DEMONSTRAÇÕES E GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

DEMOSTRACIONES Y GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

DÉMONSTRATIONS ET GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

PROOFS AND GENERALIZATIONS OF THE PYTHAGOREAN THEOREM

Lialda B. Cavalcanti
Professora de Matemática do Instituto Federal e Tecnológico de Pernambuco e Doutoranda em Educação
Grupo de estudos PRAPEM.
Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Estadual de Campinas.
libeca7@gmail.com

Cristiane de Arimatéa Roch
Mestre em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (EDUMATEC-UFPE
Professora de Matemática do Instituto Federal e Tecnológico de Pernambuco
tiane_rocha@yahoo.com.br

Artículo de Reflexión

Recibido 18 de abril de 2011
Aprobado 27 de Julio de 2011

Praxis & Saber
Revista de Investigación y Pedagogía
Maestría en Educación. Uptc

Resumen

Este artículo aborda el tema desarrollado por el grupo de investigadores de Enseñanza de Ciencias y Tecnología del Instituto Federal de Educación de Pernambuco (IFPE) para auxiliar el desarrollo del programa de Laboratorio de Práctica y Enseñanza de la Matemática del curso de licenciatura en la modalidad de educación a distancia, con el apoyo de la Universidad Abierta del Brasil. En este texto describimos peculiaridades contenidas en las demostraciones del Teorema de Pitágoras con el fin de ilustrar algunos de esos métodos. La selección de estas se fundamentó y basó en la comparación de áreas por medio de la superposición de figuras y el uso de diversos recursos en clase. Además se presentan algunas generalizaciones de ese teorema, tan importante en la resolución de problemas en matemáticas.

Palabras Clave: Teorema de Pitágoras; figuras geométricas; demostraciones, generalizaciones.

Resumo

Este artigo aborda tema desenvolvido pelo grupo de pesquisadores[1] de Ensino de Ciência e Tecnologia do Instituto Federal de Educação de Pernambuco (IFPE); para subsidiar ementa da disciplina Laboratório de Prática e Ensino de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade de Educação à Distância com apoio da Universidade Aberta do Brasil. Neste texto descrevemos peculiaridades contidas nas demonstrações do teorema de Pitágoras a fim de ilustrar alguns desses diferentes métodos. A seleção das mesmas se fundamentou na utilização de aspectos geométricos que se baseiam na comparação de áreas, por meio de superposição de figuras e na viabilidade de recursos diferenciados na sala de aula. Além disso, apresentamos algumas generalizações desse teorema tão importante na resolução de problemas na Matemática.

Palavras Chave: Teorema de Pitágoras; figuras geométricas; demonstrações, generalizações.

[1] As autoras integraram equipe multidisciplinar de pesquisadores a formação de professores do IFPE no projeto Universidade Aberta do Brasil de 2006 a 2008.

Résumé

Cet article aborde le sujet développé par le groupe de chercheurs d'Enseignement de Sciences et Technologie de l'Institut Federal de Educación de Pernambuco (IFPE), pour aider au développement du programme du Laboratoire de Stage et Enseignement des Mathématiques du cours de Licence dans la modalité d'éducation `a distance, avec l'appui de l'Université Ouverte du Brésil. Dans ce texte, on décrit des particularités contenues dans les démonstrations du Théorème de Pythagore, en ayant comme but le fait d'illustrer quelques-unes de ces méthodes-là. La sélection de ces particularités-là, a été fondée et basée sur la comparaison des domaines, par le biais de la superposition de figures et l'utilisation de diverses ressources en classe. En plus, on présente des généralisations de ce théorème-là, si important dans la résolution des problèmes en mathématiques.

Mots clés : Théorème de Pythagore, figures géométriques, démonstrations, généralisations.

