

Experiencias Docentes

Transformando Cuádricas Regladas

Transforming Ruled Quadric Surfaces

Josefa Marín, Amparo Verdú y José Luis Almazán

Revista de Investigación



Volumen II, Número 2, pp. 013--024, ISSN 2174-0410
Recepción: 5 Jul'12; Aceptación: 20 Jul'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Las Matemáticas y la Arquitectura están íntimamente relacionadas. Pretendemos en este trabajo demostrar cómo a partir de dos cuádricas regladas clásicas como son el hiperboloide de una hoja y el paraboloid hiperbólico y sus secciones, obtenemos distintas figuras geométricas que se pueden utilizar como cubiertas.

Las Matemáticas no son solamente una herramienta de cálculo para poder diseñar la obra en cuestión, pretendemos destacar la importancia de éstas en el gran avance arquitectónico en cuanto a modernidad se refiere. El programa Mathematica resulta de gran ayuda para visualizar las propiedades y la forma de generar esas superficies.

Palabras Clave: Cuádricas, Mathematica, regladas, Arquitectura.

Abstract

Mathematics and architecture are closely related. This paper tries to show how from two ruled quadrics classics such as the hyperboloid of one sheet and hyperbolic paraboloid and its sections, we get different geometric figures that can be used as covers.

Mathematics is not just a calculation tool to be able to design the work in question, we intend to emphasize their importance in the architectural breakthrough in terms of modernity is concerned. The program "Mathematica" is very helpful to display the properties and how to generate those surfaces.

Keywords: Quadric surfaces, Mathematica, ruled, Architecture.

1. Introducción

Es de sobra conocido que las cónicas y cuádricas son fundamentales para representar y modelizar secciones y superficies, ocupando un papel destacado el estudio de las superficies

regladas por su utilidad a la hora de construir. El propósito de este trabajo es presentar de una manera sencilla y didáctica cómo a partir dos conocidas cuádricas regladas como son el hiperboloide de una hoja o el paraboloides hiperbólico, estudiando sus ecuaciones implícitas o paramétricas y sus secciones podemos transformarlas para definir nuevas figuras que tengan formas concretas.

2. Desde un Hiperboloide de una hoja

2.1 Definición y primera representación

Se define un hiperboloide de una hoja como una cuádrica de ecuación general reducida con eje en OY igual a $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

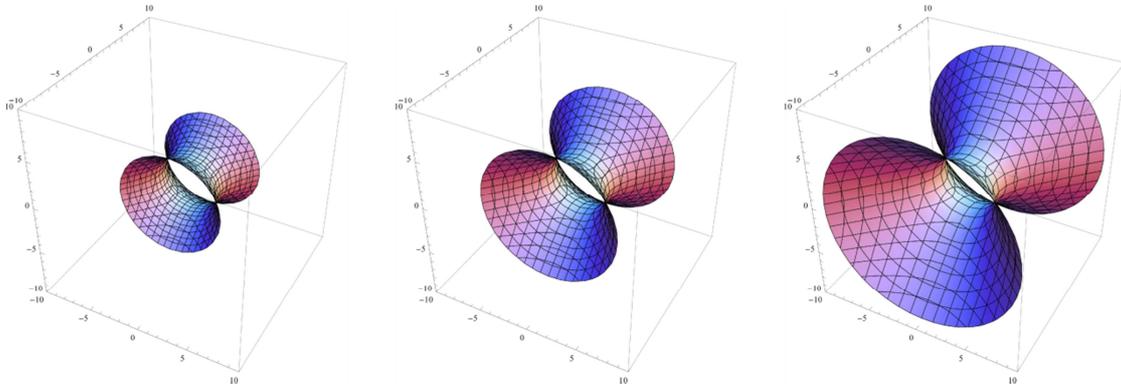


Figura 1. Hiperboloide de una hoja generado por circunferencias

Las secciones para cada plano $y = y_0$ son circunferencias de ecuación implícita $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{y_0^2}{b^2}$ como podemos ver en la figura anterior.

