Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral

Towards a field of social practices as foundation to redesign the scholastic discourse of integral calculus

Germán Muñoz-Ortega

RESUMEN

Partimos de una problemática que consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en la enseñanza del Cálculo integral. Para atender la problemática de acuerdo a su naturaleza, nos apoyamos en la aproximación teórica llamada socioepistemología así como también nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales. Con base en lo anterior presentamos una especie de *campo de prácticas sociales* organizado alrededor de tres ejes: *predicción, acumulación y constantificación de lo variable*. Ha sido necesario construir el campo, en la medida de lo posible, desde diversos planos: la génesis histórica, la génesis contemporánea y la génesis artificial. Para finalizar, argumentamos sobre la viabilidad de considerar a las *prácticas sociales* como *unidad de análisis* para rediseñar el discurso matemático escolar, en particular del Cálculo integral. De manera que la *predicción* (inmersa en un *campo de prácticas sociales*) por su naturaleza va entretejiendo los conocimientos sin una frontera rígida entre conceptos, sin un orden lineal, y que trasciende el dominio de la matemática.

PALABRAS CLAVE:

- *Predicción*
- *Cálculo Integral*
- *Campo Conceptual*
- *Acumulación*
- *Práctica Social*

ABSTRACT

We start with a problem which is the separation between the conceptual and algorithmic in the teaching of integral Calculus. Thus, to address the problem according to its nature, we rely on the theoretical approach called socioepistemology helped us as well as the theory of the conceptual fields. Based on the above we present a field of social practices organized in the order of three areas: *prediction, accumulation and constancy of what is variable*. It has been necessary to build the field, to the extent possible, from different levels: the historical genesis, the contemporary genesis and the artificial genesis. In conclusion, we argue about the feasibility of treating *social practices* as the *unit of analysis* for the redesign of the school

KEY WORDS:

- *Prediction*
- *Integral Calculus*
- *Conceptual Field*
- *Accumulation*
- *Social Practice*

mathematical discourse, in particular the integral Calculus. So, the *prediction* (immersed in a *field of social practices*) is by its nature interweaving knowledge without a rigid boundary between concepts without a linear order, and that transcends the domain of mathematics.

RESUMO

Nós partimos de uma problemática que consiste na separação entre o conceptual e lo algorítmico no ensino do Cálculo integral. Para atender a problemática de acordo a sua natureza, nos apoiamos na aproximação teórica chamada socioepistemología assim como também nos auxiliamos da teoria dos campos conceituais. Com base no anterior apresentamos uma espécie de campo de práticas sociais organizada cerca de três eixos: *predição, acumulação e constantificación do variável*. Foi necessário construir o campo, na medida do possível, desde diversos planos: a gênese histórica, a gênese contemporânea e a gênese artificial. Para concluir, nós discutimos sobre a viabilidade de considerar às *práticas sociais* como *unidade de análise* fazer novo desenho a fala escolar matemática, em particular do Cálculo integral. De forma que a *predição* (imersa em um *campo de práticas sociais*) para sua natureza vai entrelaçar o conhecimento sem uma fronteira rígida entre conceitos, sem uma ordem linear, e que transcende o domínio da matemática.

PALAVRAS CHAVE:

- *Predicão*
- *Cálculo Integral*
- *Campo Conceitual*
- *Acumulação*
- *Prática Social*

RÉSUMÉ

Nous partons des problèmes qui consistent en séparation entre le conceptuel et l'algorithmique en enseignement du Calcul intégral. Pour s'occuper des problèmes conformément à sa nature, nous nous appuyons sur l'approche théorique soi-disant la l'*socioépistémologie* ainsi que nous nous aidons aussi de la théorie des champs conceptuels. Avec base dans le précédent nous présentons une espèce de champ de pratiques sociales organisé autour de trois axes: *prédiction, accumulation et constantification de ce qui est variable*. Il a été nécessaire de construire le champ, autant que possible, depuis de divers plans: la genèse historique, la genèse contemporaine et l'artificielle genèse. Pour prendre fin, nous argumentons sur la viabilité de considérer aux *pratiques sociales* comme *unité d'analyse* pour redessiner le discours mathématique scolaire, en particulier du Calcul intégral. De manière que la *prédiction* (immergée sur un *champ de pratiques sociales*) par sa nature entrelace les connaissances sans une frontière rigide entre des concepts, sans un ordre linéaire, et qu'il filtre la domination des mathématiques.

MOTS CLÉS:

- *Prédiction*
- *Calcul Intégral*
- *Champ Conceptuel*
- *Accumulation*
- *Pratique Sociale*

1 Introducción

Una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. No reducimos *lo conceptual* a los conceptos o a la definición del concepto sino más bien lo conceptual lo entendemos en un sentido amplio como todo lo asociado a ideas, nociones, pensamientos, concepciones, conceptos, estructuras, objetos mentales, semántica de los sistemas simbólicos, significados, teorías. Por otro lado no reducimos *lo algorítmico* a los algoritmos sino más bien lo consideramos en un sentido amplio como todo lo asociado a métodos, reglas, procesos, operaciones, técnicas, procedimientos algorítmicos, procedimientos no algorítmicos, algoritmos, sintaxis de los sistemas simbólicos, significantes. También, *lo conceptual y lo algorítmico* asociados al Cálculo integral, en su sentido amplio están impregnados por elementos culturales, históricos e institucionales.

La problemática la hemos atendido desde una aproximación socioepistemológica entendida como epistemología de las prácticas sociales relativas a la producción y difusión del saber científico a través de una visión sistémica de las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural (Cantoral, 2004). La visión socioepistemológica nos permite aproximarnos a la problemática desde diversos planos: la génesis histórica, la génesis contemporánea y la génesis artificial (Muñoz, 2006a).

