Experiencias Docentes
Estrategias matemáticas en la ONU
Mathematical Strategies at the UN

Cristina Jordán Lluch

Esther Sanabria Codesal

María José Pérez Peñalver

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

Volumen II, Número 2, pp. 055--066, ISSN 2174-0410
Recepción: 13 Sep'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

La teoría de emparejamientos proporciona los conceptos y herramientas necesarios para la resolución de problemas consistentes en establecer parejas entre elementos de dos conjuntos distintos o dentro de un mismo conjunto. Utilizamos esta teoría para ayudar al equipo asesor del embajador español, encargado de elegir los ponentes que participarán en una reunión preparatoria del examen ministerial anual del congreso económico y social de la ONU.

Palabras Clave: Modelización, Teoría de grafos, Emparejamientos

Abstract

The matching theory provides concepts and tools necessary to resolve problems consisting of establishing couples formed by elements of two different sets or belonging to the same set. We use this theory to help the advisory team of the Spanish Ambassador, which elects the speakers who will participate in a preparatory meeting for the annual ministerial review of social and economic conference of the UN.

Keywords: Modelling, Graph Theory, Matching

1. Introducción

Es una opinión muy extendida socialmente que las matemáticas son ajenas a lo cotidiano, como mucho se acepta su utilidad como herramienta "para hacer cuentas", por ejemplo en nuestras compras, para verificar descuentos y en general al organizar nuestros recibos habituales. Sin embargo, las siguientes situaciones nos resultan familiares:

- Nuestra asociación vecinal, cada mes de diciembre recoge juguetes entre los vecinos para regalar a los niños más desfavorecidos del barrio. Para satisfacer en lo posible a éstos, la presidenta pide a los padres que le indiquen las preferencias de sus hijos. ¿Podrá hacer la distribución de manera que todos queden contentos?
- Los profesores del colegio público de nuestro barrio han organizado un viaje de fin de curso y quieren distribuir a los niños para que compartan habitaciones dobles. El tutor de cada clase nos informa de las peculiaridades y relaciones entre los niños de su grupo. ¿Será posible distribuirlos de manera que se respeten sus afinidades?
- La universidad acaba de firmar un convenio en el que nuestro instituto de investigación desarrolla un proyecto cuyas tareas es necesario asignar a los técnicos de laboratorio disponibles. Conociendo las habilidades y competencias por las que cada uno de ellos destaca, ¿cómo distribuiremos el trabajo de forma que el resultado final del proyecto sea óptimo?

¿Cuál es el denominador común de estas preguntas? El objetivo que nos planteamos en todas ellas es establecer parejas a partir de una relación dada, bien sea entre elementos de un mismo conjunto o entre dos conjuntos distintos. La búsqueda de una solución para estos problemas nos conduce a estudiar, dentro de la teoría de grafos, el concepto de emparejamiento, sus propiedades y resultados (matching theory en los textos en inglés, [1]).

Recalcamos que el primer paso para la resolución de este tipo de problemas es transformarlos en uno de grafos, es decir, en modelizarlos matemáticamente. La modelización en general, y en particular para la teoría de grafos, constituye una herramienta muy interesante en sí misma, que juega un papel destacado en el aprendizaje matemático de nuestros alumnos ya que permite mostrar aplicaciones matemáticas directas en entornos que les son familiares. Esto despierta su interés y les motiva en el estudio, allanando así el camino para un avance más profundo en las asignaturas de matemáticas que, por desgracia, gran parte del alumnado ve como un escollo en sus estudios en lugar de como una herramienta útil para su vida.

En este trabajo presentamos un ejemplo cuya solución no se obtiene por aplicación directa de un algoritmo conocido. Este tipo de actividad es útil para mostrar a los alumnos, tanto de primeros cursos como superiores, que mediante herramientas sencillas, combinadas de forma adecuada, es factible resolver un problema no trivial.

Una vez modelizado el problema y clasificado como problema de emparejamientos, aplicaremos la teoría matemática adaptándola si fuera necesario. Algoritmos conocidos de la teoría de grafos nos permitirán obtener una solución al problema que habrá que reinterpretar en el contexto original. Otros trabajos donde se abordan problemas similares utilizando la teoría de grafos son [4], [5] y [6].