2.2 Generación por rectas

Pero también podemos representar la superficie anterior cómo una superficie reglada, generada por una de las dos rectas generatrices que gira alrededor de una circunferencia. Para ello vemos a continuación la forma de obtener las ecuaciones de las rectas generatrices:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(1 + \frac{z}{c}\right) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)}{\left(1 - \frac{z}{c}\right)} &= \frac{\left(1 + \frac{z}{c}\right)}{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)} = \lambda, \quad \frac{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)}{\left(1 + \frac{z}{c}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{z}{c}\right)}{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)} = \mu \end{aligned}$$

Primera recta generatriz: $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \lambda\left(1 - \frac{z}{c}\right)$ y $\left(1 + \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$

Segunda recta generatriz: $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \mu\left(1 + \frac{z}{c}\right)$ y $\left(1 - \frac{z}{c}\right) = \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$

Y construimos el hiperboloide desplazando una de estas rectas por la circunferencia en el plano $y=0$ de ecuación implícita $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

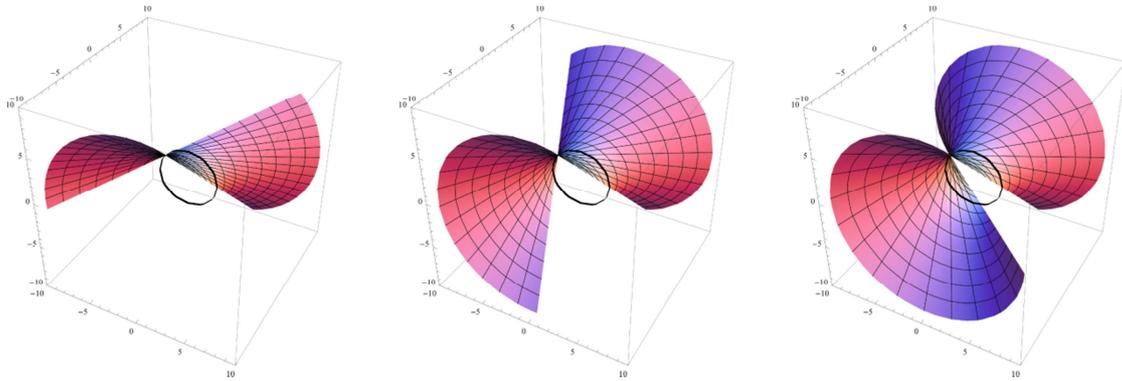


Figura 2. Hiperboloide de una hoja generado por rectas

2.3 Pivotando una recta generatriz sobre otra recta: Ysios

La sencilla representación anterior del hiperboloide nos sugiere la idea de desplazar y balancear una recta sobre otra recta generando otro tipo de superficie que se utiliza como cubiertas, por ejemplo en el diseño de la bodega Ysios. La ecuación general de una superficie de este tipo sería:

$$Sup_{h,p}(x, y) := \{x, y, h(x, y) \cdot Sen[p(y)]\}$$

Donde las funciones $h(x,y)$ y $p(x)$ nos indican, respectivamente, cómo subir la altura de la cubierta y cómo controlar el número de arcos. Vemos que las secciones para $x=cte$ son oscilaciones armónicas, y para $y=cte$, rectas que se balancean sobre el eje OY .

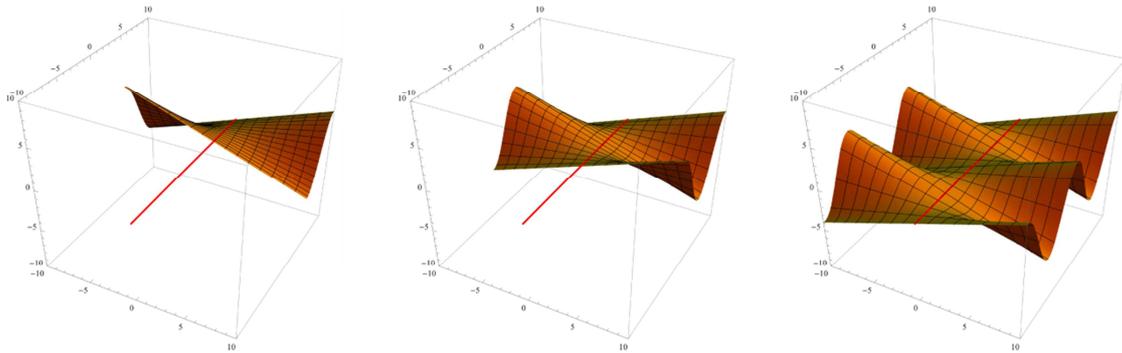


Figura 3. Cubierta reglada balanceando y desplazando una recta

Aunque también podemos obtener esta cubierta curvando adecuadamente el plano OXY:

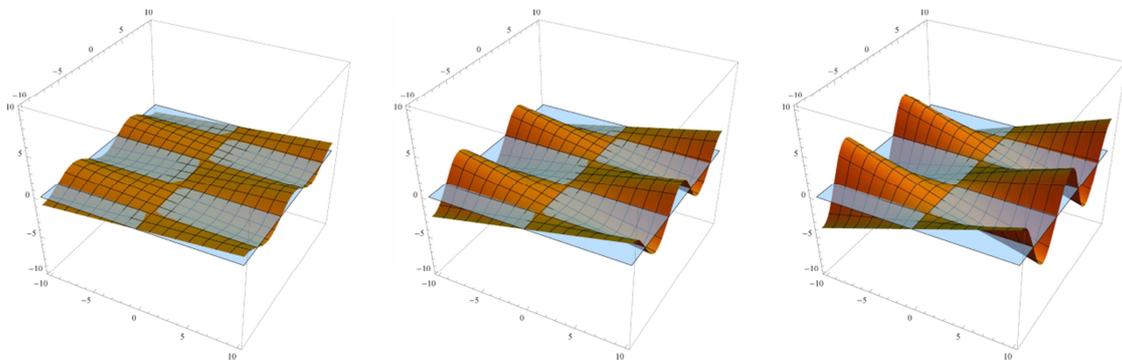


Figura 4. Cubierta reglada curvando el plano

Esta estructura es similar a la utilizada por el arquitecto Santiago Calatrava en la realización de la Bodega Ysios.

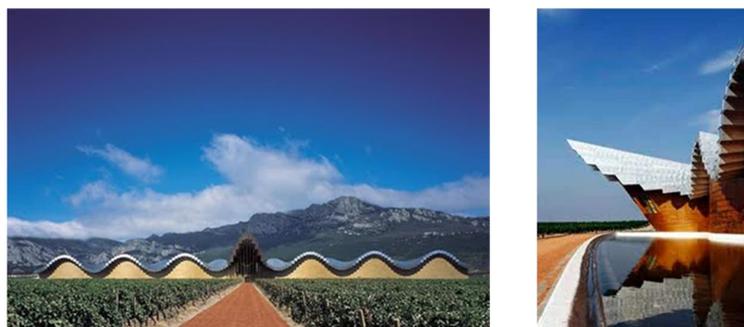


Figura 5. Fotografías de la Bodega Ysios

Nos preguntamos ahora, ¿qué clase de funciones pueden ser $h(x,y)$ y $p(y)$ para que una superficie de esta misma familia tenga una representación similar a las siguientes?

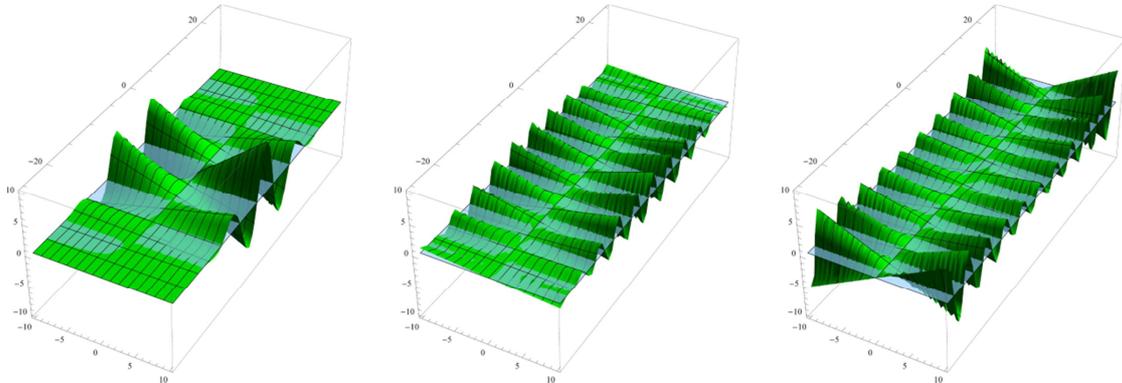


Figura 6. Altura diferente en cada arco

3. Desde un Paraboloid hiperbólico

3.1 Definición y primera representación

Pasemos a estudiar la cuádrica reglada paraboloid hiperbólico. Esta estructura ha sido utilizada brillantemente en el diseño y la elaboración de cubiertas por el arquitecto hispanomejicano Félix Candela en obras como la planta embotelladora de Bacardi o el restaurante Los Manantiales.



Figura 7. Estructura reglada y obras de Félix Candela

También ha realizado, junto a su discípulo, Santiago Calatrava, L'Oceanogràfic de Valencia.