Abstract

This article explores a topic developed by a group of researchers of the Science and Technology Teaching School of Instituto Federal de Pernambuco, Brazil (IFPE), in assistance to the development of the Mathematics Practical and Teaching Laboratory of the distance learning Teaching Licensure, financed by the Universidad Abierta de Brasil. In this article, we describe the peculiarities present in the proofs of the Pythagorean theorem with the purpose of illustrating some of these methods. The selection of these peculiarities was founded and based on the comparison of areas by means of the superimposition of geometrical shapes and used several different class resources. Some generalizations of this important theorem in mathematical problem-solving are also shown.

Key words: pythagorean theorem, geometric shapes, proofs, generalizations.

Generalidades

O Teorema de Pitágoras é um dos mais utilizados na Geometria Plana. Sua aplicação nas resoluções de problemas geométricos envolve situações que são vistas desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Esse lado muitas vezes é esquecido sendo comumente tratado como uma simples fórmula a memorizar deixando de lado a sua compreensão, gerando o desinteresse de alguns alunos.

Além disso, as demonstrações desse teorema podem servir para discussões na sala de aula tanto para o aspecto da matemática formal, quanto para a educação matemática, buscando contextualizações no aspecto da história da matemática e em aplicações no cotidiano. A revista Super interessante (1998) traz uma curiosidade na qual encontramos de maneira explicativa uma aplicação para o teorema de Pitágoras.

> O corte das velas quadrangulares era simples de obter com o graminho (tábua com traçados e medidas) e as outras medidas do barco. Para as triangulares, os construtores se valiam do teorema de Pitágoras, conhecida como regra do 3 – 4 – 5. O lado maior, que deveria medir 30% a mais que o comprimento total do saveiro (obtido com o graminho), recebia o valor 5. Era a hipotenusa. Os outros lados (catetos) recebiam os valores proporcionais 3 e 4, formando um ângulo reto entre si. Para um saveiro com dois mastros, a hipotenusa da vela menor teria comprimento igual ao da quilha. Revista Super interessante "Saveiro a risca". ano 12, n° 4 abril de 1998.

De acordo com Bastian (2000), atualmente se conhecem cerca de 400 demonstrações desse teorema, produzidas por diferentes autores e em diversas épocas, que dificulta a descrição histórica desse percurso.

O professor Elisha Scott Loomis reuniu 230 demonstrações publicando o livro "T*he Pythagoroream Proposition*". A segunda edição teve 140 demonstrações a mais. Loomis classificou as demonstrações em dois tipos: algébricas (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e geométricas (baseadas em comparações de áreas) Além desse, no livro *Pitágoras Africano* de Paulus Gerdes (1992) o autor mostra uma série infinita de demonstrações deste teorema.

ISSN 2216-0159

Berté (1995), na França fez um estudo onde identificou que os erros mais freqüentes cometidos por alunos durante a resolução de problemas com a utilização do Teorema de Pitágoras seriam reflexos da ausência de problematização na abordagem do tema.

Bastian (2000) em sua dissertação indica que os erros cometidos pelos alunos na sua aplicação poderiam ser explicados como conseqüência da abordagem utilizada no seu processo de ensino-aprendizagem, porém sem esquecer os fenômenos concernentes à apreensão operatória. Nesse estudo ela indica outras classificações para as demonstrações do teorema de Pitágoras onde são aplicados outros recursos de matemática como, por exemplo, "a igualdade das áreas dos quadriláteros (método de Euclides), figuras geométricas nas quais as áreas se mantêm (método geométrico), princípio da igualdade da decomposição, princípio da igualdade do completamento, operações algébricas, relações de semelhança, métodos vetoriais, métodos da Geometria Analítica, etc" (p.27).