En la dimensión epistemológica, en el plano de la *génesis histórica*, encontramos una evidencia de la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico en el contexto del marco epistémico de Newton que implica centrarse en la *predicción* en tanto práctica social (Cantoral, 1990; Cantoral, 2001; Piaget y García, 1994; Muñoz, 2006b). En la dimensión cognitiva, en el plano de la *génesis contemporánea*, construimos un *campo conceptual* del Cálculo (Muñoz, 2005b; Muñoz, 2006a) apoyado en una perspectiva del Cálculo integral centrado en la *acumulación* (Cordero, 1994; Cordero, 2003) y en la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1990a; Vergnaud, 1990b; Vergnaud, 1998). Dicho campo conceptual está fundamentado en determinadas prácticas sociales, organizadas inicialmente alrededor de dos ejes: *la predicción y la acumulación*. En la dimensión didáctica, en el plano de la *génesis artificial*, tratamos de desentrañar las condiciones para propiciar la relación dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico en escenarios socioculturales específicos en donde se usa Cálculo integral (Muñoz, 2007; Muñoz, 2008).

Nuestros hallazgos sostienen por un lado la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico y por otro su carácter relativo respecto a prácticas sociales asociadas al Cálculo integral en un contexto sociocultural específico. Sostenemos lo anterior desde las dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica y vertebradas en su conjunto por la dimensión sociocultural en donde tomamos como *unidad de análisis* a la práctica social de *predecir* inmersa en un *campo de prácticas sociales* (Muñoz, 2006a).

Nuestras investigaciones se ubican dentro de los esfuerzos para desarrollar una aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa cuyo objetivo fundamental consiste en rediseñar el discurso matemático escolar con base en prácticas sociales específicas, por ejemplo, la *predicción* de la evolución de fenómenos de variación (Alanís, 1996; Cantoral, 2001; Cordero, 2003; Hernández, 2006; Marcolini y Perales, 2005; Muñoz, 2007; Ramos, 2005).

❷ Dimensión epistemológica: génesis histórica de la predicción

Para abordar la problemática fue necesario matizarla en dos posibles preguntas: ¿La separación es originada por ciertos factores del funcionamiento del sistema didáctico? o ¿Existe esa separación en el origen y desarrollo histórico del Cálculo integral?

La perspectiva histórica considerada toma en cuenta los cambios de marco epistémico[1], es decir, la reformulación de preguntas cruciales (que han vivido en prácticas sociales y cosmovisiones asociadas) a través de las cuales el Cálculo integral se ha desarrollado.

Analizamos antes del siglo XVII, por ejemplo, tanto Arquímedes como Aristóteles fueron algunos de los científicos que más influyeron en la época. Señalamos sólo algunos hechos relacionados con los elementos del Cálculo integral. Cuando Aristóteles estudió el movimiento de los cuerpos el marco epistémico considerado fue: ¿Cuáles son las *causas reales* del movimiento? (Piaget y García, 1994). Pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión donde *el estado natural de las cosas era el reposo*[2]. Dicho marco Griego originó

1 “...en cada momento histórico y en cada sociedad, predomina un cierto marco epistémico, producto de paradigmas sociales y epistémicos. Una vez constituido un cierto marco epistémico, resulta indiscernible la contribución que proviene de la componente social o de la componente intrínseca al sistema cognoscitivo. Así constituido, el marco epistémico pasa a actuar como una ideología que condiciona el desarrollo ulterior de la ciencia. Dicha ideología funciona como obstáculo epistemológico que no permite desarrollo alguno fuera del marco conceptual aceptado. Sólo en los momentos de crisis, de revoluciones científicas, hay una ruptura de la ideología científica dominante y se pasa a un estadio diferente con un nuevo marco epistémico...” (Piaget & García, 1994, p. 234).

2 En época paralela en la civilización China había una cosmovisión donde el estado natural de las cosas era el movimiento y por ende tenía sentido la pregunta: ¿Cuáles son las causas reales del reposo? (García, 2000).

descripciones cualitativas del movimiento (fenómeno de variación), es decir, no se generaron procedimientos para cuantificar el movimiento simplemente porque no era parte de su marco epistémico.

Mientras que Arquímedes estudió algunos temas de geometría y su marco epistémico fue: ¿Cómo calcular el área de curvas geométricas (círculo, parábola, elipse, espiral[3]), con propiedades conocidas? Este marco originó descripciones cuantitativas del área de curvas geométricas (fenómeno de variación, ya que se consideraba a las curvas como generadas por un punto móvil que cambia de dirección continuamente). Arquímedes trató de evadir el infinito, por lo que hizo diversos cálculos de áreas, volúmenes, centros de gravedad, con su método ingenioso basado en la balanza física (Cantoral, 1983). En este caso, el marco epistémico permitió cuantificar algunas magnitudes (área, volumen, entre otras).

En los siglos XVII y XVIII se siguen estudiando los mismos fenómenos de variación (curvas geométricas, movimiento de cuerpos), pero con otros marcos. Así, Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? (Piaget & García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento*[4]. En dicho marco Galileo elimina las preguntas sobre *causas reales* que hacían referencia a cualidades (atributos) e introduce mediciones (*medir* es comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos).

El pasaje de atributos a relaciones implica una identificación de parámetros y su consiguiente cuantificación. Pero no sólo se trata de mediciones, sino que Galileo introduce el concepto de relación funcional entre las variables que caracteriza el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria; esto supone la introducción del tiempo como variable independiente.