Figura 8. L'Ocenogràfic de Félix Candela y Santiago Calatrava

Veamos la base matemática de esta construcción. La ecuación general reducida de un paraboloides hiperbólico es la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z$$

En la siguiente figura podemos ver las distintas secciones del paraboloides cuando cortamos con planos paralelos a los planos coordenados. La sección en la que nos vamos a detener posteriormente es la del corte con el plano $z=0$, formada por dos rectas que nos definen los cuatro lóbulos, del paraboloides. La idea que proponemos es aumentar el número de rectas que cortan al plano $z=0$ y de ese modo obtener más lóbulos.

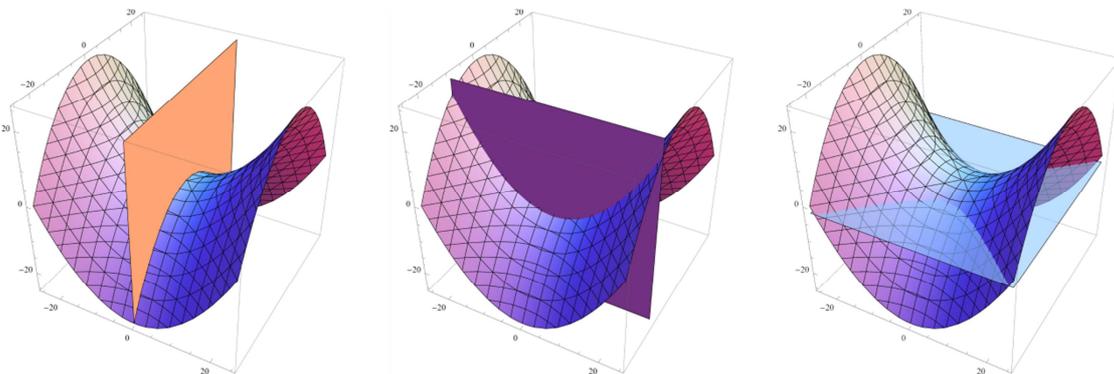


Figura 9. Secciones de un paraboloides hiperbólico

Al igual que hemos hecho antes con el hiperboloides, ahora representaremos el paraboloides hiperbólico como una superficie reglada generada por las rectas que definimos del siguiente modo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z$$

Si $z = 0$: Rectas $r_1 : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ y $r_2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

Si $z \neq 0$: Primera recta generatriz: $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \lambda z$ y $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \lambda^{-1}$

Segunda recta generatriz: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \mu z$ y $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \mu^{-1}$

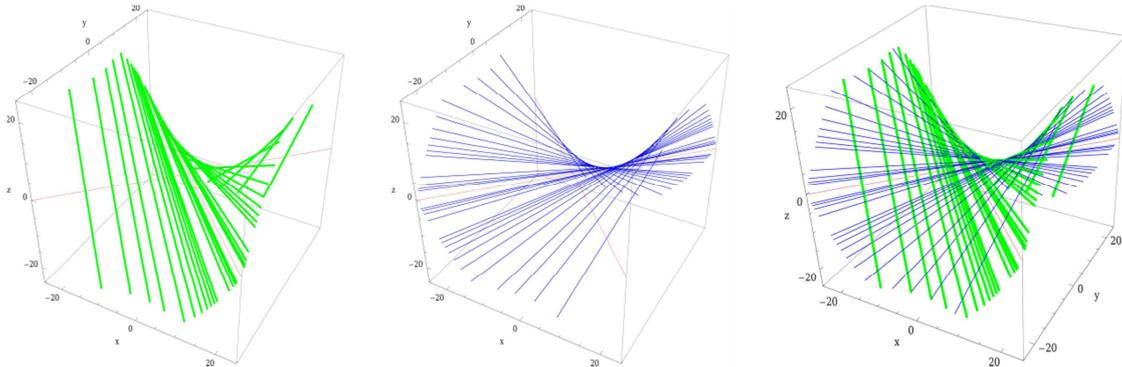


Figura 10. Paraboloide Hiperbólico como superficie reglada

Para alcanzar nuestro objetivo y visualizar de modo adecuado las transformaciones es más útil trabajar con coordenadas polares y ver cómo podemos deformar un disco en el plano OXY para dibujar las distintas figuras.