Quebra-Cabeças e seu uso na sala de aula: vantagens e desvantagens

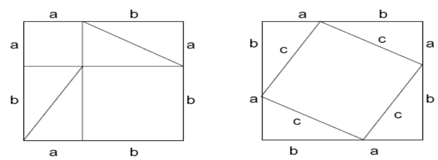
Vários pesquisadores na área de Educação Matemática (KALEFF, REI e GARCIA, 1997; Bigode, 1994) desenvolveram recursos didáticos buscando motivar os alunos para o estudo das formas e relacioná-los com o cotidiano, onde podemos destacar os jogos geométricos planos e espaciais, do tipo "quebra-cabeça", dobraduras de papel, malhas quadriculadas, isométricas.

Na utilização de jogos de quebra-cabeça, nota-se o fascínio e a motivação que desenvolvem em crianças, jovens e adultos, atraídos ora pelo colorido das peças, ora pelo desafio inerente da dinâmica do jogo, podendo assim ser um ótimo recurso para o ensino-aprendizagem de Matemática. Quando se permite a construção de jogos pelos alunos estamos promovendo a oportunidade de revisitar assuntos de geometria comumente esquecidos pelos professores além de despertar o interesse, pois eles estarão "brincando" com sua produção. Dessa forma, os alunos também podem desenvolver a percepção visual e a coordenação motora, entre outras coisas.

De acordo com os PCN[2] "as atividades de geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Para delinear esse caminho não se deve esquecer a articulação entre três domínios: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas" (Brasil, 1998).

Sobre a articulação destes domínios, devemos tomar bastante cuidado quanto à validação das provas com uso de recursos materiais. No caso do Teorema de Pitágoras os PCN ainda comentam que:

> O professor propõe ao aluno, por exemplo, um quebra-cabeça constituído por peças planas que devem compor, por justaposição, de diversas maneiras diferentes, um modelo material de um quadrado (ver figura). Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, observa-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Diz-se, então, que o Teorema de Pitágoras foi 'provado'.



> (...) Apesar da força de convencimento para o aluno possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências possam ser aceitas como "provas" no terceiro ciclo; é necessário, no quarto, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais (Brasil, 1998, p. 126-127).

Posteriormente no quarto ciclo as justificativas para esse tipo de demonstração poderá ser feita com base a congruência de figuras planas e no princípio da atividade para as áreas.

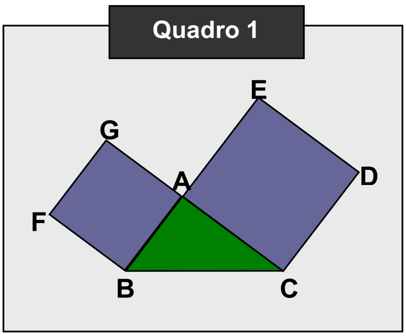
Madsen (1993, p.10) em seu livro *Descobrindo Padrões para o Teorema de Pitágoras* traz uma discussão sobre equicomposição e decomposição

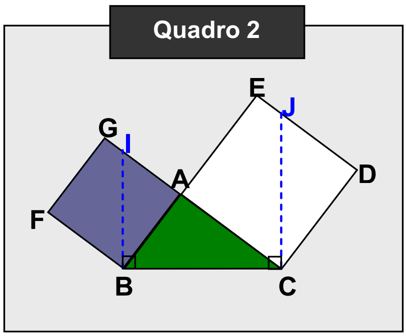
2 Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil).

de figuras. Nesse livro o autor sugere uma questão “É possível decompor o quadrado da hipotenusa num número finito de polígonos que possam compor o quadrado de um dos catetos e o quadrado de outro cateto?” Essa pergunta é respondida afirmativamente e exemplificada a partir da decomposição em cinco polígonos, proposta pelo escritor francês J. Ozanan (1640-1717) na qual nos deteremos a seguir.

