EL PROBLEMA DE LA FUNDAMENTACIÓN DE LA MATEMÁTICA Y LA FILOSOFÍA *

Christian Thiel

EL FILÓSOFO LUDWIG WITTGENSTEIN escribió, el 1 de mayo de 1915, en su diario la frase: "Es un arte por excelencia del filósofo no ocuparse de cuestiones que en nada le incumban".[1] ¿No pertenecen a estas cuestiones, en general, los problemas de las ciencias particulares; en especial, por tanto, los de la Matemática? Parece que el mismo Wittgenstein no ha sido de esta opinión; en cualquier caso lo parece en lo que respecta a los fundamentos o principios de la Matemática, pues en aquella época, y todavía en años posteriores, se ocupó muy intensamente de los fundamentos de la Matemática. Pero, puesto que no nos ha dado sus razones para ello, quisiera constituir en objeto de mis propias reflexiones la cuestión de si los fundamentos de la Matemática son un objeto legítimo de investigación filosófica.

No sólo un gran número de matemáticos, sino asimismo de filósofos especializados querrían, con seguridad, solucionar la cuestión de su competencia de modo que el filósofo hubiera de tratar el llamado carácter de validez de las proposiciones matemáticas y, por el contrario, el matemático especializado decidiera la validez o no, efectivas, de determinadas proposiciones de tal tipo. Según ello, sería un abuso inadmisible que el filósofo quisiera criticar proposiciones matemáticas particulares o, en general, los métodos con los que el matemático alcanza dichas proposiciones.

* Texto corregido de una conferencia en la Technische Hochschule Aachen el 9 de junio de 1971.

[1] Ludwig Wittgenstein, Tagebücher 1914-1916, en: *Schriften*, vol. I, Frankfurt am Main, 1960, p. 135.

Pero no es ningún secreto que actualmente —y quizás ya desde hace unos ochenta años— con argumentos filosóficos no sólo se ha dudado de la validez de ciertas proposiciones matemáticas, sino también de la licitud de determinados métodos matemáticos. ¿Cómo pudo llegarse a una situación tal después de haber permanecido por siglos la Matemática como modelo de una ciencia rigurosa y absolutamente infalible? ¿No había sido incluso la meta de las demás ciencias alcanzar un *rigor* comparable al *euclidiano* mediante la imitación del método deductivo practicado por Euclides? Incluso aquí la Filosofía no había constituido una excepción, como, por ejemplo, lo muestra el intento (por cierto, fracasado) de Spinoza de crear una Ética *more geometrico*. Y hasta Kant había escrito en el prefacio a la segunda edición de su *Crítica de la Razón Pura:* "Las matemáticas, desde los tiempos más remotos a que alcanza la historia de la Razón Humana,... ha seguido el seguro camino de una ciencia" (B XI).

La causa de que la certeza de ciertos enunciados matemáticos haya llegado a ser, entretanto, problemática, hay que buscarla en la conmoción súbita que aquella situación de la Matemática, única en su clase, sufrió a fines del pasado siglo. Sin conocer las razones de esta crisis no es posible comprender la situación actual de la investigación matemática de fundamentos y sus relaciones con la Filosofía. Debo, por tanto, recapitular crítica y brevemente el origen de la crisis matemática de fundamentos, aunque mi intención sea completamente sistemática.

Hasta principios del siglo XIX había sido usual en análisis considerar las proposiciones del cálculo diferencial como enunciados sobre magnitudes infinitamente pequeñas —a lo que todavía hoy se alude con el nombre de *Cálculo infinitesimal*. Cauchy, que había observado la inseguridad de tales concepciones presupuestas de lo *Infinitamente Pequeño,* llegó a sustituir, en 1820, todos los enunciados sobre magnitudes infinitamente pequeñas por enunciados más comprensibles sobre procesos de límite. Cuando luego, a mediados de siglo, se intentó también reducir el concepto de número real a conceptos más simples, se mostró que en la construcción del Análisis se precisaban, por una parte, los números racionales y, por otra, o bien el concepto de secuencia o el concepto de conjunto. Georg Cantor propuso fundar el Análisis, como una teoría ocupada en conjuntos especiales, sobre una *Teoría de Conjuntos* por él desarrollada. Ésta, por cierto, recurría para la fundamentación de sus propias proposiciones a concepciones tan fuertes de las magnitudes infinitas, que colegas de Cantor en esta teoría presumieron pronto un retroceso en lo relativo a su precisión y exactitud. En primer lugar, Gottlob Frege presentó a fines de siglo un sistema axiomático de Lógica, que mostraba una precisión hasta entonces desconocida y parecía apropiado para ofrecer también los fundamentos rigurosos de la Teoría de Conjuntos cantoriana.

