

# Aplicación de las ecuaciones de Lagrange para un sistema rotatorio con desalineamiento angular

## Application of Lagrange equations for a rotating system with angular misalignment

Enrique Esteban Niebles Nuñez<sup>1</sup>; Ventura Muñoz Yi<sup>2</sup>; Jovanny Pacheco<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Estudiante de Doctorado en Ingeniería Mecánica. Profesor Tiempo Completo del Programa de Ingeniería Mecánica de la Universidad Autónoma del Caribe. Grupo de Investigación en Materiales, Procesos y Tecnologías de Fabricación – IMTEF.

<sup>2</sup>Estudiante de Doctorado en Ingeniería Mecánica. Profesor Tiempo Completo del Programa de Ingeniería Mecánica de la Universidad del Norte. Grupo de Investigación en Materiales, Procesos y Diseño – GIMYP.

<sup>3</sup>Doctor en Ingeniería Mecánica. Profesor Tiempo Completo del Programa de Ingeniería Mecánica de la Universidad del Norte. Grupo de Investigación en Materiales, Procesos y Diseño – GIMYP.  
eniebles@uac.edu.co, vmunoz@uninorte.edu.co

Recibido 20/05/11, Aceptado 2/11/2011

### Resumen

El desbalanceo del motor y el desalineamiento son las causas principales de la generación de vibraciones en las máquinas rotativas. Estos problemas ocasionan daños en los rodamientos, árbol de transmisión y acoples. El objetivo de este estudio es analizar el comportamiento de rotación de un árbol de transmisión con un desalineamiento angular inducido. Esta primera parte consiste en desarrollar un modelo analítico utilizando las ecuaciones de Lagrange, teniendo en cuenta la energía disipativa de los rodamientos y el efecto del momento inercial de la masa del árbol. La metodología y los resultados obtenidos mostraron una buena correlación de los parámetros que caracterizan el desalineamiento angular.

**Palabras Clave:** Desalineamiento angular, árbol de transmisión, análisis dinámico, ecuación de Lagrange

### Abstract

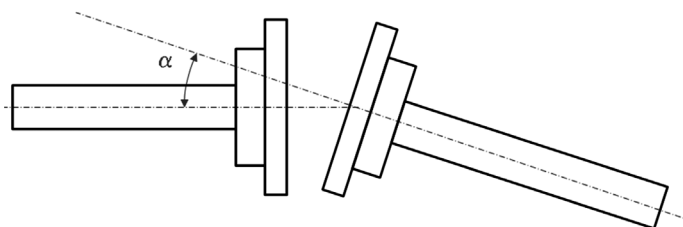
The motor unbalance and misalignment are the main causes of the generation of vibrations in rotating machinery. These problems cause damage to the bearings and shaft couplings. The aim of this study is to analyze the behavior of a rotating shaft with an angular misalignment induced. This first part is to develop an analytical model using the Lagrange equations, taking into account the dissipative energy of the bearings and the effect of the inertial moment of the mass of the shaft. The methodology and the results showed a good correlation between the parameters characterizing the angular misalignment.

**Keywords:** Angular misalignment, shaft, dynamic analysis, Lagrange's equation.

## 1. INTRODUCCIÓN

El desbalanceo del motor y el desalineamiento son los problemas principales de las máquinas rotativas. En la industria del 30% del tiempo de trabajo de la máquina es debido a la máquina desalineada. A pesar del incremento de investigaciones sobre el tema y en análisis vibracional en máquinas rotativas, todavía existen muchos efectos combinados que no explican con exactitud la causa del problema. Muchas veces la desalineación angular, ver figura 1, ocurre por un montaje incorrecto del sistema mecánico o alguna desviación coaxial de los rodamientos, Vance (1988) y Goodman (1989). Sin embargo, en la realidad no se puede alcanzar la alineación perfecta entre los ejes de conducción y sus componentes de rotación. Gibbons (1976) y Arumugam et al (1995) modelaron las fuerzas de reacción y momentos de acoplamiento flexible no alineado [5].

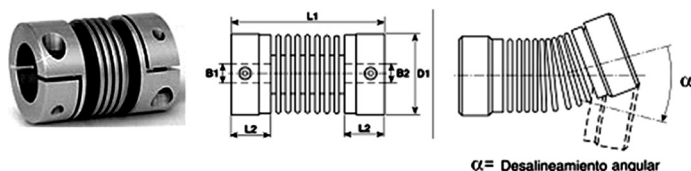
**Figura 1.** Desalineamiento angular  
**Figure 1.** Angular misalignment



Fuente: Adaptación propia.

El efecto de una junta universal (junta cardánica) es una de las fuentes de vibración más importante que contribuye al desalineamiento del eje, como se observa en varios experimentos realizados [1]. Para el caso de estudio se dispone de un acople flexible como se muestra en la figura 2.

**Figura 2.** Acople flexible  
**Figure 2.** Flexible coupling



Fuente: Firma Huco Dynatork, <http://www.huco.com>.