Para facilitar la comprensión, dedicamos la segunda sección al repaso de la teoría básica y la tercera a presentar el problema y obtener su solución.

2. Conceptos básicos de emparejamientos

Se llama grafo no dirigido, G=(V, E), a toda estructura formada por un conjunto de puntos no vacío V, llamados vértices o nodos, y un conjunto E de pares no ordenados de puntos de V, llamados aristas (ver [2] y [3]). Las aristas se representan por $\{v_i, v_j\}$, utilizando los vértices v_i, v_j que la definen y que llamaremos extremos de la arista.

Se suele representar un grafo no dirigido mediante un diagrama de puntos y líneas en el que los primeros representan a los vértices y una línea entre los puntos v_i y v_j representa la arista $\{v_i, v_j\}$. Los vértices que definen cada arista se llaman extremos de la arista. En el caso de que los vértices coincidan, es decir $v_i=v_j$, la arista $\{v_i, v_j\}$ es un bucle. Dos aristas se dicen adyacentes si tienen un extremo en común.

Una forma habitual de representar un grafo es utilizando su matriz de adyacencia, es decir, una matriz n x n, $A=(a_{ij})$, donde n denota el número de vértices de G, con valores $a_{ij}=1$ si $\{v_i, v_j\}$ es una arista de G y $a_{ij}=0$ si no lo es.

Un grafo no dirigido G=(V, E) se dice que es bipartido si existe una bipartición (X, Y) del conjunto de vértices V, tal que cada una de las aristas tiene un extremo en X y el otro en Y. Un grafo bipartido se dice que es bipartido completo si su conjunto de aristas es el máximo posible.

En el caso de que cada arista tenga un valor asociado, al que llamamos peso de la arista, decimos que se trata de un grafo ponderado. Si sustituimos en la matriz de adyacencia cada valor $a_{ij}=1$ por el peso de la arista $\{v_i, v_j\}$ obtendremos la matriz de pesos.

Se llama emparejamiento del grafo no dirigido G a todo subconjunto de aristas M en el que no existen bucles y no hay dos aristas que sean adyacentes. Un emparejamiento en G se dice que es máximo si no existe ningún otro emparejamiento con mayor número de aristas.

Dado que la dificultad para obtener emparejamientos depende mucho de las características del grafo, el estudio de éstos se realiza estudiando por separado grafos bipartidos ponderados o no ponderados y el caso general. A continuación enumeramos los algoritmos más conocidos que obtienen emparejamientos máximos, según su tipo, atendiendo a los grupos anteriormente mencionados:

- No ponderado bipartido: Algoritmo húngaro
- No ponderado: Algoritmo de Edmonds (I)
- Ponderado bipartido: Algoritmo de Kuhn-Munkres
- Ponderado: Algoritmo de Edmonds (II)

Aunque evidentemente los algoritmos para el caso general son útiles para los grafos bipartidos, es preferible aplicar los específicos en cada caso. Lo mismo se puede decir al respecto de los grafos ponderados o no ponderados, puesto que un grafo no ponderado puede ser siempre considerado un caso particular del ponderado en el que las aristas tienen peso 1.

En el ejemplo que proponemos en este trabajo, el problema se modeliza como un grafo bipartido ponderado, en el que la resolución se obtiene aplicando el algoritmo de Kuhn-Munkres implementado en el programa Mathematica. Este algoritmo proporciona un emparejamiento máximo de máximo peso, en el caso de que G=((X,Y), E), con (X, Y) una bipartición de V, sea un grafo bipartido completo ponderado, donde cardinal(X) = cardinal(Y).

3. Ponentes para una reunión de la ONU

3.1 Planteamiento del problema

El Consejo Económico y Social de la ONU le ha encargado a su vicepresidente español que organice una reunión preparatoria del examen ministerial anual que se celebra en el Palais des Nations en Ginebra (http://www.un.org/es).

