Historias de Matemáticas

Ecuaciones, teorías y ciencias que las usan

Equations, theories and sciencies that use them

Rosa María Herrera

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

Volumen II, Número 2, pp. 105–114, ISSN 2174-0410
Recepción: 6 Jun'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Algunas ecuaciones resultan buenos modelos en problemas de la física alejados entre sí. Algunos modelos matemáticos suponen una abstracción subyacente en distintas teorías e incluso en diferentes ramas científicas. Algunas teorías nacen en cierto ambiente científico, pero trasladadas a otro resultan muy productivas e incluso crecen. Aquí se formulan algunos ejemplos de cada caso, se señala la estrategia de su construcción y se intenta indicar (explicar) su valor como herramienta científica.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales, Mecánica, Física de altas energías, Ecología.

Abstract

Some equations are good models in physical problems far from each other. Some mathematical models assume an abstraction underlying different theories and even in different scientific branches. Some theories are born in a scientific environment. But whether they are moved into another, they become very productive, and even growing. Some examples of each case are here formulate, the strategy of they construction are also indicated. Also I shall try here to sketch its value as scientific tool.

Keywords: Differential Equations, Mechanics, High-Energy Physics, Ecology.

1. Mathematics Everywhere

En la convicción de que la belleza está muy extendida, la matemática y el arte no son invitados desconocidos, la poesía, la música, la arquitectura... la astronomía y las otras ciencias que satisfacen nuestra curiosidad sobre el mundo. No es extraño que se encuentren elementos coincidentes en diferentes desarrollos científicos, sino por el contrario es un hecho conocido y constatado.

La combinación de ideas de campos diferentes, la evolución conceptual que conduce de unas ramas a otras y así se construyen los avances científicos. En estas notas se reseñan con propósito de resumen muy breve algunos ejemplos que una vez más significan la mirada matemática del mundo.

1.1. Overview

- Una posible *novedad iniciática* que aquí se presenta está en la idea de que la construcción de mecanismos que imitaban los movimientos que se observaban en el cielo precedieron al intento de matematización (geometrización) del mismo. Y que fue el alto grado de precisión que requería la mecanización correcta el que dio posiblemente origen al uso de la geometría como método indirecto de medición, que como método casi siempre directo se había probado de gran utilidad en la Tierra.

Seguramente el reto inicial de reproducir los ciclos asociados a los cambios observados tendría un carácter algo lúdico, el uso de medidas, ángulos, proporciones para poder trabajar a escala, no creo que fuera considerado de inicio, sino más bien que surgió de modo casi natural como una necesidad, para predecir cosechas, preparar viajes en las mejores condiciones y otras actividades similares que cada vez requerían más alta especialización y precisión.

La matematización del cielo resultó de una utilidad extrema para la elaboración posterior de teorías dinámicas.

- Una *segunda plausible novedad* que incumbe también, aunque de un modo a veces implícito, a la omnipresencia de la matemática en el desarrollo del conocimiento físico del mundo es la consideración de que ciertas teorías físicas firmemente consolidadas (lo cual suele significar sustentadas en un corpus matemático potente) actúan como modelo “metafórico”, como fuente de ideas útiles para afrontar problemas físicos de otros contextos (situaciones o sistemas físicos diferentes). Esto además sirve para comprobar que la abstracción última subyacente en muchas disciplinas bastante ajenas entre sí es ciertamente similar, aunque en muchos casos hay que afinar y ajustar la nomenclatura.

Esto, en mi opinión, se da en dos aspectos distintos y complementarios: en la investigación científica y en la enseñanza de la ciencia.

Aquí se presenta un ejemplo, pero hay algunos más.

El resto del artículo se articula en dos partes, una de contextualización y otra en la que señalan algunos ejemplos matemáticos completos de usos de abstracciones similares en diferentes ambientes.

I PARTE

2. La Mecánica Celeste, ciencia “modelo” y modélica

La consideración del Universo como mecanismo y en general la mecanización del cosmos representan quizá la primera manifestación de la mecanización general del conocimiento del mundo físico. A este hecho contribuyó la potente herramienta matemática que se desarrolló muy pronto y casi en paralelo y que fue perfectamente imbricada en el mecanicismo.

La geometría creció primero y dio paso después, sin retirarse, al análisis, y esta unión condujo a la casi perfecta mecánica racional. Salvo que los objetos de la mecánica racional no siempre “viven” en el mundo físico, son de una belleza extraordinaria y proporcionan mucha información e intuiciones valiosas...