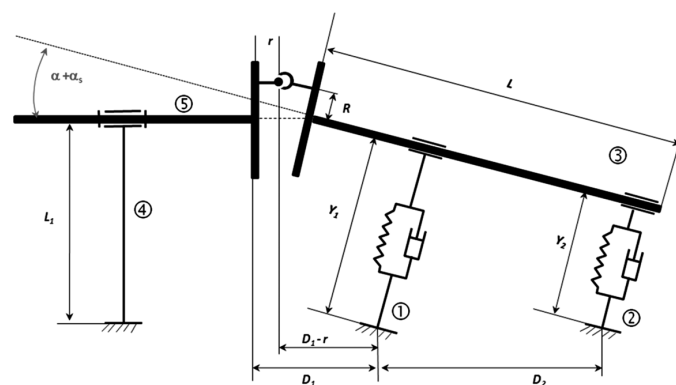
Xu y Marangoni (1994a, b) mostraban que las respuestas de vibraciones debido al acoplamiento desalineación principalmente ocurren también en los múltiplos de la velocidad de rotación. Simón (1992) evaluó el efecto de la desalineación de acoplamiento en la vibración de rodamiento, adaptación justo el emocionante fuerzas o momentos debido a la falta de alineación.

## MODELACIÓN DEL SISTEMA DE DESALINEAMIENTO ANGULAR

El modelo incluye un acoplamiento flexible, y dos rodamientos representado por un resorte con rigidez y sistema de amortiguación específico.

Con referencia al banco de ensayo de vibraciones, "Machinery Fault Simulator – Lite (MFS-Lite)" y varios esquemas de modelos dinámicos generalizados [13] [14], se propuso un modelo dinámico con desalineamiento angular, ver figura 3. El sistema está formado por el árbol de transmisión inducido ⑤, la cual transmite un torque al árbol ③, a través de un acople flexible, donde el árbol conducido está soportado mediante dos rodamientos elásticos ① y ②, respectivamente. Inicialmente el sistema tiene una desviación angular constante, debido a desajuste inducido en el acoplamiento flexible.

**Figura 3.** Modelo dinámico describiendo la desviación angular  
**Figure 3.** Dynamic model describing the angular deviation



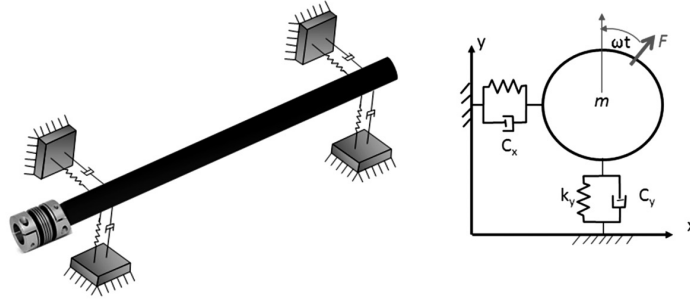
Fuente: Adaptación modificada [3] [13] para un banco de prueba de vibraciones "Machinery Fault Simulator – Lite (MFS-Lite)".

En la vida real de las máquinas rotativas se presenta desalineamiento angular en dos planos, ver figura 4; pero para propósitos de simplificación de nuestro modelo dinámico, asumimos que sólo hay desviación angular en un solo plano, por lo tanto el sistema estudiado tiene un grado de libertad  $\alpha(t)$ , correspondiente a una pequeña variación de la posición del árbol receptor fijado con una desviación angular en función del tiempo.

### Restricciones del sistema:

- El eje es un material isotrópico, flexible y con masa.
- Se considera que el eje de la chumacera es coaxial al eje del rodamiento y existe sólo desviación angular en un solo plano.
- No se consideran masas en las chumaceras.
- Se consideran los efectos en el acople y rodamientos asumiendo ángulos de inclinación pequeños.
- Las vibraciones axiales y torsionales del sistema se desprecian.

**Figura 4.** Distribución física y espacial del modelo dinámico  
**Figure 4.** Physical and spatial distribution of the dynamic model



Fuente: Adaptación propia.

Según el análisis dinámico del sistema, observamos que el resorte está sometido a una compresión inducida por el efecto del movimiento angular  $\alpha_t = \alpha_E + \alpha$  y el movimiento oscilatorio debido al propio resorte. La dimensión final resorte ① es, ver figura (5):

$$Y_1 = L_1 - (D_1 - r) \tan(\alpha_E + \alpha) - R \cos \theta (1 - \cos(\alpha_E + \alpha)) \quad (1)$$

La distancia que se comprime el resorte ① con respecto a su longitud inicial será igual a:

$$\Delta Y_1 = (D_1 - r) \tan(\alpha_E + \alpha) - \frac{L_1 [1 - \cos(\alpha_E + \alpha)]}{\cos(\alpha_E + \alpha)} - R \cos \theta (1 - \cos(\alpha_E + \alpha)) \quad (2)$$