En otro momento, el marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos fue: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget & García,

---

[3] Por algunos aspectos de su visión del mundo solamente el movimiento uniforme (rectilíneo o circular) era aceptado en sus estudios. Así, la espiral es definida en términos de la composición de un movimiento rectilíneo uniforme con un movimiento circular uniforme (Heath, 1953).

[4] En esta cosmovisión fue construido el principio de inercia y marcó el origen de lo que actualmente se conoce como la ciencia moderna (García, 2000).

1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento*. Así, el objeto fue *calcular* la evolución posterior del sistema de movimiento sin plantearse otras preguntas sobre las *causas reales* de él. Pero la evolución misma es calculada sobre la base de un sistema de transformaciones que permiten pasar de los valores de las variables en el estado inicial a los valores que adquieren en cualquier otro instante.

Esta transición de causas últimas a sistemas de transformación fue un paso decisivo en la historia de la mecánica, uno de los pilares sólidos de la revolución del siglo XVII, y significó una modificación profunda en la idea de la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos (Piaget & García, 1994). El hecho de que la pregunta sea *calcular la evolución posterior* implica cuantificar estados posteriores de cierta variable, en función de otra, a partir de las condiciones iniciales, es decir, *predecir* la evolución de un fenómeno de variación.

En este contexto aparece el sentido de la noción de *predicción* en tanto práctica social asociada al surgimiento del Cálculo y constituye una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en la génesis histórica del Cálculo integral (Muñoz, 2006a), que en cierta forma, se puede sostener debido al hecho siguiente: existe una relación muy estrecha entre la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor* asociado a un procedimiento de derivación sucesiva (Cantoral, 2001).

De manera que, la unión tan fructífera entre la matemática y la física, propias del siglo XVII y parte del siglo XVIII, sufrió una ruptura a partir del problema de la cuerda vibrante cuya solución tuvo consecuencias sobre el concepto de función (Farfán, 1997). En el siglo XVIII Leonard Euler (1707-1783) abandonó el estudio de curvas geométricas y fundó la ciencia de los infinitésimos sobre una teoría formal de funciones. De alguna manera, esto significó la ruptura entre un *Cálculo de variables* (físicas o geométricas), como inicialmente empezó, y un *Cálculo de funciones numéricas* (Cantoral, 1990, 2001; Cordero, 1994, 2003).

Tal ruptura posibilita un nuevo marco epistémico que fue delineado en la obra de Fourier: ¿Qué significado tiene la $\int f(x)\,dx$, donde $f(x)$ es una sucesión *arbitraria* de ordenadas? En este marco Cauchy (1789-1857) inició la construcción de una teoría de integración y escribió la definición de función continua (Cordero, 1994; Cordero, 2003). Luego construye su teoría de integración para funciones continuas. Una implicación de su definición es que $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene un valor determinado para cualquier función arbitraria continua; sin embargo, su definición se extiende al caso de una función acotada, con un número finito de puntos de discontinuidad en un intervalo, y para ciertas funciones con un número infinito de puntos de discontinuidad.

Después el marco epistémico de Riemann (1826-1866) consistió en lo siguiente: ¿Qué se entiende por $\int_a^b f(x)\,dx$, donde $f(x)$ es una sucesión *arbitraria* de ordenadas y además *densamente* discontinua? Y ¿en qué casos es una función integrable o no lo es? Como consecuencia de este marco epistémico, se reflexiona sobre el significado del *objeto* integral *per se* y no sobre los *usos* que el proceso de integrar proporcionaba en la matematización de la *predicción* (Hernández, 2006; Muñoz, 2006a; Ramos, 2005). Sin duda, en el siglo XIX se trata ya de un *Cálculo de funciones numéricas*, es decir, el objeto de estudio *ya no son las cantidades variables y su evolución futura* sino las funciones vistas como una sucesión arbitraria de ordenadas.

Así, en el período que abarca parte del siglo XVIII y el siglo XIX los marcos epistémicos ya no se refieren a los fenómenos de variación como en los períodos anteriores, lo cual generó el inicio de los procesos de *fundamentación del Cálculo* y la emergencia del *Análisis Matemático* en donde la *predicción* fue desvanecida (Cantoral, 2001; Cordero, 2003; Muñoz, 2006a). A partir de lo anterior formulamos la hipótesis: la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral se conserva al cambiar el marco epistémico (en tanto matriz de prácticas sociales) pero la naturaleza de dicha relación es distinta.

3 Dimensión cognitiva: reforma de la visión de los campos conceptuales

Como ya mencionamos, nuestra investigación se ubica dentro del acercamiento enfocado al *rediseño del discurso matemático escolar*, en particular del Cálculo integral. Sin embargo, por la naturaleza de la problemática, nos auxiliamos de la *teoría de los campos conceptuales*. Estas dos aproximaciones tienen un punto en común que consiste en no privilegiar a los conceptos matemáticos *per se* (Cantoral, 2001, 2004; Cordero, 2003, 2005; Vergnaud, 1990a, 1998).

A priori parece una contradicción intentar construir un *campo conceptual* de un concepto (la *integral*), pero esto es explicable por el desarrollo que ha tenido esta investigación ya que surgió a partir del concepto de *integral* y luego nos condujo al conjunto de situaciones problema que le dan sentido a dicho concepto. Sin embargo, una vez que tenemos el conjunto de situaciones problema y partimos de ellas para investigar las construcciones de los estudiantes cuando interactúan con una secuencia de situaciones problema, necesariamente están involucrados otros conceptos, por ejemplo, el de diferencial, razón de cambio, por citar algunos; lo cual elimina la aparente contradicción.