2.1. Los primeros pasos en la mecanización-matematización del cosmos

La visión del cielo como un instrumento o como una herramienta era no tanto una elección como una necesidad en la Antigüedad, como se ha señalado previamente, nuestros ancestros necesitaban guiarse y la observación del cielo era la mejor ayuda, también para saber cuándo y cómo cultivar las cosechas y mejorarlas, para orientarse en los desplazamientos largos, para navegar, para predecir y para observar los *ciclos* de la naturaleza y hacer calendarios. El construir instrumentos a semejanza de lo que se veía en lo alto, era una manera de hacer asequible lo lejano, de imitar para aprender y entender, de hacer posiblemente más asequible y manejable lo que se veía.

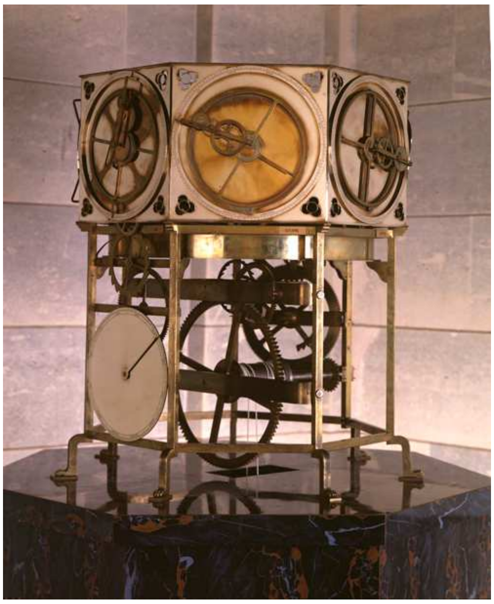

Figura 1. Astrarium de Giovanni Dondi, esta reconstrucción se debe a A. Segonds, E. Poulle y J.P. Verdet se encuentra en el Observatorio de París (es un modelo que funciona)

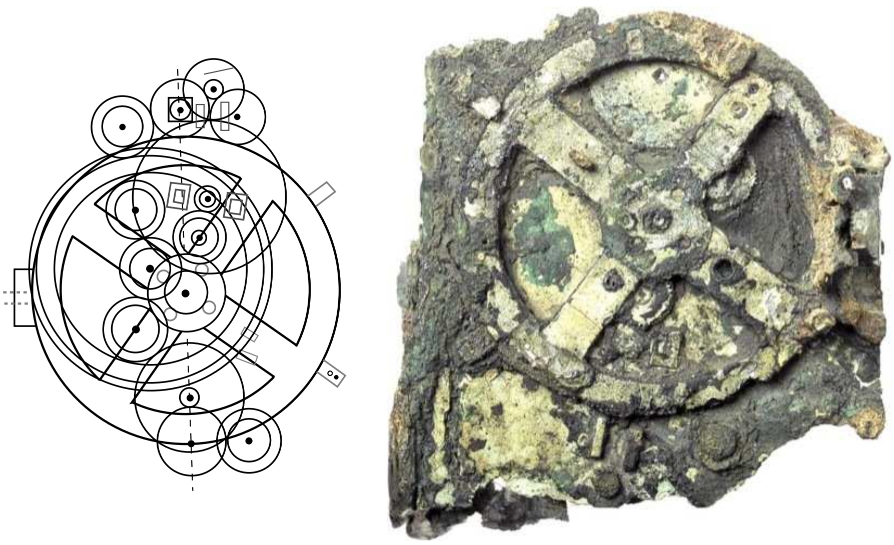

Figura 2. Mecanismo de Antikythera. Primer modelo de engranajes conocido, para determinar la posición de los planetas (la imagen es de Wikipedia).[3]

Así pues la matematización de la mirada del cielo surgió como una necesidad constructiva de los mecanismos que pretendían, al menos parcialmente, imitar a la gran maquinaria que es el cielo. Después el conocimiento se fue depurando se hizo más abstracto, es decir, más general, y entonces aparecieron los triángulos, los ángulos, las mediciones, la geometría. La matemática fue sirviendo poco a poco para "recrear el cielo" para hacerlo nuestro ambiente natural.

2.2. El siglo XVII y siguientes

Tras la ardua polémica proveniente de tiempos griegos entre el geocentrismo personificado en Ptolomeo y el heliocentrismo que finalmente quedaría asociado a la figura de Copérnico, a pesar de no ser el único ni muchos menos el primero, pero en cuya obra [2] quedaría para la posteridad la recopilación y los conocimientos del cosmos según la mirada heliocéntrica.