De igual forma calculamos la compresión del resorte ② :

$$\Delta Y_2 = (D_1 - r + D_2) \tan(\alpha_E + \alpha) - \frac{L_1 [1 - \cos(\alpha_E + \alpha)]}{\cos(\alpha_E + \alpha)} - R \cos \theta (1 - \cos(\alpha_E + \alpha)) \quad (3)$$

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Las ecuaciones que gobiernan un modelo de vibración discreto puede expresarse en forma matricial como:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\}_a + [C]\{\dot{q}(t)\}_a + [K]\{q(t)\}_a = \{f(t)\}_a \quad (4)$$

Donde  $[M]$ ,  $[C]$  y  $[K]$  son las masas del sistema, amortiguación y matrices de rigidez respectivamente y  $\{q(t)\}_a$  y  $\{f(t)\}_a$  están definidas con los desplazamientos y vectores de carga generalizados respectivamente. Las precargas del rodamiento,  $\{f\}_{bm}$ , se asumen constante para garantizar la matriz invariante del tiempo  $[K]_{bm}$ .

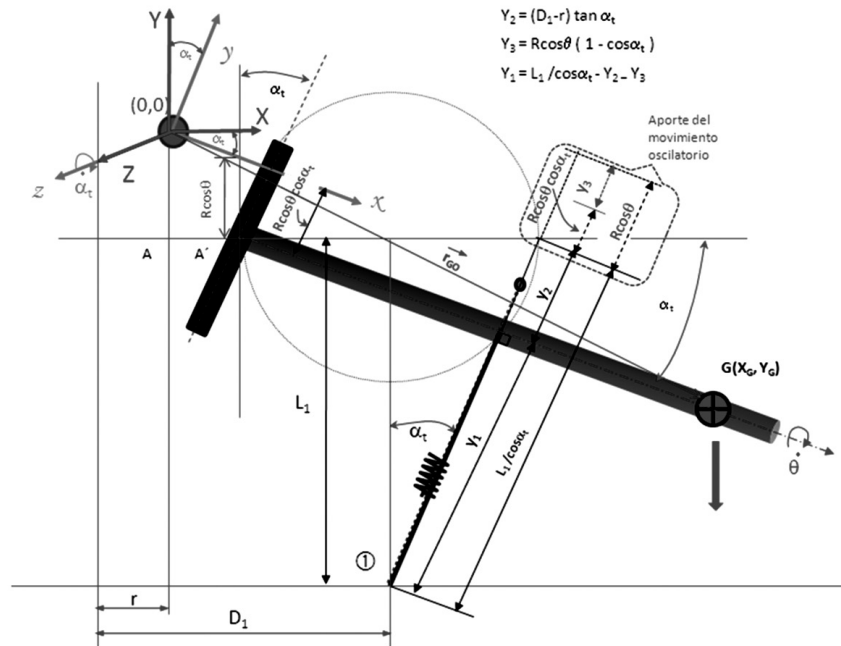
Se asume la matriz de energía equivalente de la amortiguación,  $[C_b] = \sigma[K]_{bm}$ , para el mecanismo de disipación de energía en el rodamiento, donde  $\sigma$  es la constante de proporcionalidad de amortiguación de Rayleigh [3][6]. Un sistema de solución utilizado para determinar criterios

de estabilidad para sistemas de rotodinámicos es solucionándolo por medio de los valores propios y su naturaleza para ejes soportados por rodamiento en un conjunto de ecuaciones de movimiento [7] [8]. Para el caso de maquinarias rotativas linealizadas, el criterio de Routh-Hurwitz es también utilizado para estos sistemas [9].

La consideración de energía en un sistema dinámico con el uso de la ecuación de Lagrange es un método muy útil de análisis para ciertos sistemas físicos complejos. Este método de energía nos permite escribir las ecuaciones de movimiento en función del conjunto de coordenadas generalizadas del sistema. Las coordenadas generalizadas son un conjunto de parámetros independientes que especifica completamente la localización del sistema y son independientes de cualquier restricción.

La forma fundamental de la ecuación de Lagrange puede ser escrita en términos de las coordenadas generalizadas como [10] [11] [12].

**Figura 5.** Análisis cinemático y dinámico del resorte hasta su posición final ( $y_1$ )  
**Figure 5.** Kinematic and dynamic analysis of the spring to its end position ( $y_1$ )



Fuente: Adaptación propia.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_w} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_w} \right) - \frac{\partial(T)}{\partial q_w} + \frac{\partial(V)}{\partial q_w} + \frac{\partial(ED)}{\partial \dot{q}_w} = Q_w, \quad w = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (5)$$

