NOTA DE LA REDACCIÓN

El presente número de TEOREMA incluye en el Consejo de Redacción a Miguel Sánchez-Mazas, español fuera de España, entrañablemente vinculado al desarrollo de la filosofía científica entre nosotros.

En el Madrid, ya lejano, de los primeros años cincuenta, Miguel Sánchez-Mazas fundó y dirigió la revista THEORIA, con la colaboración, entre otros, de Gustavo Bueno, Carlos París y José Luis Pinillos. Merced al esfuerzo de aquellos jóvenes españoles, la lógica matemática, las ideas de Russell y el Wittgenstein del "Tractatus" brillaron con súbito destello en el madrileño ambiente de oscuridad cultural que Luis Martín Santos inmortalizaría más tarde en "Tiempo de silencio".

Miguel Sánchez-Mazas, filósofo y lógico español de talla europea, residente hoy en Suiza, ofrece en versión castellana exclusiva para TEOREMA su contribución al IV Congreso Internacional de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia, *celebrado en Bucarest hace breves semanas.*

CÁLCULO ARITMÉTICO DE LAS PROPOSICIONES *

Miguel Sánchez-Mazas

1. *Introducción*

CON este trabajo pretendemos aportar una nueva contribución [1] a los esfuerzos por encontrar fórmulas sencillas de traducción en términos aritméticos de las teorías científicas y reglas para aritmetizar la deducción de sus consecuencias, con el fin de simplificar, en un lenguaje universal

(*) Ponencia presentada, en su versión original francesa, al IV Congreso Internacional de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia, celebrado en Bucarest (Rumania), del 28 de agosto al 4 de septiembre de 1971.

[1] Mi primera contribución a un programa de aritmetización como el aquí expuesto fue la ponencia *Preliminary ideas concerning an automatic computation of "qualities"*, que presenté el 8 de agosto de 1968 en el Congreso Internacional de Informática, organizado en Edimburgo por la I. F. I. P. (International Federation for Information Processing) y que se publicó el año siguiente en las Actas de dicho Congreso (*Proceedings of the IFIP Congress 68*, Editor A. J. H. Morrell, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1969, vol. I, Part I: Mathematics, pp. 224-230), así como, en versión española, en la *Revista de Automática* de Madrid ("Ideas preliminares para un cálculo automático de las 'cualidades' ", *Revista de Automática*, Año I, núm. 2, octubre-noviembre-diciembre 1968, pp. 19-25).

En ese trabajo ya anunciaba mi propósito de aplicar un método análogo de aritmetización a otros niveles lógicos. Decía así: "Es posible aplicar —como tenemos el propósito de demostrar en sucesivos trabajos— un método análogo de aritmetización, de parecida sencillez, al cálculo proposicional clásico, al cálculo de relaciones y a un cálculo aritmético de las clasificaciones, científicas y documentales, y, por consiguiente, a la documentación automática". Esta es, pues, la segunda fase del programa.

(aritmético), la memorización y el tratamiento automático de tales teorías.

Más precisamente, nuestro trabajo se sitúa en la perspectiva siguiente: Dado, en una teoría cualquiera, perteneciente a cualquier esfera del saber, [2] un sistema de propo-

[2] Pensamos, no sólo —ni principalmente— en la esfera de las ciencias matemáticas y físicas ni, en general, en los saberes que manejan una información total o parcialmente cuantificable (no en el sentido estricto del "*quantum*", sino en el más amplio de la "cantidad"), como la economía; pensamos, ante todo, en las ciencias que enuncian y relacionan, de modo casi exclusivo, proposiciones irreductiblemente "cualitativas", como las ciencias jurídicas —cuya aritmetización *adecuada* constituyó una permanente preocupación para Leibniz— y sociales, o distintas teorías biológicas.

No es preciso recordar, en este contexto, hasta qué punto se ha generalizado y agigantado en todo el mundo, en los ambientes más diversos, la preocupación por encontrar métodos nuevos, siempre más eficaces y universales, para lo que se ha llamado el *tratamiento automático de la información no numérica.* Ante el desbordamiento incesante de los torrentes de información científica, de cada día más difícil *memorización* (= almacenamiento, pero con posibilidad de recuperación automática), *canalización* hacia los sectores interesados en utilizarla y *trasvase* o traducción a otras lenguas, la búsqueda incesante de *descriptores* universalmente aceptables, de procedimientos de *indización* eficaces para universalizar también las relaciones lógicas o sintácticas entre dichos descriptores, etc., está alcanzando caracteres de verdadera angustia (Véanse, como muestras recientes de esa preocupación, en Francia, las obras siguientes: N. Bely et al., *Procédures d'analyse sémantique appliquées à la documentation scientifique,* París, Gauthier-Villars, 1970, y Natacha Gardin, Francis Levy, *Lexique documentaire pour l'information scientifique,* Marseille, Groupe d'Etude pour l'information scientifique, 1969).