Los trabajos geo-heliocéntricos del astrónomo danés Tycho Brahe fueron una puerta que hacía falta abrir y por ella entró Kepler, uno de los pioneros relevantes de la Mecánica Celeste, tras él y muy de cerca Newton y luego los demás. Así:

i) Los problemas del movimiento de los objetos del Sistema Solar quedan dibujados por la tres leyes del movimiento de Kepler y la ley de Gravitación Universal de Newton.

ii) El esquema conceptual matemático de la Mecánica Celeste fue mejorado por Laplace, y la Mecánica Racional de Lagrange y Hamilton.

iii) Un "pequeño" salto hasta Poincaré a finales y principios del siglo XX [12] reavivaron el problema que ha servido de motivo de trabajos matemáticos y físicos, principalmente, durante la pasada centuria y los comienzos de la presente.

2.3. Ecuaciones diferenciales en Mecánica Celeste

i) Los problemas que se proponen en la dinámica del Sistema Solar se expresan matemáticamente como ecuaciones diferenciales del movimiento, muchos de los cuales planteados en términos analíticos son irresolubles (salvo casos particulares), sin embargo han encontrado acomodo en otros ambientes, como la topología, que se ha revelado muy útil para tratarlos que fueron iniciados Poincaré, pero arranca de más atrás de algunas ideas que el matemático francés pudo sacar de sus lecturas de Riemann y otros matemáticos.

ii) Las teorías sobre la estabilidad dinámica del Sistema Solar, teoremas KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) resultaron de una gran utilidad en la Física de Altas Energías, como la construcción del LHC, que a su vez refinó la teoría y le devolvió las mejoras a la Mecánica Celeste que supo usar.

iii) La computación es un pilar más joven del método científico, proporciona una forma de refuerzo a la modelización, al cálculo y al control y se convierte así en una herramienta potente imprescindible en la investigación del siglo XX, que sustenta la modelización y la contrastación de las teorías con las realidad y que a su vez supone una herramienta de control.

II PARTE

3. Ecuaciones periódicas en contextos físicos distintos

En esta segunda parte se sustantivan a modo de esbozo y muy esquemáticamente algunos de los ejemplos mostrados en la primera parte.

Las ecuaciones periódicas aparecen al forzar un sistema o una ecuación autónoma de segundo orden como la siguiente, que está dada en el plano,

$$u'' + g(u, u') = 0 \tag{1}$$

pero que se puede ampliar a dimensiones superiores.

Por ejemplo: Ecuación general del oscilador armónico: $u'' + cu' + au = f(t)$ donde $c > 0$ con fricción, $c = 0$ sin fricción, $a > 0$, $f(t)$ fuerza periódica, periodo $T > 0$. Obsérvese que la fuerza periódica es conocida.

Volvemos a la ecuación autónoma (1), si se introduce una fuerza periódica conocida, como en el ejemplo que hemos señalado del oscilador armónico, convirtiéndola en

$$u'' + g(u, u') = f(t) \tag{2}$$

se sabe que se corresponde con la descripción de dos situaciones físicas diferentes, una mecánica y otra procedente de la electrónica.

En el caso mecánico, surge al estudiar el movimiento de una partícula, $u(t)$ representa la posición y $f(t)$ la fuerza externa.

En un circuito eléctrico $u(t)$ es la corriente eléctrica y la primitiva de $f(t)$ es la fuerza electromotriz.

4. Ejemplos análogos no lineales

En este apartado se esbozan problemas similares, pero en el caso no lineal, así se muestra un problema de la Mecánica Celeste, otro procedente de la electrónica y un tercero de la ingeniería.

4.1. Movimiento de partículas

En Mecánica Celeste la ecuación del péndulo forzado resulta un modelo muy bueno para describir el movimiento de una partícula según un círculo que obedece la ley de gravitación universal y está sometida al momento de una fuerza.

$$x'' + cx' + a \operatorname{sen} x = f(t)$$

Un caso particular muy interesante se encuentra estudiando el problema de Sitnikov de los tres cuerpos. Este se corresponde con un problema de dimensión superior [6], tres de estas dimensiones corresponden a la posición y otras tres a la velocidad en un plano invariante.

4.2. El oscilador de Van der Pol

La ecuación de Van der Pol forzada con amortiguamiento no lineal:

$$V'' - c(1 - V^2)V' + aV = f(t)$$

Esta ecuación modela un circuito con un elemento resistivo no lineal y con retroalimentación positiva. El parámetro de amortiguamiento es $c > 0$. La variable dinámica es V (diferencia de potencial del circuito).

El ingeniero Van der Pol con la información que obtenía proveniente de esta ecuación construyó en 1920 los primeros receptores de radio. La estabilidad del circuito estudiada desde el punto de vista de los sistemas dinámicos permite analizar la posible existencia de ciclos límite.

