la evaluación sostenida -que custodie el aprendizaje- y en la evaluación longitudinal que devele aprendizajes significativos o lagunas de aprendizajes. Es necesario que la investigación se centre en el derecho de aprender de nuestros alumnos más que en el derecho a enseñar de los docentes. La escuela, de lo contrario, se transformará en un gran centro de experimentación con nuestros niños y adolescentes.

Las nuevas orientaciones matemáticas en la enseñanza no se centran en perspectivas epistemológicas diferenciadas, como en el caso de la década del sesenta – setenta, cuando se incluyó la Matemática Moderna. Ahora lo que se cambia es la *secuencia en la enseñanza*. Hasta hace un tiempo, las fracciones se enseñaban en la perspectiva de relación parte - todo y específicamente con cantidades continuas. Fracción de una pizza, de un chocolate, una torta, etc. De esta manera se hacía más viable acceder a una representación de la unidad (una barra de chocolate entera) dividida en partes iguales (congruentes) Se usaban hojas cuadriculadas para que estas dos características se mantuvieran: *un único todo, dividido en partes iguales*. Después se pasaba a los números mixtos, las fracciones puras e impuras; etc. Esta secuencia ha sido drásticamente reemplazada por las distintas interpretaciones que los especialistas y capacitadores han difundido.

> …se nos presenta la necesidad de plantear los procesos de enseñanza aprendizajes desde todas sus perspectivas, <u>en todas sus interpretaciones posibles,</u> para que un trabajo continuado con dichas interpretaciones ayude al niño a conseguir una comprensión conceptual (operativa) de la idea de fracción, sin crear "agujeros conceptuales". Una vez determinada esta necesidad se plantea la tarea de identificar las diferentes interpretaciones, contextos, en los que aparezca el concepto de fracción: la fracción como megaconcepto (Llinares y Sánchez.1997: 54) El subrayado es nuestro.

Para que no queden "agujeros conceptuales", según la perspectiva de las autoras, hay que enseñar las fracciones en todas sus interpretaciones, como partición, como cociente, como razón, como operador, para construir el megaconcepto. Pero no se ha tenido en cuenta que si se encara simultáneamente esta complejidad, los estudiantes pueden llegar a construir sólo *agujeros conceptuales*. Sin embargo, a pesar de la defensa de la presentación simultánea de las distintas interpretaciones, Llinares y Sánchez presentan una clara secuenciación de contenidos**:**

Las primeras actividades deben estar dirigidas únicamente a que:

- *los niños puedan identificar la unidad;*
- *poder realizar divisiones congruentes;*
- *contar el número de partes en que se divide el todo, y*
- *en darse cuenta que el número de divisiones no da el número de partes, ni por lo tanto la fracción. Los niños tienen dificultades inicialmente en relación a este aspecto* (LLinares y Sánchez, 1997:99).

Pero, esta secuenciación no aparece en las carpetas analizadas. Aún así, lo que más llama la atención, es el reemplazo de las acciones de los niños, por las representaciones gráficas y los problemas verbalizados. Piaget, en este sentido había alertado al hablar sobre la Didáctica de la matemática:

> el matemático no acostumbrado a la psicología puede temer en todo ejercicio concreto un obstáculo para la abstracción, mientras que el psicólogo está habituado a distinguir cuidadosamente la abstracción a partir de los objetos (origen de la experiencia física, extraño a la matemática) y la abstracción a partir de las acciones, origen de la deducción y de la abstracción matemática [...] Tampoco hay que confundir lo concreto [...] con las presentaciones intuitivas en el sentido de figurativas, ya que las operaciones nacen de las acciones y no de configuraciones perceptivas o imaginadas. (1985: 58)

Estas cuestiones pedagógicas se han desatendido, con lo que se deja al niño en el ámbito de las configuraciones perceptivas, sustrayéndolo de la acción que le permitiría construcciones operativas. A la vez, las tareas de las docentes se basan en recomendaciones de especialistas que diseñan actividades de suma vaguedad pedagógica. Pujadas y Eguiluz (2000) presentan problemas con estas características, por ejemplo el caso siguiente, planteado a partir de un rectángulo y un triángulo dibujados por separado: "¿Qué parte es el triángulo del rectángulo?... Note el lector que la parte (triangular) no tiene que estar "metida" en el todo, ni es imperioso que estén señaladas las líneas que ayudan a visualizar cuántos triángulos de los blancos cubren el rectángulo" (20).

