Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**

Volumen 13. Páginas 97 a 105

UMBRAL DE RENTABILIDAD MULTIPRODUCTO MULTIPERIODO CON INCERTIDUMBRE EN LA DEMANDA

MANUEL MOCHOLÍ ARCE
manuel.mocholi@uv.es
Univeristat de València/Departamento de Matemáticas para la Economía y la Empresa
Avda. Tarongers, s/n 46022 Valencia. España

VALENTIN NAVARRO MIQUEL
Valentin.navarro@uv.es
Univeristat de València/ Departamento de Finanzas Empresariales
Avda. Tarongers, s/n 46022 Valencia. España

Recibido 22/06/2012
Revisado 07/10/2012
Aceptado 02/12/2012

RESUMEN: En el presente trabajo proporcionamos un nuevo enfoque para obtener el umbral de rentabilidad de una empresa multiproducto con incertidumbre en la demanda. El objetivo es determinar el menor volumen posible de ventas necesario para poder cubrir los costes produciendo la mayor variedad posible de productos, en contra del enfoque tradicional que concentra la solución en aquel o aquellos productos con mayor margen de beneficio. Este enfoque permite una mayor cobertura frente a variaciones en la demanda, sobre todo cuando se trata de nuevos productos con sistemas de producción comunes.

Palabras claves: Gestión de la producción; Programación matemática; Escenarios; Incertidumbre

ABSTRACT: In this paper we provide a new approach to obtain the breakeven point for a multiproduct firm with demand uncertainty. The objective is to determine the smallest possible volume of sales necessary to cover the costs of producing the widest range of products, against the traditional approach that concentrates the solution in that or those products with higher profit margin. This approach allows for greater hedge against changes in demand, especially when it comes to new products with common production systems.

Keywords: Production management, mathematical programming, Scenarios, Uncertainty

1. Introducción

Los modelos tradicionales de obtención del umbral de rentabilidad, los cuales tratan de obtener la cobertura de los costes fijos y variables con el menor número posible de unidades vendidas, lo que lleva a concentrar la solución en unos pocos productos, aquellos con un mayor margen de beneficio.

En las empresas que producen una amplia variedad de productos o familias de productos, a veces resulta difícil, sino imposible, la determinación a priori del margen de beneficio individual de un producto concreto, dado que en la producción de un determinado producto podrán intervenir:

- Recursos (maquinaria, instalaciones, mano de obra) que únicamente son utilizados en la producción de dicho producto y por tanto darán lugar a costes fijos y variables directamente asignables al producto y de los cuales se podrá prescindir caso de no producirse.
- Recursos compartidos con una familia de productos, que del mismo modo que los anteriores, pueden consistir en costes fijos y variables, cuya repercusión sobre el coste de un determinado producto dependerá de la cantidad de productos producidos de cada uno de los de la familia que comparten dichos costes y que además se podrá prescindir de ellos si no se produce ninguno de los productos de la familia.
- Recursos que afectan a toda la producción de la empresa y que por tanto deben ser repartidos entre todos los productos en función de las cantidades producidas.

Cuando se trata de añadir a los productos actualmente en producción, el lanzamiento de una nueva gama de productos, normalmente suele ser necesaria la ampliación de los recursos disponibles y en muchas ocasiones adquirir otros nuevos, tales como maquinaria, instalaciones, cursos de formación, mano de obra especializada, etc. que también pueden ser utilizados para los productos que ya están en producción.

Cuando una empresa se plantea la renovación total o parcial de una gama de productos debe analizar si está en condiciones de poder asumir las inversiones necesarias en activo circulante y fijo y que éstas tengan una rentabilidad adecuada al riesgo que se asume.

Para ello, la empresa realizará un análisis financiero de sus inversiones con los métodos tradicionales, al tiempo que calculará el umbral de rentabilidad o punto muerto [Navarro, Bolado (1999)] que le permita cubrir los costes fijos por producto, los costes fijos por familia o gama de productos y los costes estructurales de la empresa [Cantalapiedra (2001, 2008), Copeland, Koller, Murrin (2007)].