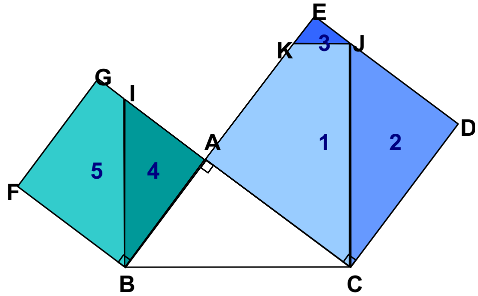
Confecção do Quebra-Cabeça Pitagórico

Considere o triângulo ABC retângulo em A e os quadrados ACDE e ABFG construídos a partir dos catetos do triangulo ABC (Quadro 1). Trace BI e CJ perpendiculares a hipotenusa BC do triangulo ABC (Quadro2).





Agora tracemos JK segmento paralelo a BC, obtendo os polígonos 1, 2, 3, 4 e 5 que serão as peças do quebra-cabeça, conforme Quadro 3.



A partir dessa divisão em peças podemos discutir sobre as características dos polígonos formados:

Atividade 1:

(A) Como você pode classificar os polígonos formados a partir da decomposição de Ozanan expostas no Quadro 3 (Nomeie de acordo com a numeração de cada polígono):

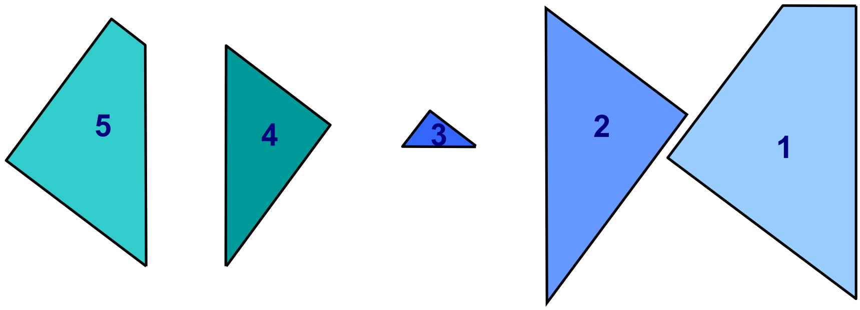
1: ____________________ 2: ____________________

3: ____________________ 4: ____________________

5: ____________________

(B) Quantos ângulos retos você observa em cada figura?

(C) Com as 5 peças desse quebra-cabeça através da justaposição monte apenas um quadrado que terá o lado igual a hipotenusa BC do triângulo ABC.



D) Agora com a resposta da questão C em mãos, descreva o processo de construção da decomposição de Osanan no quadrado de lado BC

Após essa atividade, através do princípio da aditividade relativa às áreas de figuras planas justapostas é possível concluir que a área do maior quadrado é a soma das áreas dos dois quadrados menores. Daí se parte para a identificação desses quadrados como sendo construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Teríamos, dessa forma, uma verificação com auxilio de materiais concretos do Teorema de Pitágoras.

Kallef, Rei e Garcia (1997) observaram que crianças a partir de oito anos já realizam tarefas desse tipo. Indicam ainda que essas atividades "devem ser realizadas como uma preparação visual dos conceitos que o aluno deve formar, para poder organizar, informalmente as concepções matemáticas ao estudo do Teorema de Pitágoras que queremos introduzir em fase mais avançada de escolaridade" (p. 52).

 ISSN 2216-0159

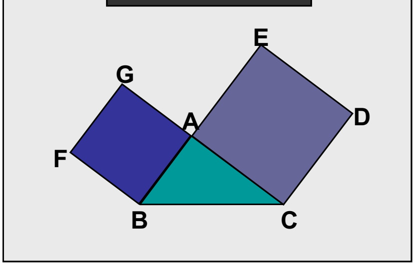
Confecção do Quebra-Cabeça Pitagórico '*Dissecção de Perigal*'

O próximo quebra-cabeça se originou a partir da demonstração de teorema de Pitagóras feita por Henry Perigal (1801-1898) corretor inglês em 1830 que ficou conhecida como "*Dissecção de Perigal*".