La razón que se tiene para estudiar la enseñanza y el aprendizaje de los *campos conceptuales*, esto es, conjuntos extensos de situaciones cuyo análisis y tratamiento dependen de varias clases de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están relacionadas unos con otros, es el hecho de que los conceptos matemáticos procuran su significado desde una variedad de situaciones, y de que cada situación usualmente no puede ser analizada con la ayuda de un solo concepto, sino que, más bien, requiere de varios de ellos (Vergnaud, 1990b).

De manera que la noción de campo conceptual se puede definir como: *un espacio de problemas o de situaciones problema cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos, de varios tipos, en estrecha conexión* (Vergnaud, 1981).

Respecto a nuestra problemática identificamos una condición necesaria para propiciar el enlace entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del Cálculo integral, que consiste en tener un problema específico por resolver que exija, requiera o implique una integración para hallar la solución (Muñoz, 2006a). La pregunta obligada es: ¿cuál es ese tipo de problemas?

Después de revisar algunos estudios de tipo epistemológico y cognoscitivo (Cantoral, 1990, 2001; Cordero, 1994, 2003; Piaget & García, 1994) y el análisis realizado desde la perspectiva histórica que considera los cambios de marco epistémico (ver apartado 2) nos permitió precisar, en cierto modo, el *tipo de problemas* que, al abordarlos, requieran o exijan de una integración, lo cual condensamos así:

> *Son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación. Estos problemas específicos no se refieren a las causas del fenómeno de variación (¿por qué varían?), sino al cuánto varían una vez que se reconoce cómo varía el fenómeno; es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica al fenómeno de variación (cantidad desconocida F(t) que relaciona funcionalmente a las variables involucradas). La configuración de esta ley depende de si son conocidas (primera categoría), o no (segunda categoría), las condiciones iniciales del problema específico.*

De cada categoría se derivan tres posibles situaciones, según la pregunta que se plantea en el problema específico derivado de un fenómeno de variación. Para la primera categoría, tres *situaciones*[5] posibles son:

(SA) $\boxed{F(t_0)} \xrightarrow{T} \boxed{F(t)=?}$ Relación funcional entre variables

(SB) $\boxed{F(t_0)} \xrightarrow{T} \boxed{F(t_n)=?}$ Número (Estado)

(SC) $\boxed{F(t_0)} \xrightarrow{T=?} \boxed{F(t_n)}$ Número (Transformación)

en donde:

SA = Situación A (*Predicción*)
SB = Situación B (*Predicción*)
SC = Situación C (*Acumulación*[6])
T = Transformación
$F(t_0)$ = Condición inicial conocida.

En las tres *situaciones* se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, *o* $F(t_n)-F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$).

Así, es posible analizar a cada una de las *situaciones* con las siguientes expresiones:

(SA): Predicción

$$*F(t_0)+\int_{t_0}^{t} F'(t)dt = F(t) \quad \textit{Antiderivación}$$

$$*F(t_0)+F'(t_0)(t-t_0)+\frac{F''(t_0)(t-t_0)^2}{2!}+\frac{F'''(t_0)(t-t_0)^3}{3!}+\ldots=F(t) \quad \textit{Derivación sucesiva}$$

5 El concepto de situación es tomado en el sentido del apartado sobre las situaciones del escrito La Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud (1990a); es decir, los procesos cognoscitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que se enfrenta.

6 Término analizado por Cordero (2003, 2005) para referenciar al cambio total de una cantidad que está variando continuamente y usado como una argumentación en la reconstrucción de significados del Cálculo integral.

(SB): Predicción

$$*F(t_0)+\int_{t_0}^{t_n}F'(t)dt=F(t_n)\quad \textit{Antiderivación}$$

$$*F(t_0)+F'(t_0)(t_n-t_0)+\frac{F''(t_0)(t_n-t_0)^2}{2!}+\frac{F'''(t_0)(t_n-t_0)^3}{3!}+\ldots=F(t_n)\quad \textit{Derivación sucesiva}$$

$$*F(t_0)+\sum_{i=0}^{n-1}F'(t_i)\Delta t\approx F(t_n)\quad \textit{Suma}$$

(SC): Acumulación

$$*F(t_n)-F(t_0)=\int_{t_0}^{t_n}F'(t)dt\quad \textit{Antiderivación}$$

$$*F(t_n)-F(t_0)=F'(t_0)(t_n-t_0)+\frac{F''(t_0)(t_n-t_0)^2}{2!}+\ldots\quad \textit{Derivación sucesiva}$$

$$*F(t_n)-F(t_0)\approx\sum_{i=0}^{n-1}F'(t_i)\Delta t\quad \textit{Suma}$$

Las tres *situaciones* abarcan a la llamada integración definida porque las condiciones iniciales del problema están dadas (Muñoz, 2006a).

Para la segunda categoría las tres *situaciones* son:

(SD) $\boxed{F(t_0)=C} \xrightarrow{T} \boxed{F(t)=?}$ Relación funcional entre variables

(SE) $\boxed{F(t_0)=C} \xrightarrow{T} \boxed{F(t_n)=?}$ Número (Estado)

(SF) $\boxed{F(t_0)=C} \xrightarrow{T=?} \boxed{F(t_n)}$ Número (Transformación)

en donde:

SD = Situación D
SE = Situación E
SF = Situación F
T = Transformación
C = Condición inicial desconocida.

En las tres *situaciones* se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, $o\ F(t_n)$-C según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$).