Donde es la energía cinética total del sistema, es la energía potencial del sistema, DE es la función de la energía de disipación de Rayleigh cuando la amortiguación es lineal (es la mitad de la tasa en la cual la energía se disipa de manera que para los amortiguamientos viscosos  $DE = \frac{1}{2}c \sum^n \Delta y_i^2$  y en forma vectorial sería  $DE = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T [C] \{\dot{q}\}$ ,  $Q_w$ , es una fuerza externa generalizada (o fuerza de amortiguamiento no-lineal) actuando en el sistema, y  $q_w$ , es una coordenada generalizada que describe la posición del sistema. [10] [11]

### CÁLCULO DE LA ENERGÍA POTENCIAL.

Nuestro sistema de referencia estará en la parte superior, donde se encuentra la junta esférica conformada por el acople flexible, ver figura 2. Consideramos que el centro de masa del árbol de transmisión ( $x_G, y_G$ ) se encuentra ubicado con respecto a nuestro sistema de coordenadas de referencia:

$$x_G = -r^2 [\sin^2(\alpha_E + \alpha) + 1] + \frac{L}{2}$$

$$y_G = R - R \cos \omega t [1 - \cos(\alpha_E + \alpha)]$$

Las velocidades respectivas son:

$$\dot{x}_G = -2r^2 \dot{\alpha} \sin(\alpha_E + \alpha) \cos(\alpha_E + \alpha)$$

$$\dot{y}_G = R [1 - \cos(\alpha_E + \alpha)] [\omega \sin \omega t - \dot{\alpha} \cos \omega t \sin(\alpha_E + \alpha)]$$

Observando el movimiento de oscilación del sistema, los resortes se comprimen una distancia  $\Delta Y_1$  y  $\Delta Y_2$ , respectivamente, existe una contribución debido al movimiento angular inducido por  $\alpha$ . La compresión de los resortes está dada en las ecuaciones (2) y (3):

La Energía potencial de los resortes será igual a:

$$V_{r_{\theta+\phi}} = \frac{1}{2}k(\Delta Y_1^2 + \Delta Y_2^2) \quad (10)$$

$$V_{r_{\theta+\phi}} = (k((D_1 - r + D_2)(\tan(\alpha_E + \alpha) + ([1 + r \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha)][\cos(\alpha_E + \alpha) - 1]/\cos^2(\alpha_E + \alpha) + ((D_1 - r)\tan(\alpha_E + \alpha) + (pf/\cos^2(\alpha_E + \alpha)))/2)) \quad (10a)$$

Se considera que la masa del árbol de transmisión está concentrada en el punto  $G = (X_G, Y_G)$ . La energía potencial debida que aporta el árbol de trasmisión es debida a su masa y al momento oscilatorio:

$$V_{eje} = \frac{L}{2}mg\sin(\alpha_e + \alpha) + Rmg\cos \omega t \cos(\alpha_e + \alpha) [\cos(\alpha_e + \alpha) - 1]$$

Sumando (10a) y (11) obtenemos la Energía potencial total del sistema:

$$V_{tot} = k(((D_1 + D_2 - r)\tan(\alpha_E + \alpha) + ([L_1 + r \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha)][\cos(\alpha_E + \alpha) - 1]/\cos^2(\alpha_E + \alpha) + ((D_1 - r)\tan(\alpha_E + \alpha) + [1 + r \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha)][\cos(\alpha_E + \alpha) - 1]/\cos^2(\alpha_E + \alpha))/2 + (Lgm \sin(\alpha_E + \alpha))/2 + Rgm \cos \omega t [\cos(\alpha_E + \alpha) - 1]) \quad (11)$$

## CALCULO DE LA ENERGÍA CINÉTICA

Para la energía cinética hay que tener en cuenta el movimiento traslacional y rotacional del centro de masa  $G(X_G, Y_G)$  con respecto a nuestra posición de referencia:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{v}_{OG} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{G/O}$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{OG}\hat{i} + \vec{v}_{OG}\hat{j} + [\dot{\theta}\hat{i} + \dot{\alpha}\hat{k}] \times [X_G\hat{i} + Y_G\hat{j}] \quad (12)$$

Reemplazando en (6), (7), (8) y (9) en (12) y agrupando términos tenemos las direcciones  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ :

$$\vec{v}_G = \{-2r^2\dot{\alpha} \sin(\alpha_E + \alpha) \cos(\alpha_E + \alpha) - \dot{\alpha}[R - R \cos \omega t [1 - \cos(\alpha_E + \alpha)]]\}\hat{i} + \{R[1 - \cos(\alpha_E + \alpha)][\omega \sin \omega t - \dot{\alpha} \cos \omega t \sin(\alpha_E + \alpha)] + \dot{\alpha}[-2r^2\dot{\alpha} \sin(\alpha_E + \alpha) \cos(\alpha_E + \alpha)]\}\hat{j} + \dot{\theta}[R - R \cos \omega t [1 - \cos(\alpha_E + \alpha)]]\hat{k}$$

El componente traslacional de la Energía cinética será:

$$T_{Tras} = \frac{1}{2}m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G \quad (14)$$