2. Modelo multiperiodo, multiproducto con demanda conocida

En este apartado, se plantea un modelo determinista, multiproducto y multiperiodo para el que, suponiendo que se puede estimar con total fiabilidad la demanda futura D_{tk} para cada producto k ($k=1,\ldots,K$) y periodo t ($t=1,\ldots,T$), permita descartar los productos no rentables y determinar la cantidad mínima a producir en cada periodo y de cada producto que asegure la cobertura de los costes fijos y variables particulares y globales, lo que a su vez garantizará la viabilidad de la empresa.

A diferencia de los modelos de punto muerto tradicionales en los cuales se trata de minimizar el número de unidades totales a producir, de modo que se cubran los costes fijos y variables, el modelo que se plantea tendrá como objetivo determinar el número de unidades mínimo a producir en cada uno de los periodos de planificación t ($t = 1,2,...,T$), de cada uno de los productos k ($k = 1,2,...,K$) que denominaremos P_{tk}, de modo que la gama de productos sea los más amplia posible. De esta forma, no se trata de determinar únicamente el número de unidades a producir de aquellos productos con mayor margen de modo que se cubran la totalidad de los costes fijos y variables con el menor número total de unidades posible, sino que además se pretende determinar el número de unidades a producir para cubrir sus costes variables más costes fijos particulares de todos aquellos productos cuyo margen sea no negativo, teniendo en cuenta que los costes variables dependen del tipo de máquina con el cual se producirán y que en conjunto se deben cubrir los costes totales de producción más los costes fijos.

De esta forma, el modelo determinará que productos no son viables económicamente, para los cuales la solución indicará que no hay que producir ninguna unidad y para los que sean viables, proporcionará la mínima cantidad necesaria a producir de cada producto en cada periodo y además determinará, en los casos en que sea posible elegir, en que tipo de máquinas debe producirse, para alcanzar el umbral de rentabilidad de la empresa.

2.1. Restricciones técnicas

El número de unidades que la empresa podrá producir de cada producto k en cada periodo t vendrá determinado por la maquinaria y mano de obra existente en la actualidad. Para ello, partimos de que la empresa dispone de M_{cv} máquinas de distinto tipo o clase c $(c=1,\ldots,C)$ y dentro de cada tipo, con distintas tecnologías o variantes v $(v=1,\ldots,V)$ [1].

Teniendo en cuenta el número de máquinas M_{cv} de cada tipo y clase de las que dispone la empresa, las unidades de tiempo A_{kcv} que se necesitan para fabricar una unidad del producto k en una máquina del tipo c variante v, el total de unidades de tiempo disponibles en cada periodo UT_t , el número máximo de unidades PV_{tkcv} que la empresa podrá producir de cada producto en cada periodo, vendrá dado por:

$$\sum_{k=1}^{K} PV_{tkcv} A_{kcv} \le UT_t \, M_{cv} \qquad \forall\, t,c,v \tag{1}$$

El conjunto de ecuaciones (1) determinan la máxima cantidad de cada producto k que será posible producir en cada tipo de máquina y variante. Pero, teniendo en cuenta que la fabricación de una unidad de un producto k precisará ser realizada a través de su procesamiento en un conjunto de máquinas de distintas clases C_k, la cantidad que podrá producirse de un producto k en cada periodo t, vendrá limitada por la capacidad productiva de la clase de máquinas con menor rendimiento, es decir, que la máxima cantidad P_{tk} que será posible producir de un producto k en un periodo t vendrá dada por la menor de las cantidades máximas que sean posibles producir con el conjunto de las máquinas de todas las variantes de una misma clase de máquina, lo que vendrá representado por[2]:

$$P_{tk} \le \sum_{v=1}^{V} PV_{tkcv} \qquad \forall t,k,v \qquad \forall c \in C_k \tag{2}$$

2.2. Restricciones de cobertura de costes

Con este conjunto de restricciones, se pretende garantizar que cada uno de los productos sea rentable por si mismo, es decir que las ventas de cada producto cubran sus propios costes, además de la cobertura de todos los costes de la empresa (umbral de rentabilidad).