No está exento de ironía que justamente esta precisión permitiera a un joven matemático inglés deducir en el sistema de Frege una contradicción tan plena que no podía haber duda alguna acerca del naufragio de este sistema, de la teoría cantoriana y también, por desgracia, del Análisis clásico intuitivamente realizado. Me refiero aquí al descubrimiento de Bertrand Russell de la paradoja conocida hoy con su nombre, como fue publicado por el mismo Frege en 1903. Entonces fueron halladas en rápida sucesión ulteriores contradicciones, y a estos molestos descubrimientos se debe la conmoción de la Matemática, de la que hablé al principio. Desde entonces hay un problema de fundamentación de la Teoría de Conjuntos, y puesto que el Análisis no puede renunciar al concepto de conjunto, un problema de fundamentación del Análisis y, en general, de las teorías matemáticas construidas analíticamente. Estas disciplinas, asimismo partes totalmente decididas de la Matemática, precisaban su establecimiento sobre un nuevo y, en adelante, más seguro fundamento.

La polémica surgía —y surge hoy— en torno al modo en que esto pueda hacerse. Este problema de fundamentación, así considerado, es un problema metodológico y con ello la cuestión de la competencia de la Filosofía aparece bajo otro aspecto. Pues los problemas metodológicos no precisan, ciertamente, marginar al filósofo en el caso de la Matemática —por ejemplo, con la indicación de que la Matemática es una ciencia difícil hasta el extremo de que debe quedar sólo para los matemáticos. Más bien la situación es que los matemáticos han dejado desde hace mucho tiempo las cuestiones de la Metodología en manos del filósofo. Que esta actitud sea positiva, constituye ciertamente otra cuestión, pues es un hecho poco satisfactorio que muchos filósofos, apenas versados en Matemática, han dado su opinión sobre los fundamentos de la Matemática a un nivel tal que el matemático se ha visto impelido a desconocer estas respuestas sobre sus cuestiones de fundamentación. Por otra parte, los matemáticos actuales están muy lejos de la conciencia de responsabilidad metodológica de un Frege o un Russell y tampoco ha cambiado la situación la institucionalización de una investigación matemática de fundamentos propiamente dicha, puesto que ésta se comprende como una disciplina especial matemática, que tiene como objeto las proposiciones y métodos de otras disciplinas matemáticas, pero renuncia a reflejar sus propios fundamentos.

Esto sólo muestra, sin embargo, que la investigación actual de fundamentos de la Matemática ha olvidado sus propias fuentes y ha perdido de vista la tarea para cuya solución fue creada a principios de nuestro siglo. Debía, ciertamente, solventar la crisis de confianza de la Matemática, estableciendo sobre un fundamento más seguro el Análisis clásico y con este fin, en primer lugar, la Teoría General de Conjuntos. A la solución de este problema han dedicado décadas de su vida matemáticos importantes como Hilbert, Brouwer y Weyl, con plena conciencia de que en último extremo se enfrentaban aquí con un problema de Teoría del Conocimiento. Además se guiaban por ideas que sugerían la ordenación siguiente de los pasos de fundamentación: Puesto que todas las disciplinas matemáticas se sirven de razonamientos lógicos, debía fundamentarse primero la Lógica. A ella se dejaban reducir la Aritmética y la Teoría de Conjuntos, tal como Frege lo había intentado y, todavía tras él, lo hicieron Russell, Carnap y otros, de modo que así se conseguía ya su fundamentación; una reducción tal no era posible, de modo que debía ser encontrada una fundamentación propia y autónoma para ellas. Éste era el problema capital, pues sobre la Aritmética y la Teoría de Conjuntos se puede fundamentar, de modo conocido, el Análisis, pero a su vez sobre éste, al modo de la *Geometría analítica,* la Geometría euclidiana, y sobre ésta —o bien de nuevo analíticamente o mediante la especificación de modelos euclidianos— las Geometrías no-euclidianas.

En particular se mostró que al matemático y al investigador matemático de fundamentos se le presentaban exigencias muy diversas y fuertes, que han de tenerse en cuenta en una fundamentación. Aquí la Filosofía, si se prescinde de los neopositivistas formados en las Ciencias de la Naturaleza y de solitarios, como Hugo Dingler, ha fracasado en, como se suele decir, su dominio por excelencia. Para clarificar, por una parte, el fallo de la Filosofía y, por otra, su responsabilidad, existente antes como después, en el problema de fundamentación de la Matemática, debería aquí, sin adherirme estrictamente al desarrollo histórico, esbozar y discutir críticamente tres intentos, que hoy se dan para fundamentar la Matemática. Con ello emito al mismo tiempo un juicio sobre la situación en que, a mi parecer, la polémica matemática de fundamentos se encuentra actualmente.

La primera propuesta de fundamentación para las proposiciones de la Matemática es de un tipo que propiamente deriva de la problemática de los fundamentos de la Física. Christian Huygens lo empleo ya en 1690 en su tratado sobre la luz, cuando anunció que justificaría los principios allí puestos como básicos, al contrario de lo que es usual en Matemática, por el resultado de las consecuencias extraídas a partir de ellos. Este procedimiento debió encontrar un rápido éxito en la Matemática, pues ya en 1720 empleaba George Berkeley, en su escrito de crítica de fundamentos *The Analyst,* como argumento contra los partidarios del cálculo diferencial newtoniano que en una teoría matemática las consecuencias debían ser fundamentadas siempre mediante los principios, pero no los principios mediante las consecuencias.