Donde:

$$T_{\text{Tras}} = \frac{m}{2} \left\{ \dot{\alpha} r^2 \sin(2(\alpha_E + \alpha)) + \dot{\alpha} [R + R \cos \omega t (\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)] \right\}^2 \\ + \omega^2 [R + R \cos \omega t (\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)]^2 \\ + \left\{ \dot{\alpha} \left( \frac{L}{2} - r^2 \sin^2(\alpha_E + \alpha) + 1 \right) \right. \\ \left. - R(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)(\omega \sin \omega t - \dot{\alpha} \sin(\alpha_E + \alpha) \cos \omega t) \right\}^2 \Bigg\}$$

El componente de la energía cinética debido al movimiento rotacional será igual:

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_G$$

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} [\vec{I}_{xx} \hat{i} \cdot \vec{\omega}_x \hat{i} + \vec{I}_{yy} \hat{j} \cdot \vec{\omega}_y \hat{j} + \vec{I}_{zz} \hat{k} \cdot \vec{\omega}_z \hat{k}]$$

Donde:

$$\vec{\omega}_x \hat{i} = \omega \quad ; \quad \vec{\omega}_y \hat{j} = 0 \quad ; \quad \vec{\omega}_z \hat{k} = \dot{\alpha}$$

Aplicando el teorema de Steiner, para momentos de inercias paralelos al eje de referencia:

$$\vec{I}_{yy} = \vec{I}_{zz} = \frac{1}{12} mL^2 + ma^2$$

Donde  $a$  es la distancia perpendicular al eje de giro con respecto a nuestro eje de referencia  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  respectivamente, ver Figura 5.

$$T_{\text{Rot}} = \frac{mL^2}{24} + \frac{m\dot{\alpha}}{2} [R^2 \sin^2(\alpha_E + \alpha) + L/2 + 1] + R^2 m \omega \cos^2(\alpha_E + \alpha)/2 \quad (16)$$

Sumando (15) y (16) obtenemos la Energía cinética total del sistema:

$$E_{\text{ktot}} = \frac{mL^2}{24} + \frac{m}{2} \left\{ \dot{\alpha} r^2 \sin(2(\alpha_E + \alpha)) + \dot{\alpha} [R + R \cos \omega t (\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)] \right\}^2 \\ + \omega^2 [R + R \cos \omega t (\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)]^2 \\ + \left\{ \dot{\alpha} \left( \frac{L}{2} - r^2 \sin^2(\alpha_E + \alpha) + 1 \right) \right. \\ \left. - R(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)(\omega \sin \omega t - \dot{\alpha} \sin(\alpha_E + \alpha) \cos \omega t) \right\}^2 \\ + \frac{m\dot{\alpha}}{2} [R^2 \sin^2(\alpha_E + \alpha) + L/2 + 1] + R^2 m \omega \cos^2(\alpha_E + \alpha)/2 \Bigg\}$$

## CÁLCULO DE LA ENERGÍA DISIPATIVA (ED)

Los modelos de los rodamientos depende de la energía disipativa interna [2], para el caso de nuestro modelo se consideran las fuerzas disipativas generadas por el efecto total del sistema de amortiguación rodamiento-chumacera.

$$ED = \frac{1}{2} c [\Delta\dot{Y}_1^2 + \Delta\dot{Y}_2^2]$$

Donde es c es la constante de disipación de energía del resorte

De (10) obtenemos que  $\Delta\dot{Y}_1$  será igual a:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{Y}_1 = & \dot{\alpha}(D_1 - r)(\tan^2(\alpha_E + \alpha) + 1) \\ & - ((R \sin(\alpha_E + \alpha) \cos \omega t \dot{\alpha} + R\omega \sin \omega t \cos(\alpha_E + \alpha) (\cos(\alpha_E + \alpha) \\ & - 1))/ \cos(\alpha_E + \alpha) - (\sin(\alpha_E + \alpha) (L_1 + R\dot{\alpha} \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha))/ \cos(\alpha_E + \alpha) \\ & + (\sin(\alpha_E + \alpha)(L_1 + R \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha) \\ & + (\sin(\alpha_E + \alpha)(L_1 + R \dot{\alpha} \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha) (\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)/ \cos^2(\alpha_E + \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{Y}_2 = & \dot{\alpha}(\tan^2(\alpha_E + \alpha) + 1)(D_1 + D_2 - r) - ((R\dot{\alpha} \sin(\alpha_E + \alpha) \cos \omega t \\ & + R\omega \sin \omega t \cos(\alpha_E + \alpha) (\cos a_t - 1))/ \cos(\alpha_E + \alpha) - (\sin a_t (L_1 \\ & + R\dot{\alpha} \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha))/ \cos(\alpha_E + \alpha) + (\sin(\alpha_E + \alpha) (L_1 \\ & + R \dot{\alpha} \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha) (\cos(\alpha_E + \alpha) - 1))/ \cos^2(\alpha_E + \alpha) \end{aligned}$$