Este año los discursos se centran en la educación. Ocho países (Alemania, Bangladesh, Malawi, Pakistán, Qatar, Venezuela, Senegal y Turquía) se han ofrecido voluntarios para realizar exposiciones orales sobre el tema en la reunión preparatoria.

Las exposiciones se centrarán en los progresos realizados en el ámbito de la educación en cada país y están previstas 6 conferencias para la reunión. El embajador solicita a cada país dos posibles candidatos para impartirlas.

Atendiendo a la disponibilidad de los candidatos propuestos y a la implicación y compromiso que, en opinión del equipo asesor del embajador, los países han demostrado en la mejora de la educación, se asigna a cada candidato una puntuación a fin de elegir a los mejores ponentes y conseguir que la reunión sea un éxito.

En la siguiente tabla se reflejan estos datos. La letra C indica conferencia, el resto se corresponden con las iniciales de los diferentes países y los subíndices diferencian a los dos candidatos propuestos por cada país al embajador.

Tabla 1. Puntuación de los candidatos

	A_1	A_2	B_1	B_2	M_1	M_2	P_1	P_2	Q_1	Q_2	V_1	V_2	S_1	S_2	T_1	T_2
C	8	4	6	8	4	7	3	6	9	7	9	6	2	5	5	5

Atendiendo a estos criterios, ¿cuáles serán los ponentes elegidos para realizar las 6 conferencias?

3.2 Resolución del problema

El primer paso para obtener la solución al problema será modelizarlo en el ámbito de la teoría de grafos. Dado que queremos escoger seis candidatos para que impartan sendas conferencias a lo largo de la reunión, es decir, encontrar parejas formadas por el representante de un país y la exposición de los progresos alcanzados en educación en éste, parece que lo adecuado es utilizar la teoría de emparejamientos (matching theory) en el caso particular de grafos bipartidos ponderados.

Para modelizar el problema como un grafo consideraremos 22 vértices de los que 16 representarán a los distintos candidatos (denotamos este subconjunto como P), los seis restantes representan las sesiones dedicadas a conferencias (subconjunto que denotamos como C). Las aristas estarán definidas entre P y C, es decir, uno de sus extremos es un vértice de P y el otro uno de C. Así, la arista (P_i, C_j) significará que el candidato P_i puede impartir su conferencia en la sesión C_j. Por tanto, el grafo G que vamos a definir es un grafo bipartido donde (P, C) constituye una bipartición del conjunto V de vértices.

Por otra parte, asociamos a cada arista (P_i, C_j) la puntuación asignada por el equipo asesor del embajador al candidato i para impartir su conferencia en la sesión j. Observamos que, como no hemos hecho distinción entre las diferentes sesiones, el grafo es bipartido completo y todas las aristas (P_i, C_j), j=1, 2,…, 6, tienen asociado el mismo peso, dichos pesos vienen reflejados en la Tabla 1.

Nuestro objetivo es asignar cada ponente a una y sólo una de las 6 sesiones, es decir, encontrar un emparejamiento máximo. Como además queremos garantizar el éxito de la reunión, buscamos que la distribución "sesión-ponente" sea lo más adecuada posible, lo que se corresponde con que elijamos de entre todos los emparejamientos máximos uno de máximo peso.

Concretando tenemos el grafo G_{ONU}=(V, E), donde V=(P, C), denotando P={A_1, A_2, B_1, B_2, M_1, M_2, P_1, P_2, Q_1, Q_2, V_1, V_2, S_1, S_2, T_1, T_2}, C={ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 } y E el conjunto de aristas. Podemos ver su representación en la Figura 1. La matriz de pesos asociada viene dada por A:

$$A = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&8&8&8&8&8\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&4&4&4&4&4\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&6&6&6&6&6\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&5&5\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&4&4&4&4&4\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&7&7&7&7&7\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&3&3&3&3&3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&6&6&6&6&6\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&9&9&9&9&9\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&7&7&7&7&7\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&9&9&9&9&9\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&6&6&6&6&6\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&2&2&2&2&2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&5&5\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&5&5\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&5&5\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Es conocido que en un grafo bipartido completo G=((X,Y), E), ponderado, donde cardinal(X) = cardinal(Y), la aplicación del algoritmo de Kuhn-Munkres proporciona un emparejamiento máximo de máximo peso en G (ver [2]).