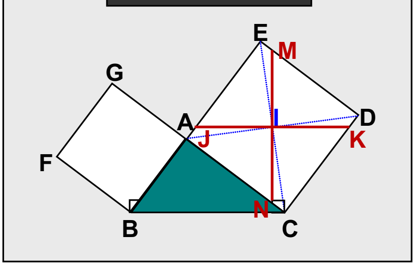
A partir de agora discutiremos a construção desse quebra-cabeça. No quadro 4 dispomos dos quadrados ABFG e ACDE construídos a partir dos catetos do triângulo retângulo ABC.

No quadrado ACDE traçamos as perpendiculares MN e JK que passam pelo centro I (marcado pelo encontro das diagonais AD e CE) desse quadrado, com MN perpendicular a hipotenusa BC, conforme mostra o quadro 5[3].

Quadro 4

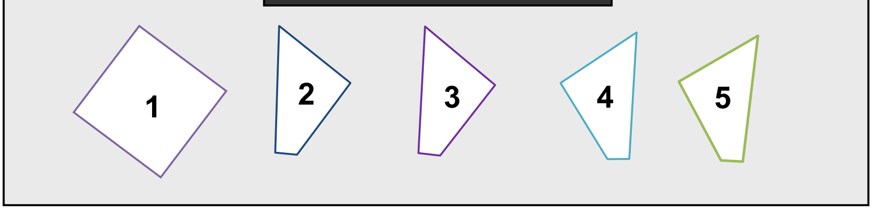


Quadro 5



Abaixo no quadro 6 mostramos as peças formadas a partir dessa construção

Quadro 6

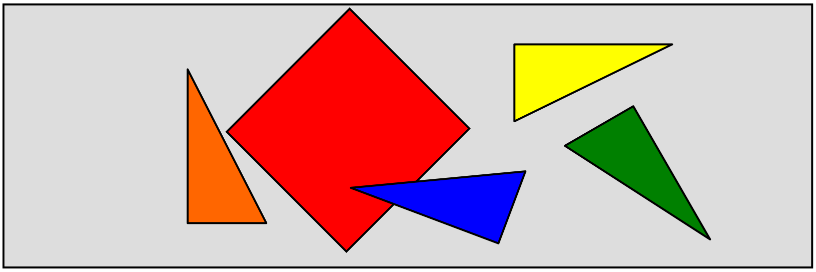


3 As figuras em evidencias nos quadros acima foram produzidas a partir do livro de Madsen (1993) pelas autoras Lialda Cavalcanti e Cristiane Rocha

Praxis & Saber - Vol. 2. Núm. 3 - Primer Semestre 2011 - Pág. 103 - 118

Notamos a que as figuras 2, 3, 4 e 5 são congruentes. Essa observação pode ser facilmente observada pelos alunos através da sobreposição de peças. Agora é com você, monte o quadrado relativo a hipotenusa do triângulo retângulo com as cinco peças.

Confecção do Quebra-Cabeça Pitagórico nº 3



Agora, vamos montar um quebra – cabeças construindo as seguintes peças:

- 4 triângulos retângulos congruentes com as medidas dos catetos iguais **a** **b** e **c**
- 1 quadrado com medida do lado igual a medida da hipotenusa do triangulo retângulo **a**

Atividade 2:

(A) Qual o polígono que é possível formar juntando-se as 4 peças congruentes? Por quê?

(B) É possível formarmos polígonos, juntando-se as 5 peças ? Se sim, quais?