(SD):

$$*\, C + \int F'(t)dt = F(t) \quad \textit{Antiderivación}$$

(SE):

$$*\, C + \int F'(t)dt = F(t) \text{ y evaluar en } t_n \ \textit{Antiderivación}$$

(SF):

$$*\, F(t_n) - C = \int F'(t)dt \quad \textit{Antiderivación}$$

Así, es posible analizar a cada una de las *situaciones* con la siguiente expresión:

Estas tres *situaciones* abarcan a la integración indefinida porque las condiciones iniciales del problema no están dadas; de manera que *la predicción y la acumulación* son desvanecidas (Muñoz, 2006a).

Para las dos categorías se puede generar el siguiente conjunto de *clases de problemas*[7], dependiendo de cómo varía el fenómeno. Es decir, si la razón de cambio es constante

$$\left(\frac{dF(t)}{dt} = K, \text{ clase } 1\right),$$

o si depende de la variable independiente

$$\left(\frac{dF(t)}{dt} = f(t), \text{ clase } 2\right),$$

o si depende de la variable dependiente

$$\left(\frac{dF(t)}{dt} = f\big(F(t)\big), \text{ clase } 3\right),$$

o si depende de ambas variables

$$\left(\frac{dF(t)}{dt} = f\big(t, F(t)\big), \text{ clase } 4\right).$$

[7] Ver como Vergnaud (1991) construye el campo conceptual de las estructuras aditivas y el campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

Y dependiendo de la *situación* a la que pertenezca el problema puede ser, por ejemplo para la clase 2 de problemas, de clase 2A, 2B, 2C, 2D, 2E, 2F, según sea el caso (Muñoz, 2006a).

Es importante señalar que consideramos en una sola *clase* a los problemas que se derivan de los fenómenos con un comportamiento a razón de cambio constante, porque son un antecedente esencial para abordar el estudio de los problemas que se derivan de los fenómenos con un comportamiento a razón de cambio variable, debido al hecho siguiente: Galileo estudia primero las propiedades del movimiento constante o uniforme para después poder abordar el estudio del movimiento naturalmente acelerado, debido, básicamente, a que el movimiento acelerado se verá, en algún sentido, constante (Cantoral, 2001).

La clasificación de problemas que presentamos es solamente una aproximación; sin embargo, es importante que se siga consolidando la clasificación ya que es un instrumento para el análisis de las situaciones y para el análisis de las dificultades conceptuales encontradas por los estudiantes (Vergnaud, 1990a). Solamente la clasificación es el inicio de un programa de investigación delineado por Vergnaud (1990b) que a la letra dice: analizar y clasificar la variedad de situaciones en cada campo conceptual.

Es importante resaltar que además de los aspectos señalados por Vergnaud (1990a & 1990b) para realizar la clasificación incorporamos aspectos socioepistemológicos del contenido matemático específico.

Nuestra investigación nos permitió percibir a *la epistemología y cognición del Cálculo integral* en el sentido de caracterizar la epistemología de un campo conceptual fundamentado en un sistema de prácticas sociales *(Predicción y Acumulación)*. Dicho campo fue construido a partir de un marco epistémico como el de Newton cuya naturaleza está centrada en *relaciones funcionales entre variables* (así como sus variaciones) y en la construcción de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales (presente), de las variables de los fenómenos de variación, a los estados finales (futuro) en sus formas de *número-estado futuro* o *función-estado futuro*. En estas dos formas es inherente la noción de *predicción* en tanto práctica social así como también aparece la necesidad de calcular la diferencia entre los estados finales e iniciales en donde subyace la noción de *acumulación* en tanto práctica social detonada por la práctica de predecir (Muñoz, 2006a).

Un aspecto importante a resaltar fue que tuvimos necesidad de reformar la visión de la teoría de los campos conceptuales en el sentido de que fue necesario incorporar nociones como la *predicción* y la *acumulación* (en tanto categorías de conocimiento[8]) que no están ancladas a la actividad matemática *per se* sino

[8] Ver análisis de la acumulación como una categoría del conocimiento del Cálculo integral en su producción y difusión institucional (Cordero, 2005).

que pertenecen a la esfera de la actividad humana[9] por lo cual visualizamos un *campo conceptual del Cálculo fundamentado en un sistema de prácticas sociales* organizadas a través de dos ejes, predicción y acumulación, con el fin de rediseñar el Cálculo integral escolar (Muñoz, 2005b, 2006a).

4 Dimensión didáctica: génesis artificial de la predicción

Con base en la perspectiva planteada anteriormente hemos diseñado e implementado actividades para el salón de clases (Licenciatura en Ingeniería Civil y Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Chiapas, en México) en donde un hallazgo importante consiste en evidenciar que la noción de *constantificación de lo variable* aparece sistemáticamente como intentos de los grupos humanos para cuantificar lo variable en el contexto de la práctica social de predecir en el sentido de *construir la posibilidad de sustituir un movimiento con velocidad variable por un movimiento con velocidad constante* (es decir, subyace la pregunta ¿bajo qué condiciones se puede sustituir un movimiento por otro?) considerando el intervalo completo de tiempo o los intervalos mostrados en la tabla dada de valores numéricos. Algunos estudiantes acumulan distancias y otros no (los que toman el intervalo completo de tiempo). De manera que la *constantificación de lo variable* se constituye como una especie de práctica social (*ya que es una pregunta que emerge para transformar la situación*) detonada por la práctica social de predecir y ambas le dan sentido a la práctica social de acumular distancias (Muñoz, 2006a).