Reemplazando (18a) y (18b) en (17) y desarrollando, tenemos que la energía disipativa total es:

$$\begin{aligned} ED = & \frac{c}{2} \{ [d\sec^2(\alpha_E + \alpha) - (L_1 + R \cos(\omega t) \cos(\alpha_E + \alpha))\tan(\alpha_E + \alpha) \\ & + (\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)(L_1 + R \cos(\omega t) \cos(\alpha_E + \alpha))\sec^2(\alpha_E + \alpha)\sin(\alpha_E + \alpha) \\ & - R(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)\cos(\omega t)\tan(\alpha_E + \alpha)]^2 \\ & + [b\sec^2(\alpha_E + \alpha) - (L_1 + R \cos(\omega t) \cos(\alpha_E + \alpha))\tan(\alpha_E + \alpha) \\ & + (\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)(L_1 + R \cos(\omega t) \cos(\alpha_E + \alpha))\sec^2(\alpha_E + \alpha)\sin(\alpha_E + \alpha) \\ & - R(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)\cos(\omega t)\tan(\alpha_E + \alpha)]^2 \} \dot{\alpha}^2 \\ & + \{ - 2Rw(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)\sin(\omega t)[d\sec^2(\alpha_E + \alpha) - (L_1 \\ & + R \cos(\omega t) \cos(\alpha_E + \alpha))\tan(\alpha_E + \alpha) + (\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)(L_1 \\ & + R \cos(\omega t) \cos(\alpha_E + \alpha))\sec^2(\alpha_E + \alpha)\sin(\alpha_E + \alpha) \\ & - R(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)\cos(\omega t)\tan(\alpha_E + \alpha)] \\ & - 2Rw(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)\sin(\omega t)[b\sec^2(\alpha_E + \alpha)(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)(L_1 \\ & + R \cos(\omega t) \cos(\alpha_E + \alpha))\sec^2(\alpha_E + \alpha)\sin(\alpha_E + \alpha) \\ & - R(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)\cos(\omega t)\tan(\alpha_E + \alpha)] \} \dot{\alpha} \\ & + 2R^2w^2(\cos(\alpha_E + \alpha) - 1)^2\sin^2(\omega t) \} \end{aligned}$$

## CÁLCULO DE LA FUERZAS NO CONSERVATIVAS

El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas está la del resorte

$$\delta_{W_{nc}} = f_e \delta_y$$

Donde,  $f_e$  es la fuerza generada por la oscilación del resorte, es igual a  $f_e = F \cos \omega t$

La longitud oscilatoria del resorte es , ver figura 5.

$$y_3 = R \cos \omega t - R \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha)$$

$$\dot{y}_3 = R\omega \sin \omega t - \{-R\omega \sin \omega t \cos(\alpha_E + \alpha) - R\dot{\alpha} \cos \omega t \sin(\alpha_E + \alpha)\}$$

$$\delta_y = R\omega \sin \omega t - \{-R\omega \sin \omega t \cos(\alpha_E + \alpha) + R\delta_\alpha \cos \omega t \sin(\alpha_E + \alpha)\}$$

Donde la fuerza generalizada  $Q_\alpha$  será igual a:

$$Q_\alpha = F\delta_\alpha \cos \omega t \sin(\alpha_E + \alpha)$$



Reemplazando en (20) tenemos que el trabajo virtual realizado por las fuerzas no conservativas será igual a:

$$y_3 = R \cos \omega t - R \cos \omega t \cos(\alpha_E + \alpha)$$

$$\dot{y}_3 = R\omega \sin \omega t - \{-R\omega \sin \omega t \cos(\alpha_E + \alpha) - R\dot{\alpha} \cos \omega t \sin(\alpha_E + \alpha)\}$$

$$\delta y = R\omega \sin \omega t - \{-R\omega \sin \omega t \cos(\alpha_E + \alpha) + R\delta\alpha \cos \omega t \sin(\alpha_E + \alpha)\}$$

Donde la fuerza generalizada  $Q_\alpha$  será igual a:

$$Q_\alpha = F\delta\alpha \cos \omega t \sin(\alpha_E + \alpha)$$

### 3. RESULTADOS

Luego de realizar las derivadas con respecto al tiempo, simplificar los términos obtenidos por medio de la ayuda computacional de Matlab, obtenemos que la ecuación de movimiento que gobierna el sistema será igual a:

$$E_{c_{mov}} = \mathfrak{M}_1 \ddot{\alpha} + \mathfrak{M}_2 \dot{\alpha}^2 + \mathfrak{M}_3 \dot{\alpha} + \mathfrak{M}_4 K + \mathfrak{M}_5 c + \mathfrak{M}_6 = 0 \quad (25)$$

Donde:

$$f = \cos(\alpha_E + \alpha) - 1 \quad b = D1 - r \quad d = D1 + D2 - r$$

$$p = L1 + R\cos(\omega t)\cos(\alpha_E + \alpha) \quad q = r^2(\sin(2(\alpha_E + \alpha)) + 1)$$