Resposta 1	**Resposta 2**

Praxis & Saber - Vol. 2. Núm. 3 - Primer Semestre 2011 - Pág. 103 - 118

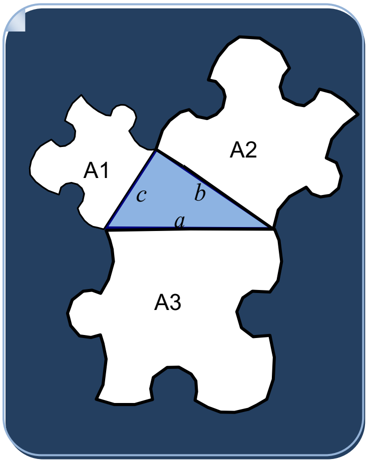
c) Utilizando-se a área do quadrado e o produto notável (Quadrado da soma de dois termos) encontraremos uma relação matemática (teorema) difundida pelos discípulos de uma escola grega que envolve uma propriedade específica entre os lados do triângulo retângulo: o terno numérico **(a, b, c).** Prove este teorema.

Resposta 3

Os quebra-cabeças aqui apresentados apresentam de maneira lúdica por meio de experimentos o teorema de Pitagóras. A criação dos mesmos se fundamenta nas diversas demonstrações geométricas[4] produzidas para esse teorema. Não representam demonstrações matemáticas em si, mas permitem conjecturas como a generalização apresentada a seguir.

Generalização do Teorema de Pitágoras

George Pólya (1887-1985) húngaro que em 1945 publicou o famoso livro "*How to Solve It*" onde ele descreve estratégias de resolução de problemas que até hoje são utilizadas na matemática e no ensino de matemática. Pólya também produziu uma demonstração para o teorema de Pitágoras, trazendo o que podemos chamar de uma generalização para esse importante teorema. A seguir, descrevemos essa generalização.



4 No site http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teorema-pitagoras.htm há a apresentação de outros quebra-cabeças baseados na demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras com aplicativos de Java

Suponha que seja possível a construção, sobre os lados de um triângulo retângulo, figuras semelhantes A1, A2 e A3 de modo que:

$$Área(A3) = Área(A2) + Área(A1)$$

Conforme a figura ao lado. Sendo A1, A2 e A3 figuras semelhantes temos que:

$$\frac{Área(A3)}{Área(A2)} = \frac{a^2}{b^2}\,;\ \frac{Área(A3)}{Área(A1)} = \frac{a^2}{c^2}\,;\ \frac{Área(A2)}{Área(A1)} = \frac{b^2}{c^2}$$

Suponha agora que B3, B2 e B1 são outras figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre os lados do mesmo triângulo retângulo (a,b,c). Logo,

$$\frac{Área(B3)}{Área(A3)} = \frac{Área(B2)}{Área(A2)} = \frac{Área(B1)}{Área(A1)} = \alpha$$

Onde podemos escrever que

$$Área(B3) = \alpha \cdot Área(A3)$$
$$Área(B2) = \alpha \cdot Área(A2)$$
$$Área(B1) = \alpha \cdot Área(A1)$$

E daí

$$Área(B3) = \alpha \cdot Área(A3) = \alpha\big(Área(A2) + Área(A1)\big)$$
$$= \alpha \cdot Área(A2) + \alpha \cdot Área(A1)$$
$$= Área(B2) + Área(B1)$$

Desse modo mostramos que se existirem figuras semelhantes particulares A3, A2, A1, construídas respectivamente sobre os lados de um triângulo retângulo (a,b,c) que satisfaça a condição:

$$Área(A3) = Área(A2) + Área(A1)\,.$$

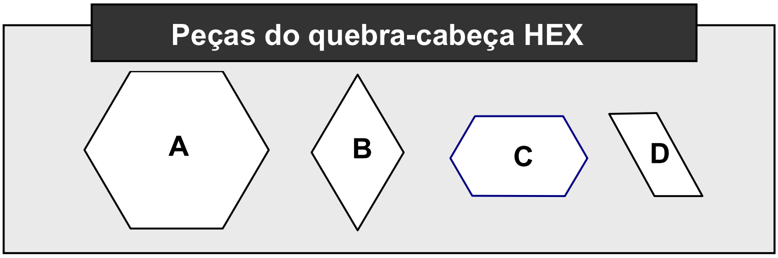
Então, quaisquer outras figuras semelhantes B3, B2 e B1 construídas sobre a hipotenusa a e os catetos b e c, possuem a mesma relação.