Por lo tanto, se pide al niño que imagine "desplazamientos" y "rotaciones" de una figura externa en otra. Piaget (1985), tan crítico al sensual empirismo, le hubiera adelantado a las autoras que la visualización como cualquier percepción no ayuda a la construcción de la noción que, en realidad, depende de la acción que luego se interioriza en operación. Esta noción no se debería presentar a través de imágenes sino que se debería construir a partir de la acción de superponer un triángulo recortado sobre la superficie del cuadrado. El "ejercicio operatorio" le permitiría interiorizar la acción con lo que posteriormente podría operar con desplazamientos de figuras. Pero la vaguedad pedagógica a que nos referimos, permite que las docentes enseñen usando directamente esos gráficos. Nos problematiza el hecho de que teniendo el estudiante tres años del primario para construir la noción de fracción, no se aprovecha el principio de la recurrencia que permite la construcción progresiva de los conceptos cada vez hacia mayores niveles de complejización. Cada noción, decía Piaget (1985) tiene una historia, la de su construcción progresiva en el tiempo. Y en este sentido entendía el tiempo como secuencia y como duración: los niños construyen primero la conservación de la sustancia y después la conservación del peso (secuencia), por ejemplo. También, según Piaget, le lleva al niño entre 6 o 7 años la construcción del número (duración). Los didactas hemos asimilado esta idea a la de una enseñanza relevante que tiene en cuenta la variable "tiempo" –como secuencia y como duración– para el aprendizaje significativo de los alumnos.

Finalmente, otro aspecto polémico resulta de la presentación -por parte de los especialistas argentinos- de los aportes didácticos de los franceses como verdades indubitables, sin aportar las discusiones esclarecedoras que mantienen los autores y que podrían motorizar investigaciones comparativas. Por ejemplo, Brissiaud (1989) hace valiosas críticas a la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y a su orientación piagetiana, mientras preconiza la necesidad de incluir mediadores (regletas Cuisenaire; regletas con tapas, por ejemplo) considerados instrumentos psicológicos según la teoría de Vigotsky. Mientras uno aboga por situaciones adidácticas desdibujando la presencia del docente, el otro redimensiona su rol para incidir en la zona de desarrollo próximo. Mientras uno presenta una didáctica de marcado entorno técnico con fases metodológicas universales, el otro busca apoyos instrumentales para que, por la interacción, los niños construyan los conceptos. Estas diferencias entre autores de tanto prestigio, debe mover a la indagación cuidadosa más que a la generalización de sus propuestas en las aulas de todo el país. Finalmente, nos parece fundamental presentar la postura de un renombrado especialista en matemáticas de la Universidad de Nueva York, criticando la imposición de las matemáticas Modernas en la década del sesenta, ya que nos arriesgamos a pasar por la misma situación:

> Si se les pide que asimilen y reflexionen críticamente sobre resultados a los que los matemáticos han tardado dos mil años en llegar, los estudiantes se sentirán abrumados, y en lugar de pensar se darán por vencidos. Enfrentar a los estudiantes jóvenes con la formulación matemática sofisticada de ideas básicas es como pedir a los alumnos de un kindergarten que critiquen un trabajo de filosofía… A cada edad le basta con su propio rigor. Y por edad se entiende la edad del estudiante (Kline, M, 1979:187)

CONCLUSIONES

Más de la mitad de los estudiantes de Nivel Medio de nuestra muestra de 433 alumnos no han logrado aprender saberes priorizados por el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación para el nivel primario. Por lo tanto, hemos detectado lagunas de aprendizajes que debieron construirse en 4ºAño y han estancado a los alumnos en esquemas asimiladores previos (los números naturales). Pero además hemos constatado errores inducidos desde una enseñanza que ha resultado irrelevante por tres cuestiones: la presentación global del macroconstructo de fracción que ha impedido construir los atributos básicos de ese concepto (la unidad que se parte o reparte en partes congruentes); la abrumadora presencia de configuraciones perceptivas que ha reemplazado a la acción por la percepción, y la carencia de la evaluación como custodia del aprendizaje, que impide el empleo constructivo del error. Las prescripciones de los especialistas, tanto en la formación como en la capacitación docente, sobre la forma de presentación global y simultánea de las distintas dimensiones del concepto de fracción como número racional, no han sido seguidas por investigación sobre los aprendizajes construidos. Por eso sería tan importante investigar sobre los efectos de las innovaciones, para evitar transformar a los alumnos en sujetos experimentales de teorías cuyos efectos se suponen, pero no se han comprobado. La situación es lo suficientemente grave para que comencemos a preservar el derecho a aprender de nuestros estudiantes limitando el derecho a enseñar dentro de los espacios en que no perjudique a los estudiantes.