2.2.1. Cobertura individual

Los ingresos por ventas de cada producto deben cubrir como mínimo sus costes variables y los fijos que le sean directamente imputables, es decir:

$$\sum_{t=1}^{T} \left[(P_{tk} + EF_{tk} - EF_{tk})(PVP_k - OC_k) \right] \ge \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{c=1}^{C} \sum_{v=1}^{V} (PV_{tkcv} CPV_{kcv}) + y_k CFP_{tk} \right] \quad \forall k \tag{3}$$

donde:

- EF_{tk} : representa las existencias finales en el periodo t del producto k, por lo que, $(P_{tk} + EF_{tk} - EF_{tk})$ representa las ventas de dicho producto. Además, se considera que al principio del periodo de planificación no hay existencias iniciales, es decir, $EF_{0k}=0$ y que al final del periodo

[1] Entendemos por clase el conjunto de máquinas que sirven para realizar una mismo trabajo y por variante los distintos modelos con mayor o menor capacidad o tecnología dentro de cada clase.

[2] En cada clase de máquina y variante (c, v) se pueden producir todos los productos k o sólo algunos de ellos; es decir, un producto no tiene porqué pasar necesariamente por todos los tipos de máquina. De esta forma, si un producto k, no precisa de un determinado tipo de máquina y variante su coeficiente será nulo. Esto no supone que un producto k se elabora solamente con una máquina, si no que pasará por la fase que le corresponda a dicha máquina.

de planificación tampoco deben quedar existencias finales EF_{Tk}=0, que harían aumentar los costes de fabricación innecesariamente y no serían utilizadas.

- PVP_k: es el precio de venta de una unidad del producto k.
- OC_k : son costes variables imputables al producto k por todos los conceptos, excepto los correspondientes a la maquinaria que dependen exclusivamente de las máquinas con los que son producido.
- CPV_{kcv} : son los costes de procesar una unidad del producto k en una máquina de la clase c y variante v, el cual se obtiene considerando el tiempo empleado en su procesamiento y los costes globales de la maquina correspondiente.
- $y_k \in \{0,1\}$: indica si se va a producir el producto k (y_k=1) o no (y_k=0).
- CFP_{tk}: son los costes fijos particulares atribuibles únicamente al producto k y que sólo es necesario asumir si se produce alguna unidad del producto k (y_k=1), en caso contrario, si se decide no producir el producto (y_k=0) entonces también se puede prescindir de dichos costes.

2.2.2. Cobertura global (umbral)

Los ingresos por ventas han de cubrir la totalidad de los costes de la empresa, es decir:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\left[(P_{tk}+EF_{t-1,k}-EF_{tk})(PVP_k-OC_k)\right]\geq \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{c=1}^{C}\sum_{v=1}^{V}(PV_{tkcv}CPV_{kcv})+y_kCFP_{tk}\right]+CF_t\right] \qquad \forall t \tag{4}$$

siendo CF_t los costes fijos globales para cada uno de los periodos t.

2.3. Restricciones de demanda

Además de las restricciones técnicas y las de cobertura de costes, debemos tener en cuenta las restricciones sobre la demanda. El motivo de esta consideración es muy sencillo, es decir, no sirve de nada producir una gran cantidad de unidades de un determinado producto k, por muy rentable que sea, si luego no es posible realizar su venta.

De esta forma, como lo que se pretende es minimizar las cantidades a producir de todos aquellos productos que sean viables, podemos imponer la siguiente condición:

$$P_{tk}\leq D_{tk}y_k \qquad \forall k \tag{5a}$$

Con el conjunto de ecuaciones (5a) conseguimos:

- Si se decide producir un producto, y_k=1, la producción de dicho producto k en cada periodo t no puede superar su demanda D_{tk}. Además junto con las ecuaciones (3) y (4) se obliga a que se asuman sus costes fijos particulares CFP_{tk}.
- Si y_k=0, no se podrá producir ninguna unidad del producto k y por tanto tampoco existirán y en consecuencia, no habrá que asumir sus costes fijos particulares.