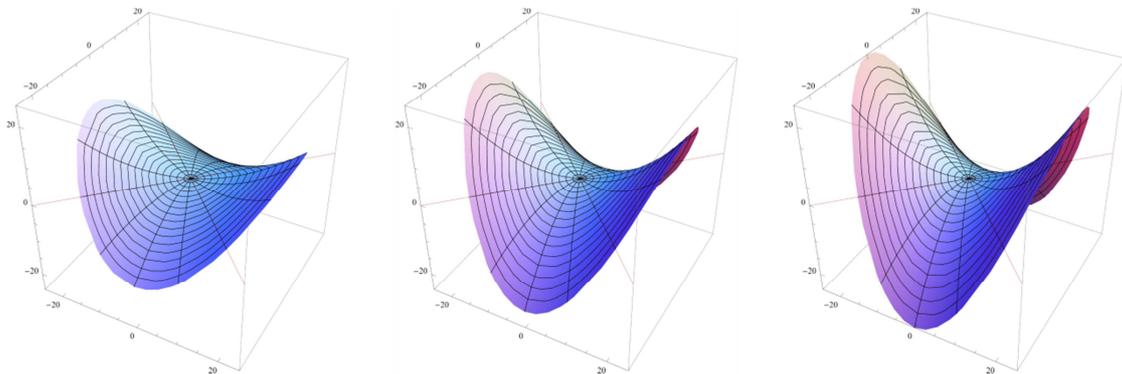


Figura 11. Del disco plano al Paraboloide Hiperbólico

La representación anterior la hemos obtenido definiendo la superficie en forma paramétrica con coordenadas polares como sigue:

$$\left. \begin{aligned} x(\rho, \theta) &= \rho \cdot \text{Cos}[\theta] \\ y(\rho, \theta) &= \rho \cdot \text{Sen}[\theta] \\ z(\rho, \theta) &= b \cdot \rho^2 (\text{Cos}^2[\theta] - \text{Sin}^2[\theta]) \end{aligned} \right\} \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

3.2 Aumentando lóbulos en un paraboloides hiperbólico

Si el cambio de un lóbulo a otro lo marcan las rectas intersección con el plano OXY , lo que haremos será definir la coordenada z como producto de cuatro rectas y llamaremos a la nueva superficie 4-paraboloides hiperbólico. Por ejemplo, con la siguiente función en coordenadas polares:

$$\left. \begin{aligned} x(\rho, \theta) &= \rho \cdot \text{Cos}[\theta] \\ y(\rho, \theta) &= \rho \cdot \text{Sen}[\theta] \\ z(\rho, \theta) &= b \cdot \rho^4 \cdot (\text{Cos}^2[\theta] - \text{Sin}^2[\theta]) \cdot \text{Cos}[\theta] \cdot \text{Sen}[\theta] \end{aligned} \right\} \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

De ese modo tenemos una superficie con cuatro lóbulos positivos y cuatro negativos, que mediante el uso de matrices de giro representamos así:

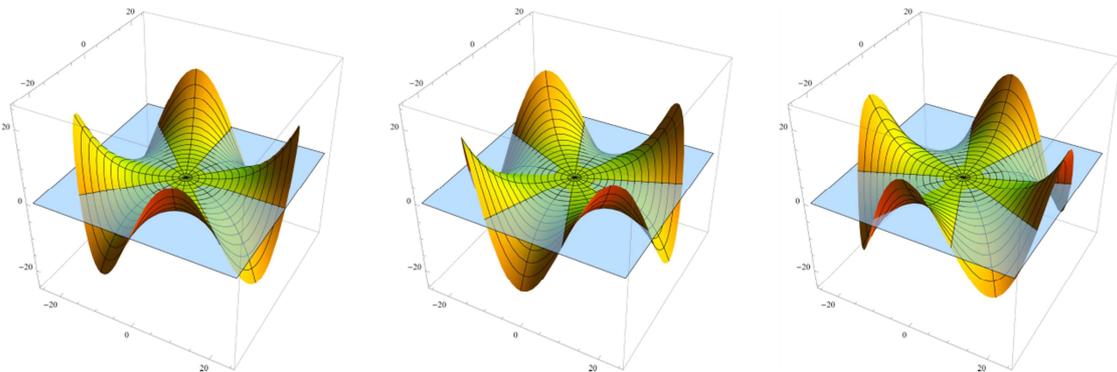


Figura 12. Nuevo 4-paraboloides hiperbólico

Nos proponemos ahora definir una nueva superficie con seis lóbulos, tres positivos y tres negativos, lo que llamaremos 3-paraboloides hiperbólico, para ello la coordenada z debe de ser el producto de 3 rectas con igual ángulo entre ellas, por lo que la ecuación en implícitas será del tipo siguiente:

$$z = d(3x^2 - y^2)y$$

y en coordenadas polares, de modo similar al anterior tendremos:

$$\left. \begin{aligned} x(\rho, \theta) &= \rho \cdot \text{Cos}[\theta] \\ y(\rho, \theta) &= \rho \cdot \text{Sen}[\theta] \\ z(\rho, \theta) &= b \cdot \rho^3 \cdot (3 \cdot \text{Cos}^2[\theta] - \text{Sin}^2[\theta]) \cdot \text{Sen}[\theta] \end{aligned} \right\} \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

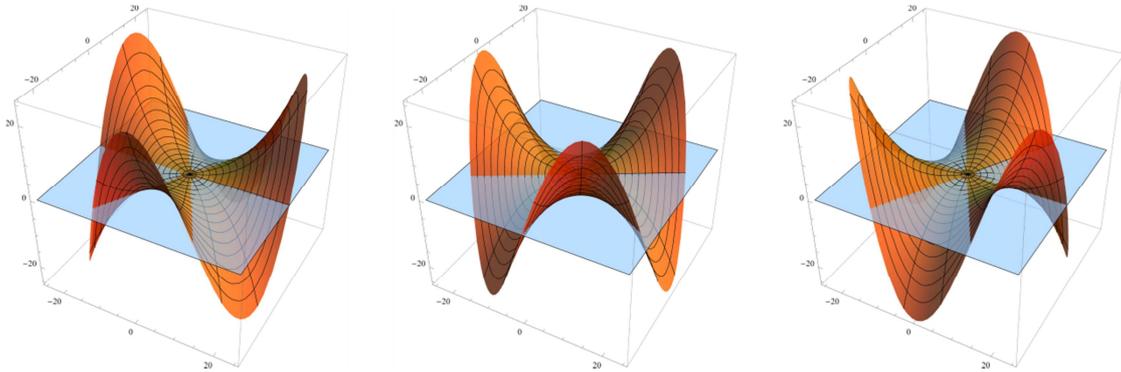


Figura 13. Nuevo 3-paraboloide hiperbólico

Ahora girando y combinando adecuadamente las superficies anteriores se pueden obtener cubiertas como las siguientes:

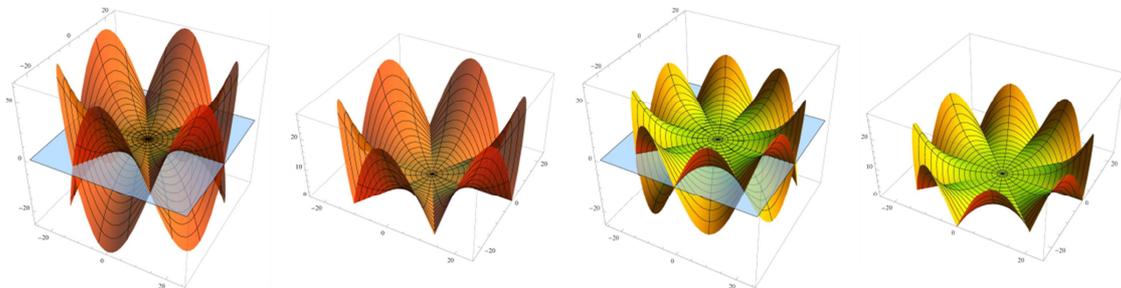


Figura 14. Combinando varias superficies

De manera natural se puede generalizar la definición anterior para obtener un n -paraboloide con n lóbulos positivos y n lóbulos negativos.

4. Modificando el radio vector

4.1 Radio vector función senoidal

Siguiendo con nuestro propósito de transformar el paraboloide hiperbólico, vamos definir la coordenada z de un n -paraboloide para que las curvas que se obtienen al cortar la figura con una radiación de planos en el eje OZ sean de tipo oscilación armónica. Un ejemplo sería el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x(\rho, \theta) &= \rho \cdot \text{Cos}[\theta] \\ y(\rho, \theta) &= \rho \cdot \text{Sen}[\theta] \\ z(\rho, \theta) &= 3 \cdot \text{Sin}[\rho] \cdot \text{Cos}[2\theta] \cdot \text{Sin}[2\theta] \end{aligned} \right\} \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