Já sabemos pelas considerações anteriores que essa relação pode ser aplicada para quadrados semelhantes, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

 ISSN 2216-0159

O resultado de Pólya é aplicado a quaisquer figuras, muitas delas bem criativas. A partir de algumas dessas generalizações foram criados alguns puzzles (termo americano para problema recreativo que apresenta alguma dificuldade, quebra-cabeça) em particular separamos uma figura que consiste de um triângulo retângulo juntamente com três hexágonos regulares cuja medida do lado de cada um deles é igual à medida do lado do triângulo no qual estão desenhados.

A escolha especifica dessa figura se justifica pelo quebra-cabeça que será construído a partir da mesma. A construção desse quebra-cabeça é mais complicada, pois o número de peças é maior e as formas são menos utilizadas em outros jogos.



Para formar o quebra-cabeça HEX[5] precisaremos de 3 peças A; 3 peças B; 3 peças C e 6 peças D, formando um total de 15 peças com as quais o aluno 4deve montar os hexágonos formados a partir dos catetos do triângulo retângulo e depois montar com todas as peças o hexágono formado a partir da hipotenusa do triangulo.

Ao lado apresentamos uma das soluções para o hexágono formado a partir da hipotenusa do triângulo retângulo. Para reproduzir com seus alunos esse tabuleiro aconselhamos a utilização da malha isométrica (formada por triângulos eqüiláteros).

Essa abordagem permite identificar relações entre as figuras produzidas no

[5] Jogo reproduzido da Experimentoteca de jogos matemáticos do Laboratório de Ensino de Matemática da UFPE

ISSN 2216-0159

HEX revisitando conteúdos como frações a áreas desses polígonos, como pro exemplo:

(1) Que fração você pode compor relacionando as figuras (A) e (B)? Qual a relação que podemos inferir entre as áreas (A) e (B)?
(2) E entre as áreas das figuras (A) e (D)?
(3) Qual a relação que você pode chegar ao comparar as figuras (A) e (C)?
(4) Se considerarmos a área da figura D como 1 unidade de área, você pode calcular a área das figuras A, B e C?

Esse tipo de pergunta faz com que os alunos discutam e criem através da sobreposição de peças as suas conjecturas, permitindo que cheguem a resposta sem a utilização de fórmulas já prontas.

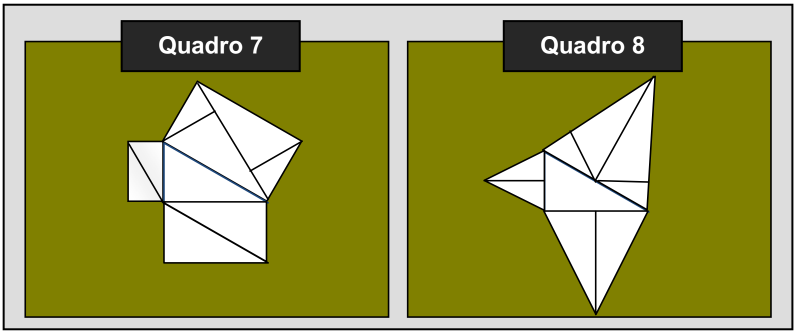
Durante o procedimento da resolução do desafio o professor poderá fazer comentários a respeito da simetria encontrada em algumas soluções. Neste desafio, os alunos que estão estudando o teorema de Pitágoras, percebem que a área do hexágono regular construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos hexágonos regulares construídos sobre cada um dos catetos.

Agora é com você! Construa a partir das peças do quebra-cabeça HEX dois hexágonos regulares (H1 e H2). Não pode haver sobreposição de peças e todas as peças deverão ser utilizadas nessa construção.