Considerando la dimensión didáctica se enriquece el campo de prácticas sociales agregando como eje importante la *constantificación de lo variable,* y muestra algunos elementos que justifican la compatibilidad entre la naturaleza dialéctica de *lo conceptual y lo algorítmico* de un contexto sociocultural del siglo XVII con la naturaleza dialéctica de *lo conceptual y lo algorítmico* de un contexto sociocultural contemporáneo específico en donde está inmersa una institución escolar cuya naturaleza es la formación de usuarios de la matemática (por ejemplo, Ingenieros), lo cual implica su relatividad debido a que la relación dialéctica se conserva al cambiar de contexto sociocultural pero su naturaleza es distinta (Muñoz, 2006a, 2007, 2008).

[9] Consideramos que toda práctica social es una actividad humana pero no toda actividad humana es una práctica social (la práctica social se caracteriza por ser una fuente necesaria para la generación de conocimiento matemático específico), por ejemplo, de acuerdo a lo evidenciado en esta investigación la noción de predicción en tanto práctica social permite generar el Cálculo ya que funciona a partir de una creencia con raíz social: es posible cuantificar los estados futuros de un sistema de movimiento si conozco los estados iniciales del sistema (Muñoz, 2006a).

5 Implicaciones: unidad de análisis para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral

Con base en todo lo anterior, presentamos algunas implicaciones vertebradas a través de las preguntas: ¿La *predicción* en tanto práctica social (inmersa en un *campo*) como eje fundamental de la socioepistemología? Y ¿la socioepistemología como aproximación fundamental en la Matemática Educativa?

Desde una visión global la caracterización de lo social, y por lo tanto de la noción de práctica social, depende de la dimensión analizada: epistemológica, cognitiva, didáctica. Solamente en términos del análisis es que se mencionan por separado porque la visión es sistémica. También depende del plano donde realizamos la investigación: génesis histórica, génesis contemporánea, génesis artificial.

En la dimensión epistemológica uso lo social matizado por la noción de marco epistémico en donde algunos de sus aspectos son: creencias de una comunidad de una sociedad especifica, cosmovisión[10], preguntas que viven en una sociedad (García, 2000).

Todos estos aspectos condicionan el actuar, la práctica, pero no determinan el tipo de conocimiento ya que es en el momento que se actúa o se ejerce la práctica que se genera conocimiento, en el momento del ejercicio de la práctica hay muchos factores que podrían determinar el tipo de conocimiento (mentales, económicos, militares, institucionales, de organización social, culturales). Así, por el ejercicio de la práctica se transforma el marco epistémico y así sucesivamente nos podemos aproximar a entender el desarrollo del conocimiento.

Por ejemplo, el marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget & García, 1994; Cantoral, 2001) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento*. Es decir, el hecho de que la pregunta sea calcular la evolución posterior implica

[10] Por ejemplo, aspectos de la cosmovisión Tojolabal (lengua y nombre de un pueblo maya en los altos de Chiapas, vive en los municipios de las Margaritas y Altamirano y dispersa en municipios aledaños de Comitán, Independencia y Trinitaria, son tal vez unas 50 a 80 mil personas): La percepción de la realidad no es la misma que otros perciben, por ejemplo, al mirar la gama de colores unos ven dos colores, verde y azul, en cambio ellos ven un solo color llamado ya'ax. Para los tojolabales todas las demás cosas y personas son sujetos, es decir, no hay cosa alguna que no tenga corazón (yaltzil), que corresponde también a alma o principio de vida, es decir, no hay materia muerta y de ahí nos encontramos con la comunidad cósmica de los hijos de nuestras Madres Tierra y Luna (Lenkersdorf, 2002).

cuantificar estados posteriores de cierta variable, en función de otra, a partir de las condiciones iniciales con el fin de *predecir* la evolución de un fenómeno de variación.

En este contexto aparece el sentido de la noción de *predicción* en tanto práctica social asociada al surgimiento del Cálculo y constituye una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en la génesis histórica del Cálculo integral (Muñoz, 2006a), que en cierta forma, se puede sostener debido al hecho siguiente: existe una relación muy estrecha entre la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor* asociado a un procedimiento de derivación sucesiva (Cantoral, 2001).

En la dimensión cognitiva lo social, en el sentido de práctica social (por ejemplo, la *predicción*), es la condicionante del *tipo de problemas, situaciones y clases de problemas* a tratar con los estudiantes, es decir, construimos un campo conceptual (Muñoz, 2005b) a partir del marco epistémico de Newton con todo lo que implica (ver apartado 3). De manera que nuestros trabajos dan cuenta de la génesis contemporánea de la *predicción*, por ejemplo, en un primer momento los estudiantes centran la atención en la variación de las variables de un fenómeno de cambio para intentar formular algunas relaciones funcionales entre las variables sin considerar un sistema de referencia y las condiciones iniciales[11], por lo cual la noción de variación se constituye como una condición necesaria para que la noción de predicción pueda ser construida (tenga sentido), exista, sin embargo, es una condición necesaria pero no suficiente debido a que en un segundo momento los estudiantes pueden predecir hasta que centran su atención en el origen del sistema de referencia y por tanto de las condiciones iniciales[12].