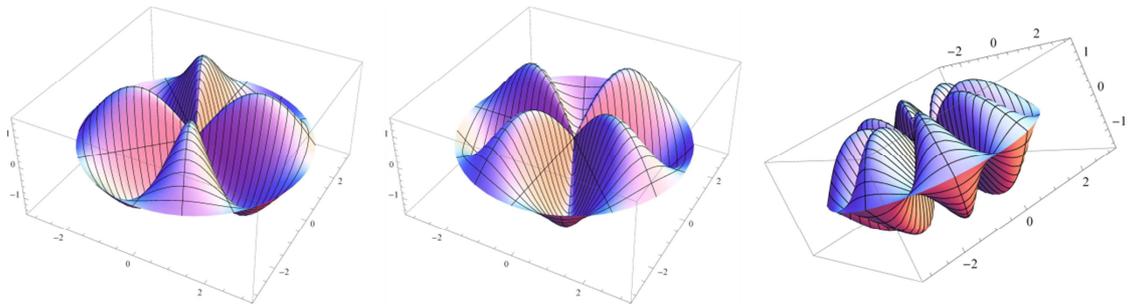


Figura 15. Dibujando y combinando con radio vector senoidal

También podemos variar el radio y observar la variación senoidal:

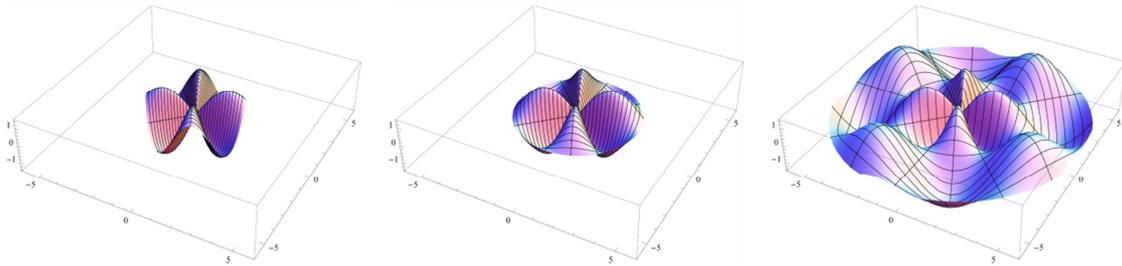


Figura 16. Ampliando el radio

O superponer varias a diferente altura:

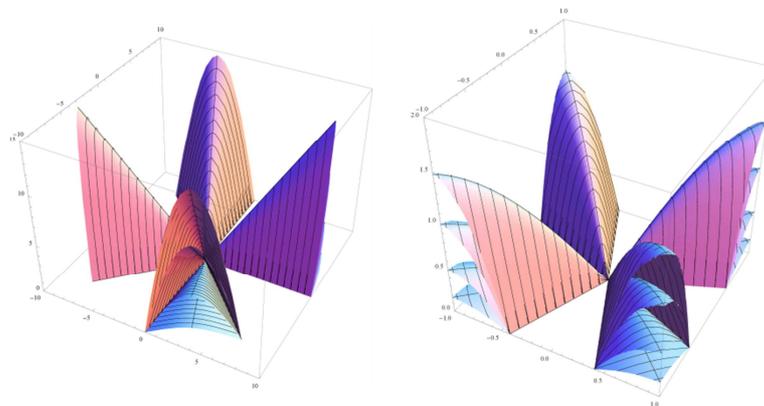


Figura 17. Superponiendo cubiertas

4.2 Diferentes radios vectores

Variando en la coordenada z el tipo de función del radio vector y combinando con el número de lóbulos, podemos generar figuras muy variadas. Mostramos aquí algunas

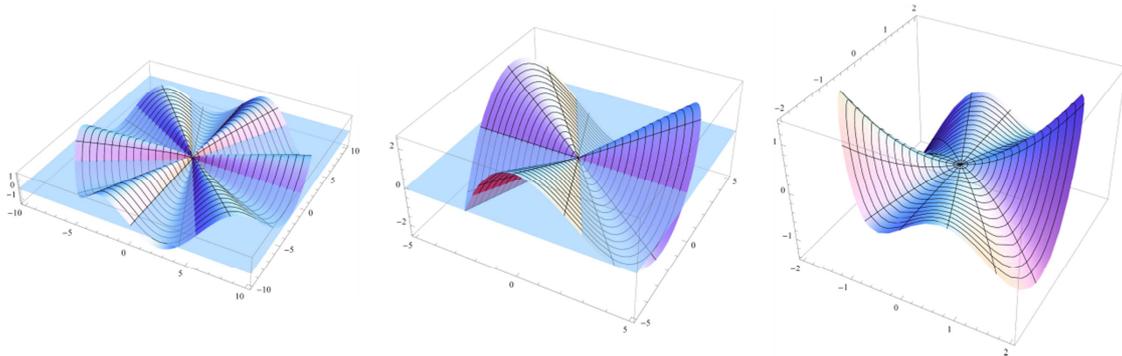


Figura 18. Nuevas combinaciones (I)