4.3. La ecuación del puente colgante

La cuestión de las oscilaciones verticales de un puente en suspensión también se puede considerar un problema que tiene solución en un plano invariante (tal como ocurre en el problema de Sitnikov). Los ingenieros escriben estas oscilaciones verticales mediante la familia de ecuaciones de Lazer y MacKenna.

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x), \qquad x \in [0,L]$$

Con las condiciones de contorno

$$u(t,0) = u(t,L) = 0, \;\; u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,L) = 0$$

El eje vertical se orienta hacia abajo, por tanto, para $u > 0$ está por debajo de la horizontal ($u = 0$), $f(t,x)$ en realidad tiene dos componentes, una asociada al peso del puente y otra a factores externos; por ejemplo, el aire y otros.

Los ejemplos enunciados en el apartado anterior se encuadran en un marco de las ciencias "duras", en esta sección cambiamos un poco de paisaje.

Una manera de "elaborar" sistemas periódicos es un camino geométrico de argumento (o ambiente) ecológico. La idea procede del matemático italiano Vito Volterra también trabajada por Alfred J. Lotka. El procedimiento es relativamente sencillo si se está familiarizado con la operativa.

Se elige un sistema autónomo en el plano, de tal manera que sea dependiente de ciertos parámetros $\alpha, \beta, \ldots$ es posible convertir este sistema en periódico haciendo que los parámetros tengan dependencia periódica:

$$\alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t), \ldots$$

Si se tiene alguna noción de Ecología, se sabe que en algunas poblaciones se observan efectos estacionales en la proliferación de individuos (tomando periodos de un año), así se puede considerar que la población fluctúa de manera aproximadamente periódica. El sistema de L-V se puede escribir

$$u' = u(\alpha(t) - \beta(t)u - \gamma(t)v), \quad v' = v(\delta(t) \pm e(t)u - \zeta(t)v)$$

$\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ son periódicas de periodo T; β, γ, e, ζ son no negativos; u es la presa, se escribe el doble signo $\pm$ para distinguir los casos de la presa y el depredador...

4.4. La conexión matemática: de la Mecánica a la Ecología

El estudio de la estabilidad dinámica de las órbitas descritas en la Mecánica Celeste, permite en el siglo XX desarrollar la teoría KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser).

Los teoremas KAM se utilizan para la construcción de los circuitos del LHC (Large Electron Collider) por donde han de circular las partículas subátomicas de alta energía que se hacen colisionar para estudiar la constitución de la materia (asunto que ya se ha indicado en párrafos previos por su importancia).

La Ecología se ocupa de las interacciones entre organismos vivientes. Estas relaciones son cruciales para diseñar las leyes que rigen la dinámica de las poblaciones (digamos, en el espacio y el tiempo). Vito Volterra y Umberto Dancona estudiaron el mecanismo subyacente. Véase por ejemplo [5]

"A mayor complejidad trófica más estable es el sistema que lo sostiene".

Se trata de una formulación que no produce mucho entusiasmo si se piensa exclusivamente desde el punto de vista de la estabilidad matemática; sin embargo, al mismo tiempo es muy utilizada, el concepto más escabroso desde esta perspectiva es el de la estabilidad matemática.

Preguntas para una discusión *ad hoc*

¿Tiene el mismo sentido la estabilidad de la solución de una ecuación periódica de un sistema mecánico que en un sistema complejo tipo biológico?

Puesto que parece que tiene alguna validez aplicar una "correspondencia" entre el concepto mecánico-matemático y el ecológico, cabe preguntarse: ¿qué tipo de inconvenientes puede presentar una mecanización de este tipo en el estudio de las poblaciones y de su comportamiento?, ¿qué restricciones conlleva?

4.5. Familias de ecuaciones periódicas para afrontar otros problemas de las ciencias

Existen otros problemas que se pueden tratar con sistemas de ecuaciones periódicas y obtener resultados muy satisfactorios. Entregarse, de inicio, al estudio de los mapas de Poincaré es una manera conveniente, pero se puede ampliar y sistematizar enormemente el campo de las ecuaciones periódicas.

Las ecuaciones diferenciales también se están aplicando a comportamientos sociales y conductas humanas en distintas situaciones, aunque el resultado es muy desigual, en los sistemas complejos los modelos no pasan de ser bocetos o caricaturas, que presentan un interés más didáctico que científico, pero no es desdeñable.