En la dimensión didáctica lo social, en el sentido de práctica social, es la base del diseño de la secuencia de actividades para el aula, por ejemplo, la *predicción* (inmersa en un campo de prácticas sociales) es la que condiciona el diseño de actividades didácticas junto con los aspectos de la génesis contemporánea de la *predicción*, sin embargo, un aspecto importante es el objetivo de la institución escolar que consiste en la intencionalidad de provocar la construcción del Cálculo, lo cual implica que la génesis está normada por las restricciones de los contratos escolar, pedagógico y didáctico (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997). Es decir, estamos en el plano de la génesis artificial y de la necesidad de controlar dicha génesis, aquí el *campo de prácticas sociales*, que fundamenta el diseño

[11] Ver en el apartado 4.2 de la tesis de doctorado (Muñoz, 2006a) el reporte de lo que hace un estudiante en el contexto de la Cinemática y ver lo semejante con estudiantes en el contexto de la Economía (Ramos, 2005).

[12] Ver en el apartado 4.2 de la tesis de doctorado (Muñoz, 2006a) el reporte de lo que hace un estudiante en el contexto de la Cinemática y ver lo semejante con estudiantes en el contexto de la Economía (Ramos, 2005).

de actividades para el aula, condiciona y organiza otros aspectos de lo social: las interacciones de los estudiantes y sus argumentos discursivos, el análisis del papel mediador del profesor y los diferentes tipos de mediaciones sociales (que nos da cuenta de los mecanismos, el cómo se construye). Así la *predicción* (en tanto eje fundamental del *campo*) nos da cuenta del qué se construye en relación con el cómo se construye en el salón de clases (Muñoz, 2006a).

De acuerdo a lo presentado en las tres dimensiones, la noción de *predicción* en tanto práctica social (inmersa en un *campo*), de alguna manera, se constituyó en la columna vertebral de la interacción entre las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica; y por ende ha sido necesario introducir en la Matemática Educativa (en tanto disciplina científica) a la noción de *práctica social* como eje fundamental. Así desde los trabajos pioneros como el de Cantoral (1990) en su tesis de doctorado da cuenta del papel de la *predicción* en el surgimiento del Cálculo y Cordero (1994) en su tesis de doctorado da cuenta del papel de la *acumulación* en el surgimiento del Cálculo integral.

Por todo lo anterior y de acuerdo a los hallazgos de nuestra investigación podemos sostener que entonces la *predicción, la acumulación y la constantificación de lo variable* no están ancladas a la actividad matemática *per se* sino que pertenecen a la esfera de la actividad humana[13] ya que *no pertenecen* al mundo de los objetos matemáticos. Al considerar los trabajos de Cantoral (1990, 2001) y Cordero (1994, 2003) nuestra investigación ha construido un campo conceptual del Cálculo fundamentado, inicialmente, en la *predicción y acumulación*; y posteriormente enriquecido por la *constantificación de lo variable*.

De manera que la investigación nos permitió percibir a la *epistemología, cognición y didáctica del Cálculo integral* en el sentido de caracterizar la epistemología de un campo conceptual fundamentado en un sistema de prácticas sociales (*predicción, acumulación y constantificación de lo variable*). Dicho campo fue construido a partir de un marco epistémico como el de Newton y cuya naturaleza está centrada en *relaciones funcionales entre variables* (así como sus variaciones) y en la construcción de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales (presente), de las variables de los fenómenos de variación, a los estados finales (futuro) en sus formas de *número-estado futuro* o

[13] Consideramos que toda práctica social es una actividad humana pero no toda actividad humana es una práctica social (la práctica social se caracteriza por ser una fuente necesaria para la generación de conocimiento matemático específico), por ejemplo, de acuerdo a lo evidenciado en esta investigación la noción de predicción en tanto práctica social permite generar el Cálculo ya que funciona a partir de una creencia con raíz social: es posible cuantificar los estados futuros de un sistema de movimiento si conozco los estados iniciales del sistema. Y en este contexto de Predicción aparece la constantificación de lo variable en tanto práctica social ya que funciona a partir de otra creencia con raíz social: es posible sustituir lo variable por lo constante bajo ciertas condiciones (Muñoz, 2006a).

función-estado futuro. En estas dos formas es inherente la noción de *predicción* en tanto práctica social así como también aparece la necesidad de calcular la diferencia entre los estados finales e iniciales en donde subyace la noción de *acumulación* en tanto práctica social detonada por la práctica de predecir y de constantificar lo variable (Muñoz, 2006a).

Para finalizar, las prácticas sociales organizadas en un *campo* son fundamentales para la aproximación socioepistemológica porque sostenemos que esta especie de *campo de prácticas sociales* es una *unidad de análisis*[14] viable en el sentido que tiende puentes entre las dimensiones principalmente estudiadas: epistemológica, cognitiva, didáctica (como se puede observar en el cuerpo de este artículo). Pero también, potencialmente tiende puentes con otras dimensiones: antropológica, sociológica, semiótica, por citar algunas. Evita el riesgo de reduccionismos y fronteras disciplinares muy rígidas[15] sin obviamente perder de vista que la disciplina de referencia es la Matemática Educativa con sus fines específicos.

En otro sentido más especifico, el *campo de prácticas sociales* condiciona y determina la producción y difusión de lo conceptual-algorítmico, y no en sentido inverso en donde lo conceptual-algorítmico se considere fijo y universal.