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{m}{2} \left\{ 2[r^2 \sin(2(\alpha_E + \alpha)) + R(1 + f\cos(\omega t))]^2 + \frac{1}{2} [L - 2q + 2Rf\cos(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha)]^2 \right\}$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{3m}{2} \left\{ [2r^2 \cos(2(\alpha_E + \alpha)) - Rf\cos(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha)][2r^2 \sin(2(\alpha_E + \alpha)) + 2R(1 + f\cos(\omega t)) - [L - 2q + 2Rf\cos(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha)][r^2 \sin(2(\alpha_E + \alpha)) + R\cos(\omega t)\sin^2(\alpha_E + \alpha) - Rf\cos(\omega t)\cos(\alpha_E + \alpha)] \right\}$$

$$\mathfrak{M}_3 = \left\{ c \{ [b\sec^2(\alpha_E + \alpha) - p\tan(\alpha_E + \alpha) + f\text{psec}^2(\alpha_E + \alpha)\sin(\alpha_E + \alpha) - Rf\cos(\omega t)\tan(\alpha_E + \alpha)]^2 + [d\sec^2(\alpha_E + \alpha) - p\tan(\alpha_E + \alpha) + f\text{psec}^2(\alpha_E + \alpha)\sin(\alpha_E + \alpha) - Rf\cos(\omega t)\tan(\alpha_E + \alpha)]^2 \} - m \{ 2Rf\omega \sin(\omega t) [r^2 \sin(2(\alpha_E + \alpha)) + R(1 + f\cos(\omega t))] + 2R\omega \sin(\omega t) \sin(\alpha_E + \alpha) [L/2 - q + Rf\cos(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha)](1 - f) - 2Rf\omega \sin(\omega t) [r^2 \sin(2(\alpha_E + \alpha)) + R\cos(\omega t)\sin^2(\alpha_E + \alpha) - Rf\cos(\omega t)\cos(\alpha_E + \alpha)] - r^2 \sin(2(\alpha_E + \alpha)) \} \right\}$$

$$\mathfrak{M}_4 = \frac{1}{2} \{ [2b\tan(\alpha_E + \alpha) + 2f\text{psec}(\alpha_E + \alpha)][b\sec^2(\alpha_E + \alpha) - p\tan(\alpha_E + \alpha) + f\text{psec}^2(\alpha_E + \alpha)\sin(\alpha_E + \alpha) - Rf\cos(\omega t)\tan(\alpha_E + \alpha)] + [2d\tan(\alpha_E + \alpha) + 2f\text{psec}(\alpha_E + \alpha)][d\sec^2(\alpha_E + \alpha) - p\tan(\alpha_E + \alpha) + f\text{psec}^2(\alpha_E + \alpha)\sin(\alpha_E + \alpha) - Rf\cos(\omega t)\tan(\alpha_E + \alpha)] \}$$

$$\mathfrak{M}_5 = -\{ Rf\omega \sin(\omega t) [b\sec^2(\alpha_E + \alpha) + 2d\sec^2(\alpha_E + \alpha) - 2p\tan(\alpha_E + \alpha) + 2f\text{psec}^2(\alpha_E + \alpha)\sin(\alpha_E + \alpha) - 2Rf\cos(\omega t)\tan(\alpha_E + \alpha)] \}$$

$$\mathfrak{M}_6 = -m \{ Rg\sin(2(\alpha_E + \alpha))\cos(\omega t)/2 - Lg\cos(\alpha_E + \alpha)/2 + (R^2\omega/2)\sin(2(\alpha_E + \alpha)) - R^2\omega^2\cos^2(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha) + Rf\cos(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha) + Rf\omega^2\cos(\omega t)[L/2 - q + Rf\cos(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha)] + Rf\omega^2\sin^2(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha) + R\omega^2\cos(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha)[R + Rf\cos(\omega t)] - R^2f^2\omega^2\sin^2(\omega t)\sin(\alpha_E + \alpha) \}$$

Asumiendo que las oscilaciones y las desviaciones angulares son muy pequeñas,  $\omega t \approx 0$  y  $\alpha_E + \alpha \approx 0$ , por tanto  $\sin(\alpha_E + \alpha) = \alpha_E + \alpha$  y  $\cos(\alpha_E + \alpha) = 1$  despreciando la contribución de  $\alpha$  dado que  $\alpha \ll \alpha_E$  y  $\alpha_E = \text{cte}$  obtenemos que la ecuación de movimiento que gobierna del sistema propuesto será igual a:



$$E_{c_{mov}} = \mathfrak{M}_1 \ddot{\alpha} + \mathfrak{M}_2 \dot{\alpha}^2 + \mathfrak{M}_3 \dot{\alpha} + \mathfrak{M}_4 K + \mathfrak{M}_6 = 0$$