Naturalmente, esta propuesta de fundamentación es todavía incompleta, en tanto no se diga cómo se justifican las consecuencias mismas. Esto debe hacerse mediante su corroboración al aplicarlas, pensando aquí ante todo en aplicaciones físicas —de este parecer son, en todo caso, los que representan hoy esta propuesta de fundamentación. Según esto, las proposiciones matemáticas, que se corroboran de modo público en la física y en la técnica, no pueden carecer de sentido ni ser falsas. Antes bien, su corroboración habla en favor de su corrección, o, más precisamente, por su corrección no ha de entenderse nada diferente de su corroboración. Por este motivo se han designado como *Teorías de Aplicación* las teorías susceptibles de corroboración, y a la propuesta de fundamentación que acabamos de descubrir como *Fundamentación Prognóstica,* porque la decisión sobre la corroboración fáctica de una Teoría de Aplicación depende de que sus proposiciones se corroboren también en el futuro. En este sentido también la Teoría de Conjuntos, por ejemplo, sería entonces un sistema (por supuesto que muy general) de hipótesis físicas.[2]

Este intento de fundamentación prognóstica tiene debilidades evidentes. En primer lugar, los matemáticos mismos no se conforman en modo alguno con la mera pretensión de que sus proposiciones se corroboren en la aplicación física. Y tampoco hay nada más lejos del pensamiento de los científicos naturales que querer poner a prueba una proposición matemática mediante su aplicación. Cuando, al mezclar dos litros de líquidos de diferente fluidez, no resultan exactamente dos litros, el experimentador no considerará sin más como falsada la proporción aritmética $1 + 1 = 2$, ni pedirá a sus colegas matemáticos una teoría aritmética nueva. Más bien comenzará a buscar los motivos de la inesperada desaparición aparente. Los supuestos matemáticos se consideran garantizados en el examen de hipótesis físicas o químicas. De modo que, efectivamente, la imagen de

[2] Cfr. Friedrich Kambartel, Erfahrung und Struktur. Bausteine zu einer Kritik des Empirismus und Formalismus, Frankfurt a. M., 1968.

una cimentación prognóstica de la validez de las proposiciones matemáticas puede elevar la confianza de ciertas personas en la Matemática, pero como propuesta de fundamentación no puede, sin embargo, ser considerada seriamente, ni tampoco es, como tal, representada por los mismos matemáticos.

La concepción más extendida en la actualidad es la de una fundamentación axiomática de la Matemática. De ella me voy a ocupar de un modo más profundo, aunque no se piense por ello que se le puede hacer justicia en el reducido espacio de un artículo. El método axiomático o deductivo descansa en la idea de comprender y hacer evidente la totalidad de las proposiciones verdaderas de una ciencia, poniendo al principio de la misma un número finito, lo más pequeño posible, de proposiciones verdaderas —llamadas principios o axiomas— de las cuales se derivan por consecuencia lógica todas las demás proposiciones verdaderas.

Desde muy pronto se debió llegar a este pensamiento, pues la representación axiomática clásica de la antigua Matemática en Euclides es ya el punto culminante de un desarrollo más largo, que desgraciadamente sólo podemos reconstruir de modo incompleto todavía. Nada habría que objetar a una construcción axiomática, e incluso el problema de la fundamentación sería notablemente simplificado, si fuera posible asegurar tanto la verdad de los enunciados iniciales, en número finito, como la corrección de los métodos de deducción empleados. Es discutido hasta qué punto intentó esto Euclides, pero un comentador tardío del siglo v d. C., Proclo, expresó por primera vez una concepción diferente del método axiomático que es hoy la predominante y de cuya utilidad para el problema de la fundamentación no puede dudarse en absoluto. Proclo escribe, en efecto: "El autor de un libro elemental de Geometría (debe) enseñar, por un lado, los principios de una ciencia, y por otro, las consecuencias de los principios; no precisa justificar los principios, pero sí las consecuencias" (Comentario a Euclides, 75, 6-11).

Apenas puede determinarse hoy día si Proclo quiso decir con ello algo semejante a lo de los actuales defensores de una fundamentación axiomática de la Matemática; lo cual carece relativamente de importancia en comparación con la imagen de fundamentación extendida hoy. Para hacer comprensible esto voy a recurrir otra vez brevemente al desarrollo histórico. Naturalmente, la conmoción de la Matemática por las antinomias de Teoría de Conjuntos, mencionada al principio, no podía tener como consecuencia una suspensión provisional de la marcha de la teoría e investigación matemática, ni tampoco una renuncia a la aplicación de las proposiciones matemáticas en tanto no se alcanzara una solución satisfactoria al problema de la fundamentación. Se reveló así como meta principal la puesta a punto de un sistema de Análisis que excluyera de forma demostrable en cualquier caso las conocidas contradicciones. El primer paso en esta dirección lo dio Ernst Zermelo cuando, en 1908, formuló un sistema axiomático de la Teoría General de Conjuntos que satisfacía las intenciones cantorianas, al tiempo que en él no eran ya derivables las contradicciones que hasta entonces se producían.