Ahora bien, debemos tener en cuenta que las ecuaciones (5a) impiden que se puedan optimizar los recursos productivos, dado que no permite que en algunos periodos se pueda aprovechar el exceso de capacidad productiva para generar stocks que permitan cubrir la demanda de periodos futuros.

Para permitir la generación de existencias y optimizar los recursos, se sustituyen las ecuaciones (5a) por:

$$P_{tk}+EF_{t-1,k}-EF_{tk}=D_{tk}\ y_k \qquad \forall t,k \tag{5b}$$

Las ecuaciones (5b), permiten la generación de stocks, pero obligan, para los productos viables, a cubrir la totalidad de la demanda a lo largo de todos los periodos de planificación, lo cual resulta contradictorio con el objetivo de minimizar las cantidades a producir de cada producto económicamente rentable.

Por este motivo, se propone modificar las ecuaciones (5b) por las siguientes:

$$P_{tk}+EF_{t-1,k}-EF_{tk}=D_{tk}\ y_k - DV_{tk} \qquad \forall t,k \tag{5}$$

$$0\leq DV_{tk}\leq D_{tk}$$

Donde DV_{tk} representa la demanda que no es necesario cubrir para alcanzar la total cobertura de costes

De este modo se consigue que las ventas de cada producto *k* en cada periodo *t*, si se decide producir éste (y_k=1) sean inferiores a la demanda y al mismo tiempo. se puedan generar existencias para cubrir la demanda de periodos futuros, es decir:

$$P_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk} \leq D_{tk}\ y_k \qquad \forall t,k \tag{6}$$

2.4. Objetivo

El objetivo que se pretende cuando una empresa se plantea establecer una nueva gama de productos o renovar parte de la existente es averiguar si resulta económicamente viable la producción de cada uno de ellos. En el proceso de desarrollo del producto se puede estimar el coste de fabricar dicho producto con unas determinadas máquinas y utillajes, pero cuando la empresa no es de nueva creación, es decir, existe maquinaria, utillaje, mano de obra y costes fijos compartidas para la producción de la totalidad o una amplia variedad de productos, el coste de fabricación de un determinado producto dependerá del tipo de maquinaría utilizada que no siempre será la más eficiente para dicho producto, pues la empresa debe utilizar la maquinaría para la producción de todos los productos. Por otra parte la repercusión de costes fijos también dependerá de la cantidad producida del producto en cuestión y del resto.

De esta forma, sólo será posible descartar como no viables aquellos productos que en el proceso de desarrollo se haya estimado un coste de producción muy elevado y que no pueda ser absorbido por su precio de venta. Para el resto de productos, dado que los márgenes suelen ser muy estrechos, su viabilidad dependerá no sólo de las unidades producidas de dicho producto sino también de las unidades producidas del resto.

Por este motivo, el objetivo que pretendemos plantear debe proporcionarnos información acerca de la viabilidad individual de los productos, así como de la nueva gama de ellos y de la empresa en su conjunto, de modo que todo producto económicamente viable debe indicarnos que se producirá y el número mínimo de unidades necesarias que deben producirse para cubrir todos los costes fijos y variables imputables a dicho producto o gama de productos y, al mismo tiempo, que con el conjunto de todos ellos se cubran todos los costes de la empresa.