Ahora bien, es evidente que, dentro de esa preocupación general, el reconocimiento de la necesidad —más que de la conveniencia— de utilizar, más allá de todas las lenguas naturales y de sus fusiones o compromisos en esperantos, interlinguas, etc., una lengua universal artificial adecuada para la memorización y el tratamiento de la información (sobre todo de la no numérica) se va abriendo camino sin cesar.

La propia UNESCO, en su reciente y famoso estudio "UNISIST", publicado en colaboración con el Consejo Internacional de Uniones Científicas, sobre la realización de un sistema mundial de información científica, se hace ampliamente eco de dicha preocupación, sobre todo en el apartado 5.2.1.: Barreras lingüísticas, donde, después de haber reconocido los fracasos de anteriores intentos, desde siciones inicialmente afirmadas en la misma —sistema que podemos concebir como un sistema de axiomas de la teoría, pero que podemos suponer también perpetuamente abierto, ampliable con nuevas proposiciones extraídas de la

la *characteristica universalis* de Leibniz hasta el implícito en el *fisicalismo* de Carnap y su proyecto de enciclopedia internacional de ciencia unificada sobre esa base, se orienta, una vez más, siguiendo informes recientes como el del profesor alemán Kaiser, hacia —cito textualmente— "des langages artificiels, ou codes... indépendants des langues naturelles n'utilisant que des *nombres*... pour symboliser les concepts, les faits et les relations... afin de préserver la compatibilité dans la perspective d'un système mondial", recogiendo la idea de que "certains produits documentaires devraient être rédigés non pas dans une langue naturelle, mais dans des termes metalinguistiques convertibles en principe vers n'importe laquelle de ces langues" (*UNISIST*: *Etude sur la réalisation d'un système mondial d'information scientifique,* effectuée par l'Organisation des Nations Unies pour l'éducation, la science et la culture et le Conseil international des unions scientifiques, París, UNESCO, 1971, pp. 84-86).

En lo que se refiere, concretamente, al serio problema del tratamiento automático de la información jurídica —un tratamiento automático que pretendiera llegar un día, más allá de la mera simplificación trivial de la recuperación automática de *títulos* o, a lo más, de resúmenes de obras, decretos y sentencias, a recuperar y manejar directamente todas y cada una de las normas y disposiciones jurídicas contenidas en dichos textos (o, si se quiere, las *proposiciones* jurídicas aisladas y sus *relaciones* recíprocas: consecuencias, incompatibilidades, opciones o alternativas)—, cabe extrañarse del optimismo exagerado, y a mi juicio poco responsable, de que se hace gala en ciertos medios jurídicos y oficiales españoles, e incluso cerca del Tribunal Supremo, donde debe conocerse bien la magnitud de la tarea; y que contrasta, como siempre, con la cautela y prudencia extremas con que se manifiestan los especialistas en la materia en países que llevan cerca de un decenio ocupándose del asunto, como Francia, donde el Centre de Recherches d'Information et de Documentation Notariales (CRIDON), de Lyon, lo viene abordando desde 1962 y donde el Institut de Recherches et d'Etudes pour le Traitement de l'Information Juridique, dirigido por el Profesor Pierre Catalá, cuenta con la colaboración del Ministerio de Justicia y de Facultades de Derecho y de Ciencias, o como en Bélgica, donde desde 1960 funciona el CREDOC, dirigido por el Dr. Houtard.

Así, a raíz del reciente Simposio sobre Informática y Jurisprudencia, celebrado en Madrid, el Secretario Técnico de la Presidencia del Tribunal Supremo, don Miguel López-Muñiz Goñi, ha experiencia o procedentes de otra teoría—, encontrar una expresión aritmética sencilla de dicho sistema, gracias a la cual el procedimiento para la deducción automática de todas las consecuencias lógicamente implícitas en el mismo pueda adoptar la forma de un par de reglas de cálculo aritmético. [3]

hablado con una facilidad pasmosa de "la aplicación de la Informática al Derecho y a su *inminente* aplicación aquí en España, explicando los distintos *sistemas posibles* y la enorme trascendencia, a escala nacional, que tendrá su uso en todas las esferas de la actividad jurídica", vislumbrando ya en nuestro país "una máquina ordenadora que atesore y facilite todo lo existente en Legislación, Jurisprudencia, Doctrina, Bibliografía, o sea, las disposiciones generales, las sentencias", dando "la resolución judicial o texto legal *íntegro* por medio de *claves*" y permitiendo "encontrar la sentencia, la legislación, la doctrina que ha de aplicarse y *resolver cada caso concreto* y de un modo rapidísimo y seguro", lo cual será "una verdadera revolución en el mundo del Derecho que repercutirá favorablemente en la vida toda del país". (Véase el diario "Madrid" del 3 de julio de 1971, bajo el título: *Electrónica con toga: El ordenador va a ser aplicado a toda la vida jurídica española.*)