El mismo Zermelo tenía clara la idea de que esto no podía ser suficiente. Pues ¿quién decía que no se pudieran deducir *otras* antinomias de este sistema? Zermelo exigió, por ello, para la fundamentación de su teoría axiomática de conjuntos una demostración de su consistencia. Los investigadores de fundamentos matemáticos se han acostumbrado hoy a considerar como contenido en esta exigencia todo lo que pueda ser requerido a una fundamentación razonable de un sistema axiomático. El mismo Zermelo no se engañó nunca al respecto y pensó siempre que la exigencia de consistencia era una exigencia *mínima;* honradamente, habría añadido a ella su marginamiento de la "cuestión del origen y el dominio de validez" de los axiomas como "más filosófica". Con ello no habría dicho que fuera imprescindible en el futuro una respuesta a esta cuestión. De hecho la situación es que hasta ahora no se ha logrado una prueba de consistencia ni para el sistema original de Zermelo ni para la forma moderna perfeccionada de aquél, que, como

Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (bremente, "ZF"), goza hoy de elevada consideración entre los matemáticos.

La exigencia de Zermelo sigue subsistiendo. Históricamente ha conducido a la formulación del programa de Hilbert de una nueva fundamentación de la Matemática. La idea de este programa, bastante complejo en detalles, es considerar las teorías matemáticas en su forma axiomatizada como un juego de deducción, en el cual, a partir de ciertas posiciones iniciales, se obtienen otras posiciones según reglas dadas. Ha de demostrarse que en tal juego no es posible alcanzar dos posiciones de juego que, en una interpretación material, resulten ser una proposición matemática determinada y su negación. Ya Frege había pensado en esto. Pero había renunciado a su ejecución, pues era de la opinión de que se podría mostrar la consistencia de su sistema de un modo más sencillo. En esto, como mostró la antinomia de Russell, se había, naturalmente, equivocado. Ahora Hilbert y sus colaboradores se esforzaban en la capital matemática de Göttinga en demostrar la consistencia del Análisis clásico del modo indicado.

El planteamiento de Zermelo fue llevado a un punto de vista de fundamentación que establecía determinadas exigencias en los medios de demostrar la consistencia. Ciertamente, estos medios de demostración, cuando se aplican también a un llamado Metagrado, son formaciones conceptuales y modos de inferencia de tipo matemático. La exactitud de toda la Matemática en el sentido del programa de Hilbert incluye también una demostración de la exactitud de estos medios. ¿No es circular tal empresa? Las concepciones del círculo de Hilbert incidieron en que, de hecho, en la demostración han de ser empleados medios matemáticos y, por tanto, éstos han de ser formulables en el sistema investigado. Por otra parte, han de ser exactos —en todo caso, más exactos que el sistema axiomático cuya consistencia había de demostrarse al principio.

De este modo se hace patente que este llamado punto de vista formalista de los fundamentos supone una relación de fundamentación muy particular entre Matemática y Metamatemática. En un sentido claro, puede hablarse de una fundamentación en la relación mostrada sólo si los medios de demostración de la demostración de consistencia fueran *más débiles,* esto es, más pobres de supuestos que los del sistema axiomático. Cuando Kurt Gödel descubrió, en 1931, que para un sistema axiomático que contenga al menos la Aritmética, no puede nunca realizarse una demostración de consistencia empleando sólo medios formalizables en tal sistema, el descubrimiento supuso un duro golpe, por ello, para el programa de Hilbert. Para la demostración de consistencia de un sistema tal son necesarios medios *más fuertes* que los formalizables en él.. Thoralf Skolem ha hecho notar muy oportunamente al respecto: "Es como si quisiéramos suspender la planta baja de un edificio de su primer piso y éste a su vez del segundo piso, y así sucesivamente". Evidentemente se llega así a una situación exactamente inversa a la de una relación de fundamentación, y de ahí que pueda hablarse con razón de un fracaso del primitivo programa de Hilbert.

Pero ¿qué fue propiamente refutado? El mismo Hilbert había distinguido entre la construcción axiomática de una teoría y la "necesidad de fundamentar las proposiciones consideradas como axiomas y como tales puestas en la base". Su propuesta especial de fundamentación era la de limitarse a la fundamentación axiomática. Incluso cuando en 1923 ofreció una fundamentación intuitiva de la Aritmética elemental, afirmó que la había elegido sólo por mor de la brevedad y que, asimismo, fundamentaba la Aritmética de modo axiomático en la exposición definitiva de su teoría. Tal como él mismo la formuló, la meta de Hilbert era la "penetración en capas de axiomas cada vez más profundas".