De acuerdo a la afirmación anterior, si tomamos como *unidad de análisis* a un *campo de prácticas sociales* necesariamente implica rediseñar el discurso escolar del Cálculo integral teniendo como columna vertebral a la *predicción, acumulación y constantificación de lo variable* (Muñoz, 2006a); lo que a su vez implica no centrarse solamente en el dominio matemático *per se,* es decir, el

[14] "...Por unidad entendemos el resultado del análisis que, a diferencia de los elementos, goza de todas las propiedades fundamentales características del conjunto y constituye una parte viva e indivisible de la totalidad. No es la fórmula química del agua, sino el estudio de las moléculas y del movimiento molecular lo que constituye la clave de la explicación de las propiedades definitorias del agua. Así, la célula viva, que conserva todas las propiedades fundamentales de la vida, definitorias de los organismos vivos, es la verdadera unidad del análisis biológico..." (Vygotski, 1982, p. 19-20). Por ejemplo, Wertsch (1993) toma como unidad de análisis a la "acción mediada" lo cual permite que sea un puente entre la Psicología y la Semiótica y, a través de la Semiótica, entre la Psicología y las demás Ciencias Sociales; sin embargo, la disciplina de referencia es la Psicología. La pregunta obligada es: ¿cuáles podrían ser unidades de análisis en Matemática Educativa que permitan tender puentes con las disciplinas limítrofes?

[15] En Matemática Educativa un punto muy importante es su carácter interdisciplinario, lo cual es una condición necesaria en tanto disciplina científica, por ejemplo, para construir una epistemología científica del conocimiento científico y para construir una psicología científica de la conciencia humana, como se propusieron Piaget y Vygotski respectivamente, era necesario luchar siempre contra los reduccionismos y fronteras disciplinares. Sin duda esa visión es uno de los aspectos más relevantes de estos dos acercamientos. Wertsch (1993) intenta llevar hasta sus últimas consecuencias esa visión, en particular al analizar la relación entre los procesos mentales y los escenarios socioculturales a través de considerar como unidad de análisis a la "acción mediada".

campo de prácticas sociales a través de la *predicción* permite tender puentes entre dominios científicos diversos: Física[16], Química, Biología, Economía[17].

De manera que la *predicción* (inmersa en un *campo*) por su naturaleza va entretejiendo los conocimientos sin una frontera rígida entre conceptos, sin un orden lineal y que trasciende el dominio de la matemática (Muñoz, 2006a).

Por lo argumentado, consideramos que las prácticas sociales organizadas en un *campo* son fundamentales para la socioepistemología y la socioepistemología es fundamental para el desarrollo de la Matemática Educativa en nuestras regiones porque permite rediseñar el discurso matemático escolar, en particular del Cálculo integral, teniendo como fundamento una especie de *campo de prácticas sociales* (Muñoz, 2006a, 2007, 2008).

Referencias bibliográficas

Alanís, J. A. (1996). *La Predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (1983). *Procesos del cálculo y su desarrollo conceptual*. Tesis de Maestría en Ciencias. Cinvestav-IPN. Sección de Matemática Educativa. México.

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la Analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (1), 1-9.

Chevallard, Y; Bosch, M; Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* España: Ed. ICE-Horsori.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (2), 103-128.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), 265-285.

[16] En Hernández (2006) aparece un ejemplo de la matematización de la *predicción* en la Cinemática.

[17] En Ramos (2005) aparece un ejemplo de la matematización de la *predicción* en la Economía.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Piaget a la teoría de sistemas complejos*. España: Gedisa.

Heath, T. L. (1953). *The works of Archimedes.* USA: Dover Publications (reprint of 1897 ed.).

Hernández, H. (2006). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Lenkersdorf, C. (2002). *Tojolabal para principiantes. Lengua y cosmovisión mayas en Chiapas*. México: Plaza y Valdés, segunda edición.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (1), 25-68.

Muñoz, G. (2005a). Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a prácticas sociales con Cálculo integral. En J. Lezama, M. Sánchez, J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 597-603. México: Clame A.C.

Muñoz, G. (2005b). Naturaleza de un campo conceptual del Cálculo infinitesimal: una visión epistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez, J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 589-595. México: Clame A.C.

Muñoz, G. (2006a). *Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al Cálculo integral: aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos.* Tesis de doctorado en ciencias, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Muñoz, G. (2006b). Relación dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al Cálculo integral. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (pp. 423-451). México: Clame A.C. y Ediciones Díaz de Santos.

Muñoz, G. (2007). Rediseño del Cálculo integral escolar fundamentado en la Predicción. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López & C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 27-76). Madrid: Ediciones Díaz de Santos; Guerrero: Universidad Autónoma de Guerrero.

Muñoz, G. (2010). *Una Resignificación de las Ecuaciones Diferenciales, fundamentada en la Predicción: elementos Epistemológicos, Cognitivos y Didácticos*. México: Universidad Autónoma de Chiapas (Colección libros de consulta para Ciencia y Tecnología).

Piaget, J. & García R. (1994). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia* (6a. ed.). México: Siglo XXI.

Ramos, S. E. (2005). *Análisis socioepistemológico de los procesos de matematización de la predicción en la Economía*. Tesis de Maestría en Ciencias. Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Vergnaud, G. (1981). Quelques Orientations Theoriques et Methodologiques des Recherches Francaises en Didactique des Mathematiques. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 7-17).

Vergnaud, G. (1990a). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10* (13), 133-170.

Vergnaud, G. (1990b). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. En Nesher y Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 14-30). Cambridge:University Press.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Editorial Trillas.

Vergnaud, G. (1998). Towards a Cognitive Theory of Practice. En Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 227-240). Great Britain: Kluwer Academic Publishers.

Vygotski, L. S. (1982). *Obras Escogidas II. Incluye Pensamiento y Lenguaje, y Conferencias sobre Psicología*. España: Ed. Visor.

Wertsch, J. V. (1993). *Voces de la Mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la Acción Mediada*. España: Ed. Visor.

Autor:

Germán Muñoz-Ortega.
Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Chiapas, México. *german_munoz_ortega@hotmail.com* y *yaltzil@unach.mx*