Esse desafio é bastante útil para alunos que estão estudando o teorema de Pitágoras, perceberem que a área do hexágono regular construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos hexágonos regulares construídos sobre cada um dos catetos.

Durante o procedimento da resolução do desafio o professor poderá fazer comentários a respeito da simetria encontrada em algumas soluções.

Outros quebra-cabeças podem ser construídos a partir da generalização do Teorema de Pitagoras como o proposto por Kaleff et al (1997) nos quadros 7 e 8 a seguir.



O interessante nesses quebra-cabecas é que eles são construídos com as mesmas peças podendo ser a fonte de discussão de figuras semelhantes e das relações entre as áreas das mesmas. Outras figuras semelhantes podem ser produzidas com a utilização dessas mesmas figuras, basta utilizar a justaposição das peças!

Outra curiosidade sobre os ternos pitagóricos diz respeito aos membros da escola grega**,** cujo símbolo era um **Pentagrama**, que elaboraram um método para obtenção destes ternos, como se apresenta na tabela a seguir:

m	n	$c = m^2 - n^2$	$b = 2m.n$	$a = m^2 + n^2$
2	**1**	**c = 3**	**b = 4**	**a = 5**
3	**1**	**c = 8**	**b = 6**	**a = 10**
3	**2**	**c = 5**	**b =12**	**a = 13**
4	**1**	**c = 15**	**b = 8**	**a = 17**

Considere as seguintes medidas:

- Catetos **: b e c**
- Hipotenusa: **a**

Sejam m e n dois números inteiros tais que um é menor que o outro (**m >n** ou **n < m**)

ISSN 2216-0159

Considerações Finais

Acreditamos que as construções dos jogos de quebra-cabeças apresentadas podem fomentar a discussão sobre o Teorema de Pitágoras e sobre aspectos gerais da matemática, explicitando de maneira lúdica relações com outros assuntos como áreas de figuras planas, razão e proporção.

As atividades apresentadas podem proporcionar discussões dessas temáticas em aulas de Matemática com os alunos do Ensino Fundamental e ainda possibilitam o debate com outros professores em momentos de formação continuada apresentando outras maneiras de se trabalhar com quebra-cabeças do teorema de Pitágoras em sala de aula.

Finalmente, na constituição de um grupo de estudo, a concepção de ensino num processo dialógico de construção de saberes, favorece o desenvolvimento de investigações apoiadas no modelo da racionalidade prática à construção de relações e saberes significativos à prática profissional de professores, à medida que promove a cooperação, a colaboração e o respeito aos saberes teóricos dos professores.

Referências Bibliográficas

Bastian, Irma Verri. (2000). *O Teorema de Pitágoras.* Dissertação. São Paulo: Pontíficia Universidade Católica de São Paulo. In: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/irma_verri_bastian.pdf

Belfort, E. & Vasconcelos C. B.(2005) *Discutindo Práticas em Matemática.* Seed. Tv escola salto / para o futuro. Brasília. DF.

Berté, A. (1995). Différents ordres de présentation des premières notions de géometrie métrique dans lénseignement secondaire. *Recherches em didactique des mathématiques*, vol.15, n. 3, PP. 83-130. La Pensée Sauvage Editions.

Cintra,C.O. & Cintra, R.J.S. (2003). *O Teorema de Pitágoras*. Recife: O Autor.

Gerdes, Paulus. (1992). *Pitágoras africano*: um estudo em cultura e educação matemática. Moçambique: Instituto Superior Pedagógico.

Brasil. (1998), Ministério da Educação e Cultura. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília.

Kaleff, A.M.R.M.; Rei, D.M. e Garcia, S.S. (1997). *Quebra-cabeças geométricos e formas planas*. Niteroi: EDUFF.

Madsen, Rui.(1993) *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*. São Paulo: Atual.

Polya, George. (1992). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas

Revista Super interessante "Saveiro a risca". Ano 12, N° 4 abril de 1998.

 ISSN 2216-0159