Esta postura de Hilbert me ha resultado siempre enigmática, pues contradice todas las ideas que normalmente se suele tener —bien entendido que desde las más diferentes direcciones de la Teoría de la Ciencia— de lo que es una fundamentación. En tan escasa medida como se reconozca como fundamentación de una proposición A el que pueda ser retrotraída a una proposición B cuya fundamentación a su vez sólo sea posible mediante una aplicación de la proposición A,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, bend left] \\ B \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

(tales pruebas circulares pueden ocurrir en una forma muy refinada: por ejemplo, en la formación impredicativa de conceptos), en tan escasa medida, digo, se podrá llamar una fundamentación a que alguien retrotraiga una proposición A a una proposición B, ésta de nuevo a una proposición C, y a continuación diga "y así sucesivamente":

$$\begin{array}{lll} & & A \\ & B \longrightarrow & A \\ C \longrightarrow & B & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \end{array}$$

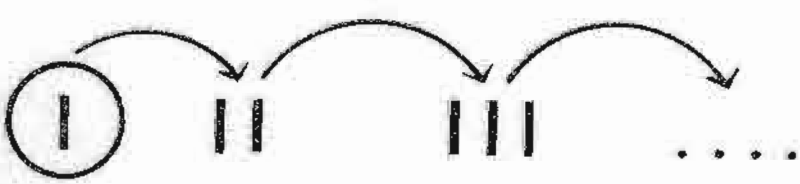
En algún momento deberá detenerse en una proposición, que se pueda *creer* puramente sin una fundamentación. En un caso tal podremos estar seguros de que nuestro interlocutor, que ciertamente ha gastado hasta entonces sólo un número finito de años de su vida, no ha obtenido en modo alguno en este camino infinito su supuesta comprensión de la validez de la proposición A. Por tanto, le debemos negar el reconocimiento de un argumento tal como fundamentación.

Mientras el llamado Teorema de Gödel de 1931 demuestra la imposibilidad de realizar la propuesta especial de fundamentación de la Escuela de Hilbert, un resultado posterior de Gödel muestra una limitación de los métodos axiomáticos en general. Cada sistema axiomático, susceptible de expresión y libre de contradicción, es incompleto en el sentido de que siempre se pueden indicar enunciados verdaderos de la teoría en cuestión que no sean derivables del sistema axiomático dado. Esta limitación es esencialmente infranqueable: Incluso cuando se añaden al sistema axiomático originario los enunciados gödelianos no derivables de él, se pueden indicar para el sistema axiomático así ampliado enunciados de la teoría, nuevos y verdaderos, pero inderivables. Este hecho se repite en cada ampliación de esta índole. Ya el sistema axiomático de Peano de la Aritmética en su formulación usual es incompleto en este sentido; por tanto, si una demostración de consistencia en el sentido hilbertiano tuviera éxito, no podría hacerse una fundamentación de *toda* la Aritmética.

El Hilbert tardío revisó sus concepciones de una fundamentación de la Matemática bajo la impresión de los resultados gödelianos. Ya no vincula la seguridad de los medios de demostración, empleados en una demostración, a su formalización en el sistema investigado. En su lugar se exige ahora la comprensión inmediata de estos medios en un sentido parecido al representado por el partido genérico en la polémica de fundamentación matemática, el llamado intuicionista. Hasta ahora no he abordado conscientemente el intuicionismo, puesto que el fondo filosófico de esta dirección, a mi parecer, es apenas convincente, como el de cualquier dirección ontologizadora, mientras que todos los hallazgos, que agradecemos al intuicionismo, han encontrado su entrada en la tercera propuesta de fundamentación, a la que me dedico ahora, tras lo cual deberán resultar claras las debilidades de la propuesta de fundamentación axiomática.

Deseo anticipar que esta tercera propuesta no impedirá la construcción axiomática de teorías matemáticas. Todo lo contrario. Pero nace de una mejor comprensión del carácter de las teorías axiomáticas. Este punto de vista, que se encuentra también en el filósofo (y antiguamente matemático) Edmund Husserl, lo había enarbolado ya Frege contra Hilbert. Pero con ello no estaba triunfante sobre el gran colega, que aquí se mostraba más incomprensivo. Este punto de vista establece que las teorías axiomáticas son teorías *formales*, que no representan nexos de fundamentación, sino sólo *formas de posibles nexos de fundamentación*, que han de proporcionarse sólo en el caso particular. En el lenguaje de los matemáticos: *primero* deben ser construidos los modelos de teorías axiomáticas. Si una disciplina matemática es asegurada materialmente de este modo, entonces —pero también sólo entonces— puede ser asegurada, esto es, construida axiomáticamente. La renuncia, usual hoy en Matemática, a una construcción constructiva precedente de teorías matemáticas, debida al influjo del Círculo de Bourbaki, ha sufrido una crítica acerba por parte filosófica (y esta vez por parte matemática, enteramente competente). Significa, así escribe, por ejemplo, Friedrich Kambartel, una renuncia a una fundamentación material y con ello "en último término a una fundamentación en general de enunciados" (op. cit., p. 241).