Para alcanzar dicho objetivos, la función que se propone es la siguiente:

$$Max \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DV_{tk} \tag{7}$$

2.5. Modelo discreto

El modelo completo que se propone es el siguiente:

$$Max \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} DV_{tk}$$

s.a:

$$\sum_{k=1}^{K} PV_{tkcv} A_{kcv} \leq UT_t\ M_{cv} \qquad \forall\, t, c, v$$

$$P_{tk} \leq \sum_{v=1}^{V} PV_{tkcv} \quad \forall t, k, v \qquad \forall c \in C_k$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left[(P_{tk} + EF_{tk} - EF_{tk})(PVP_k - OC_k) \right] \geq \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{c=1}^{C} \sum_{v=1}^{V} (PV_{tkcv} CPV_{kcv}) + y_k CFP_{tk} \right] \quad \forall k$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} \left[(P_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk})(PVP_k - OC_k) \right] \geq$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{k=1}^{K} \left[\sum_{c=1}^{C} \sum_{v=1}^{V} (PV_{tkcv} CPV_{kcv}) + y_k CFP_{tk} \right] + CF_t \right] \qquad \forall t$$

$$P_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk} = D_{tk}\ y_k \text{ - } DV_{tk} \qquad \forall t,k$$

$$P_{tk} \geq 0,\ EF_{tk} \geq 0,\ 0 \leq DV_{tk} \leq D_{tk}\ , y_k \in \{0,1\}$$

Con este modelo se consigue:

- Determinar los productos que no son viables económicamente. Efectivamente, dado que en las expresiones (3) y (5) si un producto tiene margen negativo o las ventas necesarias para cubrir los costes fijos particulares de dicho producto son superiores a su demanda, únicamente serán factibles si no se produce el producto, es decir, (y_k=0).
- Para los productos para los cuales su margen les permita cubrir sus costes fijos particulares con unas ventas inferiores a su demanda (y_k=1), se tiene que:

$$0 \leq DV_{tk} = D_{tk}\ y_k - \left(P_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk}\right) \leq D_{tk} \qquad \forall t,k \tag{8}$$

luego,

$$Max\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K} DV_{tk} = Max\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\left[D_{tk}\ y_k - \left(P_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk}\right)\right] \tag{9}$$

dado que las existencias al principio del primer periodo por ser productos nuevos son cero y al final se pretende no tener stocks, dado que se trata de minimizar la producción, es decir:

$$EF_{0,k} - EF_{Tk} = 0 \qquad \forall k \tag{10}$$

operando se tiene que:

$$Max\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K} DV_{tk} = Max\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\left[D_{tk}\ y_k - P_{tk}\right] \tag{11}$$

de esta forma obtenemos que el máximo de la función objetivo se alcanza produciendo el menor número de unidades posibles (P_{tk}) de la mayor variedad de productos (y_k=1).

3. Previsiones de la demanda en el modelo multiperiodo y multiproducto

Con respecto al modelo anterior, si bien existen otros parámetros que también soportan un cierto grado de incertidumbre –precios de venta y costes de producción, productividad y rentabilidad de las nuevas inversiones–, consideramos que la demanda es el factor que mayor grado de incertidumbre soporta. El motivo es que pueden aparecer nuevos productos que sean competencia directa sobre los nuestros y esto supondrá un cambio drástico en la planificación financiera y estratégica de la empresa.

Con el lanzamiento de nuevos productos, la incertidumbre sobre la demanda puede ser todavía mayor, puesto en base a la experiencia de la empresa en temas de producción, este tipo de costes pueden ser estimados en la fase de desarrollo del producto con cierta fiabilidad. En consecuencia, nos centraremos en la variable de la demanda que es, en nuestro caso, la que posee mayor incertidumbre.

No obstante, la consideración que realizamos sobre una demanda incierta, en alguna medida, podremos reducir ese riesgo mediante estudios de mercado, estudios de capacidad de penetración de nuestros productos o estudios de las debilidades de nuestra competencia, etc. En base a este tipo de estudios podemos tener una idea aproximada de cual puede ser la demanda de nuestros productos bajo determinados escenarios. Es por ello que, el análisis de las demandas esperadas que pueden llegar a producirse, lo vamos a plantear como posibles escenarios para cada tipo de producto. De esta forma, podemos recurrir a la utilización de sistemas de expertos, que son uno de los sistemas más significativos que se dan hoy en día en la instrumentalización de los procesos productivos dentro de las empresas [Manso (1996), Fernández Güell (2004)], para que en base a estudios de mercado, de capacidad de penetración de nuestros productos o de las debilidades de nuestra competencia, etc. nos puedan ofrecer unos valores de referencia de la demanda futura.