La investigación se vuelve en este momento un eje fundamental en la preservación del acceso a los conocimientos legitimados por la sociedad lo que evitaría el monopolio del saber en unos pocos, con el concomitante fracaso y la exclusión de otros, condenados en una nueva vestimenta de la injusticia social.

BIBLIOGRAFÍA

Aëbli, Hans. *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Buenos Aires: Kapelusz. 1973.

Brissiaud, Rémi. *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos.* Madrid: Aprendizaje Visor. 1993.

Brousseau, Guy. "Los diferentes roles del maestro" en Parra Cecilia y Saiz, Irma (Comps.) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós. 1994.

Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal. 2007.

Filmus, Daniel. "Presentación" en Consejo Federal de Cultura y Educación. Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología*. Núcleos de Aprendizajes Prioritarios*. Buenos Aires, Argentina. 2005.

Giordan, Andre. *Los orígenes del saber: de las concepciones personales a los conceptos científicos*. Sevilla: Diada Editores.1995.

Inhelder, Barbel. *Aprendizaje y estructuras del conocimiento*. Madrid: Morata. 1975.

Itzigsohn, José. "Prólogo" en Vigotsky, Lev. *Pensamiento y Lenguaje.* Buenos Aires: Editorial Lautaro. 1964.

Kammi Constance. *El número en la educación preescolar*. Madrid: Visor. 1992.

El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget. Madrid: Aprendizaje Visor. 2000.

Kline, Morris. *El fracaso de la matemática moderna: Por qué Juanito no sabe sumar.* México: Siglo XXI Editores. 1979.

Luria, Alexander. *Conciencia y Lenguaje.* Madrid: Aprendizaje Visor. 1984.

Luria, Alexander; Leontiev, Alekéi; Vigotsky, Lev. *Psicología y Pedagogía.* Madrid: Akal. 2004.

Llinares Ciscar, Salvador y Sánchez García, María Victoria. *Matemáticas: cultura y aprendizaje. Fracciones, N°4.* Madrid: Editorial Síntesis. 1992.

NAP (Núcleos de aprendizajes Prioritarios) Consejo Federal de Cultura y Educación. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Buenos Aires: MECyT. 2005.

Parra Cecilia y Saiz Irma (comps.) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós. 1994.

Piaget, Jean. "Psicología de la Primera Infancia" en Katz, David. *Manual de Psicología.* Madrid: Morata. 1963.

Estudios de Psicología Genética. Buenos Aires: Emecé Editores. 1973.

Psicología de la Inteligencia. Psique: Buenos Aires. 1984.

Psicología y Pedagogía. Buenos Aires: Sudamericana-Planeta. 1985.

Prefacio en Comenio J. A. Páginas Escogidas. Buenos Aires: AZ Editora. ORCALC Ediciones UNESCO. 1996.

Ponce, Héctor. *Enseñanza y aprendizaje matemático. Propuestas para el 2° Ciclo.* Buenos Aires: Novedades Educativas. 1999.

Pruzzo de Di Pego, Vilma. *La biografía del fracaso.* Buenos Aires: Editorial Espacio. 1999.

"Las prácticas de la enseñanza que dificultan la comprensión" en *Anuario de la Facultad de Ciencias Humanas*. UNLPam. 2004, Año VI, Nº 6, Buenos Aires.

Evaluación Curricular: Evaluación para el aprendizaje. Una propuesta para el Proyecto Curricular Institucional. Buenos Aires: Editorial Espacio. 2006.

"Las tensas relaciones entre Didáctica y las Didácticas" en *Revista Praxis Educativa.* 2007, Año 11, N°XI, Buenos Aires: Miño y Dávalos.

Pruzzo, Vilma y Nosei, Cristina. "Alumnos que no aprenden Historia: ¿Problema de la Didáctica?" en *Revista Praxis Educativa.* 2008, Año XII, Nº 12. Buenos Aires: Miño y Dávalos.

Sadovsky, Patricia; Vergnaud, G. *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas. 1991.

Vergnaud, Gérard. *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas. 1991.

Vigotsky, Lev. *Pensamiento y Lenguaje.* Argentina: Editorial Lautaro. 1964.