¿Qué tienen, por el contrario, que ofrecer los investigadores de fundamentos tan favorecidos por los filósofos? En primer lugar sacan las consecuencias del fracaso del programa de Hilbert para fundamentar finalmente, en un sentido aceptable, las teorías matemáticas que ulteriormente sean construidas axiomáticamente. Ya no plantean a los medios de demostración de la demostración de consistencia la exigencia de que tengan que ser formulables en el sistema investigado mismo. Hay ciertamente métodos de demostración que deben ser considerados como válidos independientemente de cualesquiera sistemas a los que puedan pertenecer. Uno de ellos es, sin duda, la inducción completa: Si puedo mostrar que una propiedad E(x) se aplica al número cardinal 1, y si tengo un procedimiento tal que, si la propiedad E(x) conviene a cualquier número cardinal, transmite demostrativamente esta propiedad también al número cardinal sucesor, entonces puedo estar seguro de que la propiedad E(x) conviene de hecho a *cada* número cardinal:



Puede apreciarse fácilmente que esto es intuitivamente *finito*. La formulación de este procedimiento, la proposición llamada "Principio de Inducción Completa",

$$E(1) \wedge \Lambda_m . E(m) \rightarrow E(m+1) . \dot{\rightarrow} \Lambda_n E(n),$$

deberá, por tanto, considerarse fundamentada independientemente de que yo la emplee o no para mostrar la consistencia de un sistema axiomático, en el que esta misma proposición no sea expresable.

De modo parecido pueden reconocerse como exactos los medios llamados *combinatorios,* aunque esta denominación no es, a mi parecer, particularmente afortunada. Supongamos que tengo un sistema axiomático primitivo con la regla de sustitución y la regla de separación

$$\frac{\begin{matrix} S \\ S \rightarrow T \end{matrix}}{T}$$

para la derivación de proposiciones a partir del sistema axiomático, que puede constar del par de axiomas $p \rightarrow p$ y $\neg(p \rightarrow p)$. Sea aquí "p" una variable propia, que por tanto sólo pueda ser sustituida por expresiones que ya hayan sido derivadas según las dos reglas mencionadas. Mediante una consideración *combinatoria* puedo entonces ver que la variable "p" no puede derivarse sola. Pues cada uno de los dos axiomas contiene dos veces la variable "p". Aplicando la regla de sustitución, en cada instancia de sustitución obtengo siempre exactamente el mismo número de variables. Lo mismo vale en la aplicación de la regla de separación, puesto que en toda forma derivable de nuestra teoría axiomática (con excepción de los axiomas mismos) tanto *antes* como *después* de una flecha hay exactamente el mismo número de variables. La fórmula "p" misma, sin embargo, contiene la variable "p" exactamente una vez, y, por tanto, un número impar de veces. No puede, por tanto, pertenecer a las fórmulas derivables en nuestro sistema axiomático. El ejemplo está escogido con segunda intención, de modo que muestre al mismo tiempo que, frente a la representación usual en los libros de texto, la consistencia de un sistema axiomático no puede siempre ser mostrada, porque se muestre cualquier fórmula correctamente formada, pero no derivable: "p" está correctamente formada, pero no es derivable, y, sin embargo, el sistema es contradictorio cuando interpretamos "p" como variable enunciativa, $\neg$ como negador y $\rightarrow$ como subjunción.[3]

Dejemos ya estas cuestiones de detalle, que sólo debían servir para ejemplificar métodos finitos. En el estadio aquí alcanzado, la Matemática posthilbertiana no está todavía reflejada en la medida en que el grupo de medios, que hay que considerar como exactos, no ha sido todavía, ni por intento, delimitado. Esto es comprensible, puesto que tras las experiencias con el programa de Hilbert se suele buscar protección en la limitación previa de los medios metamatemáticos de demostración. Además no hay en absoluto esperanza de poder anticipar ya desde ahora una delimitación firme de lo exacto: el dominio de los medios finitos es, él mismo, indefinido.

Dos razones apoyan, sin embargo, al menos la pretensión de una primera delimitación. Una es de naturaleza técnica: sólo con una delimitación formalmente establecida de los medios de construcción y de demostración empleados puede indicarse de modo preciso lo que, de hecho, pueda abarcarse de la Matemática clásica, que se quiere construir y justificar. La segunda es de naturaleza más filosófica: los procedimientos considerados como exactos deben, a su vez, ser cuestionados por si no muestran una propiedad común a la que deban este carácter de particular exactitud.