El grafo G_{ONU} que modeliza nuestro problema es bipartido completo, pero el cardinal(P) ≠ cardinal(C), por lo que necesitamos un grafo auxiliar $\hat{G}_{ONU} = ((\hat{P}, \hat{C}), \hat{E})$ que contenga a G_{ONU} como subgrafo, cumpla las condiciones anteriores y tal que podamos obtener un emparejamiento máximo de máximo peso de G_{ONU} a partir del obtenido para $\hat{G}_{ONU}$.

En la Figura 2 podemos observar una representación del grafo $\hat{G}_{ONU}$ que definimos a continuación.

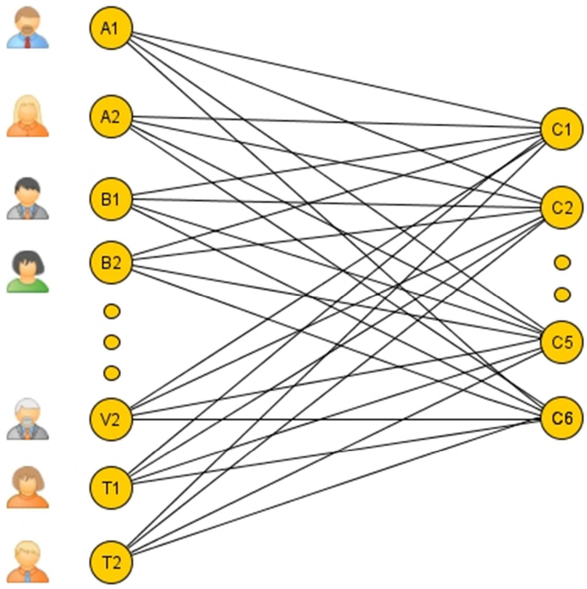

Figura 1. Grafo G_{ONU} que representa el problema inicial.

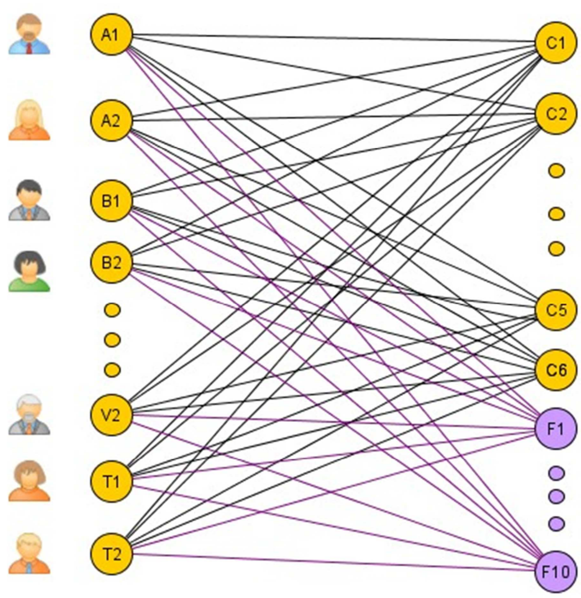

Figura 2. Grafo $\hat{G}_{ONU}$ donde se representan los vértices y aristas ficticios en morado.

En el nuevo grafo $\hat{G}_{ONU} = ((\hat{P},\hat{C}),\hat{E})$, $\hat{P} = P$ y $\hat{C}$ es el conjunto resultante de añadir a C diez vértices ficticios F_i, i=1,…,10, es decir, $\hat{C} = C \cup \{F_1,\ldots,F_{10}\}$. El conjunto de aristas $\hat{E}$ se obtiene añadiendo a E el mínimo número de aristas necesarias para que el nuevo grafo sea bipartido completo. Ponderamos todas ellas con el mismo valor para que no influyan en la elección del emparejamiento buscado en el problema original. La matriz de pesos en este caso viene dada por la matriz B siguiente:

$$B = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&8&8&8&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&4&4&4&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&6&6&6&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&4&4&4&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&7&7&7&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&3&3&3&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&6&6&6&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&9&9&9&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&7&7&7&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&9&9&9&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&6&6&6&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&2&2&2&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Puesto que el grafo $\hat{G}_{ONU}$ cumplen todas las hipótesis necesarias, ejecutando el algoritmo de Khun-Munkres, implementado en el programa Mathematica, obtenemos un emparejamiento máximo de máximo peso en $\hat{G}_{ONU}$ que denotamos por M_1:

M_1 = {{1,17}, {2,24}, {3,19}, {4,26}, {5,25}, {6,22}, {7,23}, {8,27}, {9,21}, {10,20}, {11,18}, {12,28}, {13,29}, {14,30}, {15,31}, {16,32}}, donde los vértices del 1 al 16 se corresponden con los dieciséis ponentes, del 17 al 22 con las seis conferencias y los restantes con los vértices ficticios añadidos al generar el grafo $\hat{G}_{ONU}$. De entre todas las aristas del emparejamiento M_1, sólo seis pertenecen al grafo original G_{ONU}, que son:

$$\{\{1,17\}, \{3,19\}, \{6,22\}, \{9,21\}, \{10,20\}, \{11,18\}\},$$

y constituyen el emparejamiento buscado. En términos del problema planteado esto significa que en la reunión expondrán: Alemania, Bangladesh, Malawi, Qatar y Venezuela, habiendo asignado conferencia a los dos representantes de Qatar.

Consideramos que sería conveniente que cada país realizase una única exposición. Debemos, por tanto, replantearnos la modelización realizada a fin de obtener una solución que contemple esta restricción.

Para ello, retomamos el problema original, modelizado por el grafo G_{ONU}. Introducimos nuevos vértices descarte D_i, i=1, …,8, y dos aristas que enlacen cada uno de ellos con los dos representantes de cada país, es decir, D_1 estaría enlazado con A_1 y A_2, D_2 enlazado con B_1 y B_2 y así sucesivamente. De esta manera, al calcular el emparejamiento, uno de los dos representantes de cada país será descartado al estar asociado con el correspondiente vértice descarte. En este momento, nuestro nuevo grafo auxiliar tendrá 30 vértices, donde 16 de ellos representan a los ponentes y los 14 restantes corresponden a las conferencias y a los vértices descarte. Para calcular el emparejamiento máximo de máximo peso tendremos que aplicar de nuevo el algoritmo de Khun-Munkres, cuyas condiciones de aplicación exigen que:

- ambos conjuntos de la bipartición de los vértices tengan el mismo número de elementos
- el grafo sea bipartido completo

Por ello, consideraremos un nuevo grafo auxiliar $\overline{G}_{ONU} = ((\overline{P}, \overline{C}), \overline{E})$ que contiene a G_{ONU} como subgrafo, donde $\overline{P} = P$ y $\overline{C}$ es el conjunto resultante de añadir a C ocho vértices descarte D_i, i=1,…,8 y dos ficticios F_i, i=1, 2, es decir, $\overline{C} = C \cup \{D_1, \ldots, D_8\} \cup \{F_1, F_2\}$. El conjunto de aristas $\overline{E}$ se obtiene añadiendo a E los siguientes enlaces:

- aristas que unen los representantes de cada país con su vértice descarte D_i correspondiente, ponderadas todas ellas con el mismo valor para que no influyan en el resultado obtenido
- aristas necesarias para que el nuevo grafo sea bipartido completo. Estas son de dos tipos:
  - las que enlazan los vértices ficticios F_i con todos los posibles ponentes, ponderadas con el mismo valor
  - las que enlazan los vértices descarte con el resto de conferenciantes a los que no están asociadas previamente, ponderadas con un valor muy pequeño para que aplicando el algoritmo no sean escogidas como resultado del emparejamiento