Donde:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{m}{2} \left[ (2r^2 \alpha_E + R)^2 + \frac{1}{2} (L - 2r^2 \alpha_E^2 - 2r^2)^2 \right]$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{3m}{2} [r^2(1 - \alpha_E^2)(\alpha_E + R) - L\alpha_E(2r^2 + R^2\alpha_E) + 2r^2\alpha_E(1 + \alpha_E^2)(r^2 + R^2\alpha_E)]$$

$$\mathfrak{M}_3 = c[(D_1 - r) - \alpha_E(L_1 + R)]^2 + [D_1 + D_2 - r - \alpha_E(L_1 + R)]^2 + 2mr^2\alpha_E$$

$$\mathfrak{M}_4 = \alpha_E[(D_1 - r)^2 + (D_1 - r + D_2)^2] - (L_1 + R)((D_1 - r) + (D_1 - r + D_2))$$

$$\mathfrak{M}_5 = 0$$

$$\mathfrak{M}_6 = m[Lg/2 - Rg\alpha_E - R^2\omega\alpha_E]$$

## CONCLUSIÓN

Se desarrolló un modelo analítico de un sistema motor-acople flexible-árbol de transmisión-rodamientos, donde las ecuaciones de movimiento del sistema generalizado fueron derivadas en un sistema acondicionado con un desalineamiento angular inducido. Se derivaron las energías cinética, potencial y disipativa de los rodamientos en el sistema de estudio, se obtuvo la ecuación de movimiento indicando que existe una gran dependencia de  $\alpha$  y del tipo de acople.

La contribución de este estudio estuvo en complementar los modelos dinámicos existentes con la energía disipativa actuante, no es  $\lambda$  como aparece en la referencia [13], sino, dependiendo del trabajo de compresión que tienen los resortes. De igual forma en nuestro modelo se tuvo en cuenta el sistema inercial del árbol de transmisión y la contribución de las aceleraciones radiales y tangenciales dentro del modelo dinámico obtenido en función del análisis realizado al sistema.

Para futuros trabajos se sugiere analizar la contribución de diferentes tipos de acople y rodamientos y los efectos combinados de desalineamiento angular y paralelo y desbalanceo.

## REFERENCIAS

[1]. M. Xu, R.D. Marangoni, Vibration analysis of a motor-flexible coupling system subject to a misalignment and unbalance. Part 1: Theoretical mode and analysis, Journal of Sound and Vibration 176 (5) (1994).

[2]. Slim Bouaziz, Molka Attia Hili, Mohamed Mataar, Taher Fakhfakh, Mohamed Haddar, Dynamic behaviour of hydrodynamic journal bearings in presence of rotor spatial angular misalignment, Elsevier, Mechanism and Machine Theory 44 (2009) 1548–1559.

[3]. N. Hamzaoui, C. Boissonet, C. Lesueur, Vibro-acoustic analysis and identification of defects in rotating machinery. Part I: Theoretical model, Journal of Sound and Vibration 216 (4) (1998) 553–570.

[4]. K.M. Al-Hussain, Dynamic stability of two rigid rotors connected by a flexible coupling with angular misalignment, Journal of Sound and Vibration 266 (2003) 217–234

[5]. V. Hariharan and PSS. Srinivasan, Vibration analysis of misaligned shaft –ball bearing system, Indian Journal of Science and Technology, Vol.2 No. 9 (Sep 2009), ISSN: 0974- 6846

[6]. T.C: Lim y R. Singh, Vibration transmission through Rolling element bearings. Part III, Journals of Sound and Vibration (1991) 151 (1) 31-54.

[7]. J.C. Nicholos, R.G. Kirk, Selection and design of tilting pad and fixed lobe journal bearings for optimum turborotor dynamics, Proceedings of The Eighth Turbomachinery Symposium, 1979, pp. 43–57.

[8]. J.W. Lund, Stability and damped critical speeds of a flexible rotor in fluid-film bearings, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering for Industry 96 (1974) 509–517.

- [9]. A.D. Dimarogonas, S. Haddad, *Vibration for Engineers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [10]. *Structural Vibration Analysis and Damping*, C.F. Beards, pag 122.
- [11]. L. Meirovitch 1970 *Methods of Analytical Dynamics*. New York: Mc Graw Hill
- [12]. Maurice L. Adamas. Jr., *Rotating Machinery Vibration, from analysis to troubleshooting*, Marcel Deller, Inc.
- [13]. Tahar Fakhfakh, Molka Attia Hili, Lotfi Hammami, and Mohamed Haddar, Angular misalignment effect on bearings dynamical behavior, *Mechanic, Modelling and Manufacturing*, Mechanical Engineering Department School of Engineering, Sfax University B.P.W. 3038, Tunisia.
- [14]. N. Lamzaoui, C. Boisson and C. Lesueur, Vibro-acoustic analysis and identification of defects in rotating machinery, Part I: Theoretical model, *Journal of Sound and Vibration* (1998) 216 (4) 553 -570