Respecto a esta cuestión, creo que las perspectivas más valiosas han venido a parar a aquel punto de vista que se conoce con el nombre de *operativismo* o *constructivismo*. Como en el punto de vista hilbertiano, los objetos considerados son también aquí los signos y series de signos, por tanto, fórmulas, enunciados y pruebas, matemáticos. Pero estos signos y series de signos ya no sólo son tratados, atendiendo a su forma, como objetos físicos, sino como objetos que son construidos por nosotros con intenciones

[3] Cfr. Heinrich Scholz, Die Sonderstellung der Logik-Kalküle in Bereich der elementaren logistischen Kalkülforschung, en *Travaux du XI^{e} Congrès International de Philosophie (Congrès Descartes), 6: Logique et Mathématiques,* Paris, 1937, *20,* 40-42.

determinadas y con los que realizamos acciones determinadas con una intención determinada. De este modo los cálculos más generales deben ser considerados como sistemas de reglas, i. e. con reglas iniciales $\Rightarrow A$ y reglas ulteriores $B \Rightarrow C$. Son reglas cuya fundamentación sólo puede consistir en que el actuar según ellas sirve a un fin justificado e indicado expresamente. Es clara la ventaja de este planteamiento. En un obrar tal con arreglo a un fin, poseemos una comprensión casi completa. Podemos controlar en cada caso si hemos alcanzado la meta a que apuntábamos, y podemos controlar siempre si una acción ha sido realizada o no, según un esquema de acción propuesto; por ejemplo, según una regla de cálculo. Esto vale particularmente para los pasos particulares en la derivación a partir de un sistema de axiomas, que anteriormente ha sido justificado como medio para la comprensión de una teoría matemática ya construida.

Los representantes de este punto de vista operativo suelen citar en su favor a Kant, que dijo en una ocasión que sólo podemos comprender realmente aquello que nosotros mismos hemos construido. El enunciado que más frecuentemente se cita al respecto, "En la Matemática sólo *existe* aquello que nosotros mismos podemos construir", choca a menudo con resistencias agudas. Voy a pasar por alto este rechazo, en cuanto está apoyado en una creencia en una esfera ideal, en la que los objetos de la Matemática existen ya de una vez por todas, pues un punto de vista tal ha de ser, a su vez, defendido. Allí donde la oposición a la tesis operativa no esté anclada en una creencia tal, está enraizada las más de las veces en una analogía muy sugestiva, pero inadecuada. Ciertamente, en otras ciencias no suele ocurrir que consideremos existente sólo aquello que nosotros u otros hombres hemos construido. El zoólogo acepta con razón que hay leones, aunque los leones no hayan sido construidos por los hombres. Sin embargo, en las Ciencias del Espíritu sucede algo diferente; aquí hemos de comprender textos y sólo podemos comprenderlos a causa de qué y cuándo han sido construidos como textos por otros hombres sobre una base de comunicación que nos es accesible también a nosotros. Pues bien, en la Matemática estamos bastante más cerca de las Ciencias del Espíritu que de la Zoología: construimos, en principio, esencialmente sin lenguaje, determinados artefactos; por ejemplo, signos numéricos o formas geométricas fundamentales, y comenzamos luego la construcción de un lenguaje matemático sobre nuestras acciones con estos artefactos, sobre los fines de estas acciones, sobre sus resultados, etcétera.

Lamento profundamente no poder ofrecer aquí, a modo de ejemplo, una parte característica de este planteamiento, como pudieran ser los inicios de la Aritmética operativa o constructiva. Resulta siempre sorprendente de qué modo tan claro y necesario pueden ser completamente fundamentadas a partir de esta base, tan próxima a la praxis, aquellas proposiciones, que de otro modo se suelen colocar al principio de una disciplina matemática como indemostradas y pretendidamente indemostrables. Y es asimismo sorprendente lo lejos que se puede llegar con este método: se logra sobre la base de la Matemática constructiva no sólo fundamentar la Lógica, sino también mostrar la consistencia de la Aritmética e incluso la consistencia de aquella parte del Análisis clásico, de la que de hecho se hace uso en todas las aplicaciones. Cierto que con ello no queda cumplido el programa de Hilbert, pero se alcanza la meta que había motivado propiamente la formulación de este programa.

La felizmente lograda realización de esta meta, hacia el año 1950, significa un progreso esencialísimo sobre la mera propagación de métodos constructivos, que el primer intuicionismo había conocido ya. Sin embargo, las objeciones, que los matemáticos oficiales opusieron entonces al intuicionismo, son presentadas también hoy a la propuesta de una fundamentación constructiva de la Matemática. Por ejemplo, un importante colaborador de Hilbert, Paul Bernays, escribió en 1930 contra el intuicionismo: "Es una exigencia injustificada por parte de la Filosofía a la Matemática, que ésta deba abandonar su método simple y fecundo por un método incómodo y de sistemática atrasada, sin que para ello le dé motivo ninguna necesidad interna. El punto de vista del intuicionismo se nos hace sospechoso por esta pretensión".[4] Quisiera dejar aquí bien sentado que la misma objeción dirigida hoy contra el constructivismo sería completamente anticuada. La fundamentación de la Lógica constructiva sobre reglas dialógicas intuitivas por Paul Lorenzen y Kuno Lorenz (desde 1960, aproximadamente) no sólo ha posibilitado por primera vez una construcción de los cálculos lógicos habituales, que realmente merece el nombre de fundamentación de aquéllos, sino que también ha posibilitado una fundamentación de la Aritmética y del Análisis, que no puede ser llamada *incómoda*. Por último, el constructivismo ha propuesto una teoría constructiva de conjuntos en la que la elección de los axiomas deja de estar abandonada a la intuición o a la orientación de las autoridades, tal como, por ejemplo, había conducido todavía a la formulación del sistema de Zermelo sobre la base de la teoría de conjuntos intuitiva de Georg Cantor.