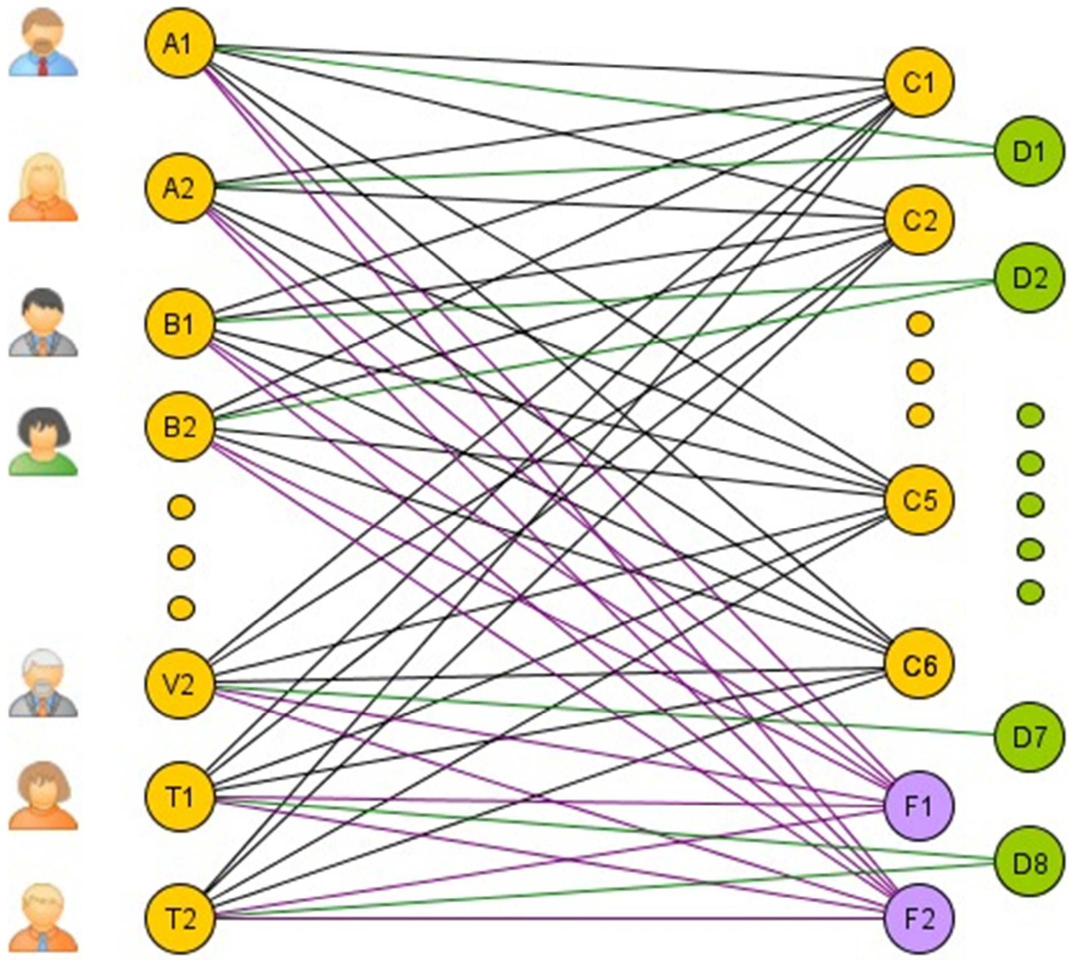

Figura 3. Grafo $\overline{G}_{ONU}$ donde se representan los vértices y aristas ficticias en morado y los vértices y aristas descarte en verde. Antes de formar el grafo bipartido completo el grado de los vértices descarte Di es 2

La matriz de pesos asociada al grafo $\overline{G}_{ONU}$ viene dada por:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & D \\ DT & 0 \end{pmatrix}$$

donde DT es la matriz transpuesta de la matriz D, dada por:

$$
D = \begin{pmatrix}
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & 1 & 1 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & 1 & 1 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 & 1 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

Aplicando el algoritmo de Khun-Munkres al grafo $\overline{G}_{ONU}$, obtenemos un nuevo emparejamiento M_2, dado por:

M_2 = {{1,17}, {2,23}, {3,19}, {4,24}, {5,25}, {6,22}, {7,26}, {8,20}, {9,21}, {10,27}, {11,18}, {12,28}, {13,29}, {14,32}, {15,30}, {16,31}},

donde los vértices del 1 al 16 se corresponden con los dieciséis ponentes, del 17 al 22 con las seis conferencias, del 23 al 30 los vértices descarte D_i y los dos restantes con los vértices ficticios. De entre todas las aristas del emparejamiento M_2, sólo seis pertenecen al grafo original G_{ONU}:

{{1,17}, {3,19}, {6,22}, {8,20}, {9,21}, {11,18}}

y constituyen el emparejamiento buscado. En términos de la organización de la reunión preparatoria esto significa que expondrán: Alemania, Bangladesh, Malawi, Pakistán, Qatar y Venezuela, lo que se ajusta a escoger un conferenciante de cada país.

4. Conclusiones

En la sección anterior mostramos la pauta para dar respuesta a las situaciones planteadas en la introducción, de forma que acercamos las matemáticas a nuestra vida cotidiana.

En el caso presentado hemos impuesto que cada país impartiera una sola conferencia en la reunión. Se podrían añadir otras restricciones, como por ejemplo problemas de agenda de los ponentes a la hora de impartir la conferencia en determinadas sesiones, etc.

Desde el punto de vista docente, consideramos que es conveniente abordar el tema de emparejamientos planteando un problema como el anterior en el caso más simple. Según el nivel del curso podemos mostrar como resolver el problema cuando existen restricciones de algún tipo. El paso siguiente será la incorporación al problema de otras nuevas, que pueden ser sugeridas por alumnos, y su posterior resolución.

Estas metodologías nos permiten abordar de forma más comprensible, didáctica y profunda, conceptos complicados de la teoría de grafos, como los emparejamientos, al utilizar la modelización de problemas realistas que interesen al alumnado.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo financiero de la ETSInf de la Universitat Politècnica de València. El tercer autor cuenta con el soporte financiero de la Unión Europea y de la Universitat Politècnica de València mediante los proyectos: 518132-LLP-1-FI-ERASMUS-FEXI *IN-CODE-Innovation Competencias Development* y el proyecto PYME A13/11 2912 *Desarrollo de rúbricas y situaciones de evaluación para competencias transversales relacionadas con la innovación.*

Referencias

[1] CHARTRAND, Gary; OELLERMAN, Ortrud R. *Applied and algorithmic graph theory*, pp. 161-178, McGraw Hill, 1993.

[2] JORDÁN LLUCH, Cristina. *Materiales docentes de la asignatura Estructuras Matemáticas para la Informática II*, http://www.upv.es/ocwasi/2010/6024 (Clicar en Información>Materiales docentes)

[3] JORDÁN LLUCH, Cristina; TORREGROSA SÁNCHEZ, Juan Ramón. *Introducción a la teoría de grafos y sus algoritmos*, pp. 157-211, Editorial Reverté, SPUPV- 96.865, Valencia (España), 1996.

[4] JORDÁN LLUCH, Cristina; TORREGROSA SÁNCHEZ, Juan Ramón. *Herramientas de la teoría de grafos para la modelización*, pp. 275-287, Modelling in Science Education and Learning, 2011.

[5] JORDÁN LLUCH, Cristina; BURRIEL, Jordi; HERRAIZ, Raquel. *Un problema a resolver con los algoritmos de caminos más cortos,* pp. 263-273, Modelling in Science Education and Learning, 2011.

[6] JORDÁN LLUCH, Cristina; SANABRIA CODESAL, Esther. *La Asignatura OCW Estructuras Matemáticas para la Informática II y los créditos ECTS,* pp. 178-190, Actas del congreso XIX Congreso Universitario de Innovación Educativa en Enseñanzas Técnicas XIX CUIEET, Barcelona, 2011.

Sobre las autoras:

Nombre: Cristina Jordán Lluch
Correo Electrónico: cjordan@mat.upv.es
Institución: Universitat Politècnica de València, España.

Nombre: Esther Sanabria Codesal
Correo Electrónico: esanabri@mat.upv.es
Institución: Universitat Politècnica de València, España.

Nombre: María José Pérez Peñalver
Correo Electrónico: mjperez@mat.upv.es
Institución: Universitat Politècnica de València, España.