Pero antes de eso, ¿no hará falta contar en España con bastantes equipos mixtos de investigadores —juristas, matemáticos, lógicos, lingüistas, informáticos —que estudien, en el contexto específico de nuestra Patria, todos esos *sistemas posibles* para el tratamiento de la información jurídica, el modo de codificar esos textos íntegros por medio de *claves,* el modo de operar con ellos para deducir consecuencias y *resolver cada caso concreto,* etc., etc.? ¿Está eso en marcha? Lo dudo.

Un ejemplo muy preciso: Cuando, al final de una disposición, se agrega una coletilla que viene a decir algo así como que "todas las disposiciones precedentes que se opongan a (o sean *incompatibles* con) la presente quedan *automáticamente* derogadas", ¿se cuenta con un *procedimiento de decisión automático* que permita conocer inmediatamente el alcance de aquélla en la legislación del país, o si se quiere, que suministre la lista exhaustiva de las disposiciones precedentes afectadas? O, al menos: ¿se ha estudiado cómo podría hacerse? ¿Sabemos ya cómo instruir al ordenador para que codifique, memorice, maneje y calcule incompatibilidades, consecuencias, alternativas, opciones jurídicas o, en general, de carácter irreductiblemente "cualitativo"? Porque, en caso contrario, lo que menos urge es la posesión material del ordenador.

[3] Como en el caso del cálculo aritmético de las "cualidades" o predicados monádicos, expuesto en el trabajo citado en la nota (1), esas reglas aritméticas se reducen esencialmente a dos: *la regla de la eliminación,* por multiplicación de los números característicos de las

Dentro de esta perspectiva, aún cabe situarse a distintos niveles lógicos —complementarios entre sí— para la expresión de los distintos planos o aspectos de la estructura de la teoría científica en cuestión: por ejemplo, nivel del cálculo proposicional, del cálculo de clases y predicados monádicos, del cálculo de relaciones, etc. Con ello, un programa de aritmetización integral de cualquier teoría científica, para su adecuado tratamiento automático, podría basarse en las dos tareas siguientes:

a) Primeramente, el hallazgo de métodos de expresión y deducción aritméticas (en lo posible, análogos) para cada uno de los niveles lógicos que pueda admitir o exigir una consideración suficiente o exhaustiva de la teoría de que se trate.

b) Por último, el hallazgo de un procedimiento de coordinación de los lenguajes aritméticos correspondientes a cada nivel que permita traducir al lenguaje de uno cualquiera de esos niveles, por vía de cálculo aritmético, las consecuencias que se deriven para dicho nivel de las proposiciones (iniciales o deducidas) afirmadas en un nivel distinto.

Con arreglo a un programa semejante, hemos desarrollado en un trabajo anterior, publicado hace tres años,[4] un método de cálculo aritmético sumamente sencillo de las consecuencias lógicas de un sistema de proposiciones iniciales afirmadas en una teoría cualquiera, al nivel de los predicados monádicos,[5] incluyendo el cálculo aritmético de todas las

premisas —que permite afirmar como consecuencias válidas de aquéllas todas las proposiciones que tengan al producto como número característico, siempre que se haya producido la eliminación de un factor primo común a aquéllos— y la *regla de la equivalencia* —que permite afirmar como consecuencias válidas de una proposición todas aquéllas que tengan el mismo número característico, invariante común a toda la clase de proposicones equivalentes a la primera.

[4] Se trata del trabajo ya citado en la nota (1).

[5] Yo prefiero hablar de "cualidades", al referirme a esos predicados monádicos, para que se tengan siempre presentes los aspectos específicamente "cualitativos", es decir, irreductibles a la extensión o cantidad, de la perspectiva intensional característica de los predicados, en oposición a la extensional, que es la propia del cálculo de clases. Esos aspectos "cualitativos" están presentes,

consecuencias silogísticas de un sistema semejante mediante la simple multiplicación de las expresiones aritméticas de las premisas.