Colofón para enamorados

El amor se escribe en caracteres matemáticos. El modelo de Strogatz [13]. En un brevísimo artículo, Strogatz inició una etapa en el estudio de los sistemas dinámicos aplicados al estudio de las relaciones interpersonales, un ambiente más bien controvertido desde el punto de vista matemático. El modelo propuesto es de una gran sencillez y posteriores trabajos lo han mejorado considerablemente, aunque sigue siendo un boceto lleno de carencias y, por tanto, imperfecto; sin embargo, cabe suponerlo como una manera divertida de introducirse y empezar a aprender a modelizar mediante ecuaciones diferenciales.

dr/dt = - aj, dj/dt = br,

where

r(t)* = Romeo's love / hate for Juliet at time *t

j(t)* = *Juliet*'s love / hate for Romeo at time *t

Positive values of r, j signify love, negative values signify hate. The parameters a, b are positive, to be consistent with the story

Figura 3. Fragmento artículo seminal de Strogatz.[13]

Comentarios finales (provisionales)

Los problemas de la Mecánica están en sintonía matemática con los problemas de *competencia* en la dinámica de poblaciones; en estos modelos la manera de encontrar la estabilidad dinámica se conoce y se trabaja.

En ambos campos la estabilidad matemática se manifiesta como equilibrio[1] de los sistemas. Para buscar el origen de esta coincidencia o al menos cierta similitud habría que buscar la abstracción común subyacente, piénsese en la ciencia física.

Según Poincaré, los 5 o 6 principios sobre los que se construye la Física (segunda ley de Newton, ley de acción y reacción, principio de conservación de la energía, principio de Carnot, principio de relatividad) todos de carácter físico y claramente competitivo, además está "principio de mínima acción" cuyo entidad es más difícil de adjudicar a un ambiente concreto, pues pertenece a varios ámbitos. Cabría decir que a primera vista su naturaleza es tan matemática como metafísico su origen y sus manifestaciones pertenecen al mundo físico. Tal es su riqueza.

Las líneas generales aquí presentadas son familiares a quienes trabajan en estos campos, puesto que se vienen desarrollando en decenios anteriores, pero se sigue trabajando en ello y se están produciendo pequeños avances constantemente.

Por ejemplo, algunos especialistas en algunas ramas biológicas ponen a nuestra disposición información que puede resultar un reto en sentido matemático, y que nos hacen pensar en otras posibles perspectivas sobre las cuales empezamos a trabajar, e ignoro qué nuevo enfoque puedan proporcionar sobre el mundo físico, es para mí un problema abierto que se halla en estado larvario en mi cerebro, veremos, qué caminos (o no) pueden encontrarse, y en caso de su inexistencia o inviabilidad, las razones y quién sabe nuevas vías insospechadas.

Referencias

[1] BASDEVANT, Jean-Louis. *Le principe de moindre action et les principies variationnels en physique*, pp. 10-15, Vuibert, París, 2010.

[2] COPÉRNICO, Nicolás. *Sobre las revoluciones (de los orbes celestes)*, Tecnos, Madrid, 2009.

[3] FREETH, Tony, and al., *Decoding the ancient Greek astronomical calculator known as the Antikythera mechanism*, "Nature", 444 pp. 587-591.

[4] FEYNMAN, Richard. *The Character of Physical Law*, Cambridge EUA, 1965, 2006.

[5] GATTO, Marino. *Matematica ed Ecologia: un'interazione feconda*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Sez. A, pp. 515-540 La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, V-A, 2002.

[1] Al menos en alguno de los sentidos físicos de la expresión.

[6] HERRERA, Rosa M. *Metaphors, Solar Systems and Scientific Research*, CELMEC, Viterbo (Italy, 2009), & some improvements 14th CLMPS Nancy (France, 2011).

[7] HOLTON, Gerald. *Introduction to Concepts and Theories in Physical Science* (2º ed) Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachussets, ed. español, Ed. Reverté, 1988.

[8] LEMONS, Don S. *"Perfect Form (variational principles, methods, and Applications in Elementary Physics)"*. pp. 17-25 Princeton Univ. Press,1997.

[9] MARTIN-ROBINE, Florence. *Histoire du principe de moindre action. Trois siécles de principes variationnels de Fermat à Feynman*, Vuibert, París 2009.

[10] MARTÍNEZ ARIAS, Alfonso. *Encounters at a boundary: a (very) brief history of the interactions between Physics and Biology*.

[11] MOSER, Jürgen, K: *Is the Solar System Stable?* In The Mathematical Intelligencer pp. 65-71, 1978.

[12] POINCARÉ, Henri. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthiers-Villars et fils, 1899.

[13] STROGRATZ, Steven H. *Love affairs and differential equations*, Mathematics Magazine, 1988.

Sobre la autora:
Nombre: Rosa María Herrera
Correo electrónico: herrera.rm@gmail.com
Institución: APYCE.