A partir de los resultados obtenidos de los distintos estudios, se puede abordar la incertidumbre mediante modelos y métodos que aceptan incertidumbre en los datos, como el análisis de sensibilidad, análisis paramétrico, modelos dinámicos y modelos estocásticos. Un resumen de ellos aparece en el artículo de Owen y Daskin (1998). Más recientemente se han aplicado también técnicas borrosas [Canós, Ivorra y Liern (1999, 2001)] y técnicas de optimización robusta [Kouvelis y Yu (1997), Chen y Lin

(1998), Serra y Marianov (1998), Canós y Mocholí (1998), Averbakh y Berman (2000), Canós, Mocholí, Navarro (2003), Mulvey, Shetty. (2004), Mocholí, Navarro (2005, 2010)].

En este trabajo se plantea a partir de los datos obtenidos por los expertos obtener una demanda mínima para cada periodo y producto que puede ser la media de las demandas mínimas estimadas por todos los expertos para dicho producto y periodo, aunque se podría ser mas conservador y elegir la menor de las mínimas o cualquier otra combinación de dichas estimaciones. Del mismo modo se hará para obtener la demanda máxima para cada producto y periodo.

3.1. Restricciones de demanda

A partir de las estimaciones realizadas mediante el sistema de expertos, el conjunto de ecuaciones sobre la demanda, serán definidas como:

$$DMIN_{t,k} = \frac{\sum_{e=1}^{E} D\min_{tk}^{e}}{card(E)} \qquad DMAX_{t,k} = \frac{\sum_{e=1}^{E} D\max_{tk}^{e}}{card(E)} \tag{12}$$

siendo:

$D\min_{tk}^{e}$ y $D\max_{tk}^{e}$: la demanda mínima y máxima, respectivamente, estimadas por el experto *e* para el producto *k* en el periodo *t*.

Si en el modelo discreto anterior se sustituye en las ecuaciones (5) la demanda D_{tk} por $DMIN_{tk}$, se tiene:

$$P_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk} = DMIN_{tk}\ y_k \text{ - } DV_{tk} \qquad \forall t,k \tag{5c}$$

De esta forma, se obtiene un modelo totalmente conservador, que proporciona qué productos son viables bajo las peores circunstancias posibles, es decir, las de menor demanda, de acuerdo con los expertos consultados. También descartará como no viables todos aquellos otros productos que en circunstancias menos desfavorable no es interesante producir.

El modelo anterior se modifica para que sea capaz de determinar los productos que son viables, con independencia de las circunstancias que se produzcan (demanda mínima), los que podrían ser viables con circunstancias menos desfavorables y a partir de qué demanda serán viables y por último los no viables bajo ningún concepto.

Se define una nueva variable, que recoge la diferencia entre la demanda máxima y mínima de cada producto en cada periodo, es decir:

$$0 \le DN_{tk} \le DMAX_{tk} \text{ - } DMIN_{tk} \qquad \forall t,k \tag{13}$$

se introduce en las ecuaciones (5c) quedando como:

$$P_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk} = DMIN_{tk}\ y_k \text{ - } DV_{tk} + DN_{tk} \qquad \forall t,k \tag{5d}$$

siendo:

$$0 \le DV_{tk} \le DMIN_{tk} \qquad \forall t,k$$

dado que la oferta debe ser la menor posible, sólo se permitirá que sea superior a la demanda mínima cuando se haya alcanzado ésta, para lo cual cabe exigir que no puedan ser simultáneamente ambas desviaciones mayores que cero, por tanto se exige que si DN_{tk} toma valor, entonces DV_{tk} deberá ser nula, para lo cual se añaden las restricciones:

$$DN_{tk} \le z_k M \qquad \forall t,k \tag{14}$$

$$DV_{tk} \le (1\text{-}z_k) M \qquad \forall t,k \tag{15}$$

$$z_k \in \{0,1\} \qquad \forall k$$

$$M \to \infty$$

de este modo si $DN_{tk} > 0$, de la expresión (14) se tiene que z_k=1 y entonces de la expresión (15), se cumple que DV_{tk}=0.