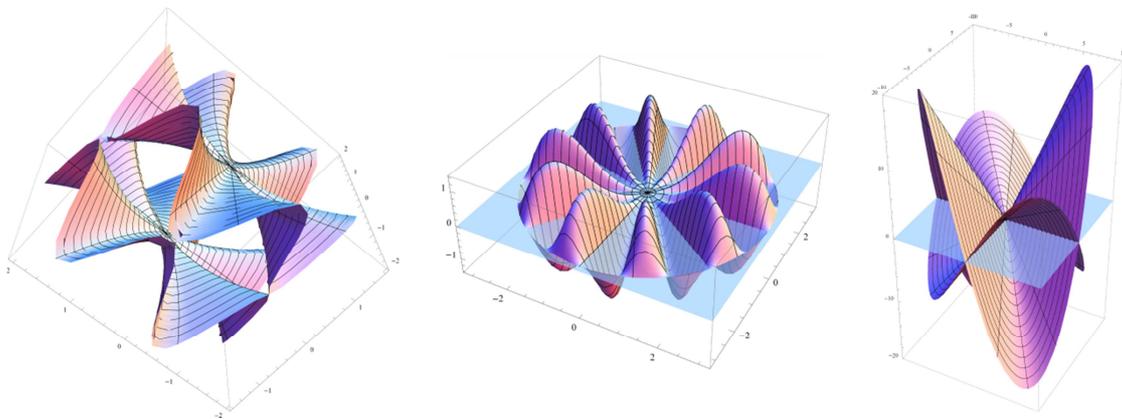


Figura 19. Nuevas combinaciones (II)

5. Mathematica y comando Manipulate

Todas las construcciones que hemos presentado adquieran una dimensión totalmente diferente cuando se definen con el programa Mathematica a través del comando `Manipulate`, y eligiendo los parámetros adecuados podemos dotarlas de movimiento, aplicarles giros, cambio de escala, translaciones, deformaciones, hacerles que crezcan o superponerlas. Toda una ventana de posibilidades que muestran cómo el estudio detallado de propiedades sencillas nos permiten llegar a construcciones más complejas.

Referencias

- [1] BARTOLL ARNAU, Salud; BONET SOLVES, José; GÓMEZ COLLADO, M. Carmen. *Fundamentos Matemáticos en Arquitectura*, pp. 162-169, Editorial UPV, Valencia, 2009.
- [2] BONET SOLVES, José; CALVO ROSELLÓ, Vicenta; PERIS MANGUILLOT, Alfredo; RODENAS ESCRIBÁ, Francisco. *Integración Múltiple y Vectorial*, pp. 161-162, Editorial UPV, Valencia, 2007.
- [3] CHECA MARTÍNEZ, Emilio; FELIPE ROMÁN, M. José; GARCÍA RAFFI, Luis M.; MARÍN MOLINA, Josefa; SÁNCHEZ PÉREZ, Enrique A.; SÁNCHEZ PÉREZ, Juan V. *Álgebra, Cálculo y Mecánica para Ingenieros, Tomo II*, pp. 113-130, Editorial RAMA, Madrid, 1999.
- [4] MARÍN MOLINA, Josefa; BALAGUER BESER, Ángel; ALEMANY MARTÍNEZ, Elena. *Un Curso de Álgebra con Ejercicios (II)*, pp. 249-280, Editorial UPV, Valencia, 2006.
- [5] SMITH, Cameron; BLACHMAN, Nancy. *The Mathematica Graphics Guidebook*, Addison-Wesley, 1995.

Sobre los autores:

Nombre: Josefa Marín Molina

Correo Electrónico: jomarinm@mat.upv.es

Institución: Universidad Politécnica de Valencia, España.

Nombre: Amparo Verdú Vázquez

Correo Electrónico: amparo.verdu@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: José Luis Almazán Gárate

Correo Electrónico: jalmazan@ciccp.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.