Creo que debo pedir disculpas al lector por los excursos que le he ofrecido en este artículo. He hecho una disgresión por la historia de la Matemática moderna y por la investigación moderna de fundamentos, para hacer presente un desarrollo cuyos resultados, a mi parecer, no han sido todavía aceptados como la comprensión de la situación actual lo exige. He emprendido una segunda disgresión —sin haber podido entrar en detalles, como era de desear— para dar información sobre una propuesta de fundamentación a la que tengo por la mejor de las actuales. Solicito la benevolente tolerancia del lector si mis exposiciones han tenido que tomar, en contra de mi deseo, un poco el carácter de un discurso ilustrativo en este medio de información. Quisiera tras estos *ex*cursos llegar al final de mi exposición con un *re*curso a su meta sistemática.

¿Qué papel podemos atribuir, según lo dicho, a la Filosofía en el problema de la fundamentación de la Matemática? Si es correcta la apreciación de la situación que acabo de dar, tenemos hoy en la propuesta de fundamentación cons-

[4] Paul Bernays, Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie, *Blätter für Deutsche Philosophie* 4 (1930/31), 326-367.

tructiva de la Matemática un punto de vista sobre los fundamentos susceptible de resolver de hecho sus afirmaciones de fundamentación de un modo adecuado. "De un modo adecuado" significa aquí: no como una apelación arbitraria a la evidencia afirmada de los primeros principios matemáticos, sino en la forma de afirmaciones responsables sobre la derivabilidad e inderivabilidad de figuras en cálculos, sobre la posibilidad de eliminar pasos en las demostraciones, sobre la posibilidad de ganar diálogos sobre enunciados matemáticos, lógicamente conexos. Si bien el problema de la fundamentación de la Matemática no está en modo alguno resuelto todavía —sobre todo la Geometría contiene aún una serie de problemas muy difíciles— sí que este planteamiento se muestra, sin embargo, desde hace unos veinte años, como extraordinariamente fructífero. Muy recientemente, en este mismo año, la prueba de consistencia de la Aritmética ha sido puesta por Lorenzen en una forma que debería eliminar toda duda de los matemáticos contemporáneos sobre la *definitiva* seguridad de la Aritmética, y cuya sencillez, sin embargo, nunca se hubiera atrevido a soñar un Hilbert.

Si con esto el problema de la fundamentación ha sido llevado muy cerca de una solución o completamente resuelto desde un punto de vista técnico, por otra parte, además —en cuanto a mí se me alcanza, por primera vez en este siglo— se ha dado también satisfacción a las exigencias filosóficas de una fundamentación. Naturalmente, esto no se debe al azar. Es más bien la consecuencia del trabajo de un pequeño número de matemáticos, que en parte incluso han saltado a la Filosofía como especialidad para trabajar allí en una fundamentación de la Matemática, cuyo rigor supera incluso el rigor euclidiano, que antes evocaba. Han propuesto una fundamentación que, sin hacer ofensa a la cosa, resiste incluso la reflexión crítica que, bajo una perspectiva de crítica social, se exige últimamente a la Matemática, sea bajo el título *Argumentaciones morales en la Disputa de los Fundamentos,* sea bajo el título *Matemática y Ética.*

Como miembro de un Instituto Filosófico no quisiera concluir haciendo referencia a la imprescindibilidad de los filósofos para la Matemática. Me gustaría, más bien, concluir con una referencia a las ventajas inapreciables que la crisis de la Matemática y el problema de la fundamentación de esta ciencia han supuesto para la Filosofía. Hasta bien entrado el siglo XIX, importantes físicos y otros científicos de la naturaleza titularon *Filosofía* a sus obras sobre fundamentos. Esto no fue un capricho de su parte, sino que refleja la concepción de que la erección de un sistema de fundamentación para un nexo científico de proposiciones era hasta entonces, obviamente, una tarea de la *Filosofía.* Sólo por la crisis de la Matemática ha vuelto a hacerse consciente a la Filosofía esta tarea. Espero que la fructífera interacción de Investigación Matemática de Fundamentos y de Filosofía no sólo muestre a otras ciencias particulares las ventajas de la reflexión filosófica, sino que también haya vuelto a poner ante los ojos de los filósofos una meta para el filosofar práctico, que casi había desaparecido ya de su perspectiva.

Versión castellana de J. SANMARTÍN