3.2. Función Objetivo

El objetivo del modelo propuesto es el de cubrir costes con una producción inferior a la demanda mínima y sólo en el caso que no sea posible para algún producto cubrir los costes con una producción inferior a la mínima, se podrá aumentar la oferta hasta alcanzar la demanda máxima, para lo cual se propone la siguiente función objetivo:

$$Max\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\left(DV_{tk} + \frac{DN_{tk}}{DMAX_{tk} - DMIN_{tk}} \right) \quad (16)$$

Así pues, el segundo sumando es menor o igual que uno, si la oferta es superior a la demanda mínima, o cero en el caso de que $DN_{tk}=0$, por lo que es preferible, si es posible, dejar de cubrir una unidad la demanda mínima ($DV_{tk}=1$) que sobrepasar la demanda mínima en cualquier cantidad $DN_{tk}\geq 1$.

De esta forma con la función definida, se consigue que todos aquellos productos para los cuales sea posible cubrir los costes con una cantidad inferior a la demanda mínima, se cumplirá que $DV_{tk}>0$. Por otra parte, para aquellos que no sea posible cubrir los costes con una oferta superior a la mínima e inferior a la máxima, se cumplirá $DN_{tk}\geq 1$. Por último, para aquellos productos que no sea posible cubrir los costes con una demanda inferior a la máxima se cumplirá que $y_k=0$.

3.3. Modelo

$$Max\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\left(DV_{tk} + \frac{DN_{tk}}{DMAX_{tk} - DMIN_{tk}} \right) \quad (16)$$

s.a:

$$\sum_{k=1}^{K} PV_{tkcv} A_{kcv} \leq UT_t\, M_{cv} \qquad \forall t, c, v \quad (1)$$

$$P_{tk} \leq \sum_{v=1}^{V} PV_{tkcv} \qquad \forall t, k, v \qquad \forall c \in C_k \quad (2)$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left[(P_{tk} + EF_{tk} - EF_{tk})(PVP_k - OC_k) \right] \geq \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{c=1}^{C}\sum_{v=1}^{V}(PV_{tkcv} CPV_{kcv}) + y_k CFP_{tk} \right] \quad \forall k \quad (3)$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\left[(P_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk})(PVP_k - OC_k) \right] \geq \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{c=1}^{C}\sum_{v=1}^{V}(PV_{tkcv} CPV_{kcv}) + y_k CFP_{tk} \right] + CF_t \right] \quad \forall t \quad (4)$$

$$P_{tk} + EF_{t-1,k} - EF_{tk} = DMIN_{tk}\; y_k - DV_{tk} + DN_{tk} \qquad \forall t, k \quad (5d)$$

$$DN_{tk} \leq z_k\, M \qquad \forall t, k \quad (14)$$

$$DV_{tk} \leq (1 - z_k) M \qquad \forall t, k \quad (15)$$

$$P_{tk} \geq 0,\; EF_{tk} \geq 0,\; 0 \leq DV_{tk} \leq DMIN_{tk},\, 0 \leq DV_{tk} \leq DMAX_{tk} - DMIN_{tk}$$

$$y_k \in \{0,1\},\; z_k \in \{0,1\}, M \to \infty$$

4. CONCLUSIONES

La bondad del modelo planteado ha sido contrastada mediante su aplicación en una empresa de la Comunidad Valenciana, para lo cual se ha implementado el modelo con GAMS (General Algebraic Modeling System) y resuelto mediante el solver CPLEX.

Las soluciones obtenidas nos proporciona el nivel mínimo de ventas que era necesario para alcanzar el umbral de rentabilidad de la empresa, con la mayor diversidad posible de productos. De esta forma, se ha conseguido poder ofrecer un catálogo de productos mucho más amplio que ha permitido a la empresa, en momentos de dificultad económica como el actual, ampliar su cartera de clientes y aumentar el volumen de ventas.

Respecto a la viabilidad de los productos considerados individualmente, el modelo proporciona información acerca de qué productos son viables, incluso en las condiciones más desfavorables de demanda. Al mismo tiempo, nos facilita información acerca de las ventas que sería necesario realizar para que algunos productos no rentables con las ventas actuales, lo fueran y en consecuencia incentivar las ventas a través de los comerciales antes de decidir eliminar un producto ya existente o lanzar uno nuevo.

Por último, el modelo nos ha permitido descartar como no viables algunos productos nuevos que la empresa pensaba introducir en el mercado y eliminar también algunos de los que ya tenía en catálogo, aunque ha sido necesario mantener en catálogo algunos productos no rentables, dado que su eliminación hubiera supuesto una pérdida importante del volumen de ventas de otros productos, como consecuencia de la fidelización de clientes a través de dichos productos exclusivos de la empresa.

Referencias bibliográficas

1. Navarro, V. y Ferrando, M. Punto muerto multiproducto en la incertidumbre: una aplicación práctica de la teoría de los subconjuntos borrosos, *ESIC*, **102** (1999) 57-75.
2. Cantalapiedra, M. *Manual de gestión financiera para pymes* (Cie Inversiones Editoriales Dossat Madrid 2000).
3. Cantalapiedra, M. Diseño de un modelo de planificación financiera propio, *Estrategia Financiera,* **254** (octubre 2008), 18-23.
4. Copeland, T., Koller, T. y Murrin, J. *Valoración de empresas: medición y gestión del valor***.** (Ediciones Deusto Barcelona 2007).
5. Owen, S.H. y Daskin, M.S. Strategic Facility Location: A Review. *European Journal of Operational Research*, **111** (1998) 423-447.
6. Canós, M. J., Ivorra, C. y Liern, V. An Exact Algorithm for the Fuzzy p-Median Problem. *European Journal of Operational Research*, **116** (1999) 80-86.
7. Canós, M. J., Ivorra, C. y Liern, V. The Fuzzy p-Median Problem: A Global Analysis of the Solutions. *European Journal of Operational Research*, **130** (2001) 430-436.
8. Kouvelis, P. y Yu, G. *Robust Discrete Optimization and its Applications* (Kluwer The Netherlands 1997).
9. Chen, B. y Lin, C.S. Minmax-Regret Robust 1-Median Location on a Tree. *Networks*, **31** (1998) 93-103.
10. Serra, D. y Marianov, V. The p-Median Problem in a Changing Network: the Case of Barcelona. *Location Science*, **6** (1998) 383-394.
11. Canós, M. J., Mocholí, M. Técnicas de optimización robusta aplicadas al problema de la p-mediana en condiciones de incertidumbre. *Actas de las VI Jornadas de ASEPUMA* (Santiago de Compostela 1998) 149-156
12. Averbakh, I. y Berman, O. Minmax Regret Median Location on a Network under Uncertaint. *INFORMS Journal on Computing*, **12** (2000) 104-110.
13. Canós, M. J., Mocholí, M. y Navarro, V. Fondos propios: una aplicación mediante la optimización robusta, *Análisis Financiero*, **92** (2003) 94-102.
14. Mulvey, J. M. y Shetty, B. Financial planning via multi-stage stochastic optimization, *Computers and Operations Research*, **21** (2004) 1-20.
15. Mocholí, M. y Navarro, V. PSI: Programa de Selección de Inversiones mediante optimización robusta, *Análisis Financiero*, **99** (2005) 25-34.
16. Mocholí, M. y Navarro, V. Determinación de la producción de una nueva gama de productos *Anales del XVIII congreso de ASEPUMA* (Universidad de Santiago de Compostela 2010)