El presente trabajo, que representa un jalón más en el programa de aritmetización mencionado, se sitúa al nivel lógico de las proposiciones inanalizadas, que es el nivel propio del cálculo proposicional clásico. Dicho lo cual, ha de quedar bien claro —y queremos puntualizarlo aquí para evitar todo equívoco, aunque, después de lo que precede, pudiera parecer inútil o superfluo— que la finalidad principal que nos proponemos con nuestro cálculo aritmético de las proposiciones —y que esencialmente creemos haber logrado— no es en modo alguno proponer un nuevo tipo de aritmetización de la lógica proposicional misma, es decir, un nuevo método para demostrar aritméticamente la validez de las leyes lógicas aplicables al nivel de las proposiciones inanalizadas o, si se quiere, un procedimiento aritmético de decisión para el propio cálculo proposicional. Tal objetivo sería, a nuestro juicio, perfectamente inútil en sí mismo, ya que es evidente que la aritmetización booleana, que sólo utiliza los valores 0 y 1, es perfectamente adecuada para el cálculo proposicional clásico[6] y,

como observó muy bien Leibniz, ante todo en la relación de "incompatibilidad" (suerte de "repulsión moral", para emplear sus palabras) y a ellos se deben las repetidas dificultades que aquél encontró en sus intentos de expresión matemática de tal relación, que no puede concebirse como una mera "exterioridad recíproca" de carácter estático, como la de dos clases disjuntas, en la perspectiva extensional. Yo he logrado superar esas dificultades, tanto al nivel de los predicados monádicos como al nivel de las proposiciones inanalizadas, al encontrar una expresión aritmética de la negación que hace imposible la conjunción o producto lógico de dos proposiciones o de dos predicados cuando entre los componentes elementales de una de ellas (o de uno de ellos) figura la negación de uno de los componentes elementales de la otra (o del otro), traduciendo así, aritméticamente, esa "suerte de repulsión moral" que tanto impresionaba al filósofo de Leipzig. Para un estudio histórico y crítico de este problema en la lógica de Leibniz, véase mi obra *Fundamentos matemáticos de la Lógica Formal*, Caracas, Universidad Central de Venezuela, 1963.

[6] Esto ocurre porque en el cálculo proposicional clásico el único contenido de las proposiciones al que se presta atención y que

sin duda, la más sencilla posible y que el procedimiento de decisión basado en la técnica de la evaluación ordinaria es más que suficiente para la lógica proposicional misma.

Pero la finalidad principal de nuestro cálculo aritmético de las proposiciones es, como hemos dicho, esencialmente diferente: consiste en demostrar aritméticamente no ya leyes lógicas, que serían universalmente válidas (o cuya validez trascendería, en todo caso, la esfera peculiar de cada teoría científica), sino leyes específicas de una teoría determinada, deduciéndolas mediante reglas aritméticas de un sistema inicial de proposiciones afirmadas en tal teoría, siempre que todas las proposiciones de ese sistema pertenezcan a uno de los dos tipos siguientes:

a) Proposiciones específicas de la teoría considerada cuyo análisis no se realiza al nivel de este cálculo aritmético (pudiendo realizarse, dentro del programa general, al nivel de otros cálculos: clases, predicados de distintos órdenes, etcétera); teniendo, a todos los efectos del mismo, el papel de proposiciones atómicas o inanalizadas.

b) Proposiciones —específicas igualmente de la teoría considerada— pero consideradas como moleculares o analizables al nivel de este cálculo aritmético, a la vez que expresiones bien formadas con arreglo a las leyes de formación de dicho cálculo: las proposiciones de este segundo tipo expresan todas ellas relaciones lógicas de cierta forma, [7] válidas o afirmadas inicialmente en la teoría en cuestión,

interesa a los efectos de dicho cálculo es su valor veritativo (verdad o falsedad) y para el mero cálculo de valores veritativos es perfectamente suficiente la aritmética basada en los valores 0 y 1. Pero si hemos de tener en cuenta y distinguir ulteriores contenidos cualitativos de proposiciones científicas concretas —no reducidas a meros soportes de verdad o falsedad—, entonces necesitamos una aritmética basada en los números primos y traducir aritméticamente la negación, la implicación y los otros operadores lógicos en ese contexto, como hemos hecho.

[7] Esas relaciones se reducen esencialmente, como luego veremos, a los siguientes tipos generales: *derivabilidad* de una proposición de otra proposición o de la conjunción de 2, 3, ..., n otras proposiciones; *alternabilidad* de 2 (dilema), 3 (trilema), ..., n proposiciones; e *incompatibilidad* de 2 (disyunción exclusiva clásica), 3, ..., n proposiciones.

entre dos o más proposiciones atómicas del primer grupo y resultarán en todo caso de substituir (en la forma prescrita por la regla de substitución del cálculo), en expresiones bien formadas de este cálculo, cada variable proposicional por una proposición del primer tipo.

Las consecuencias lógicas del sistema inicial de proposiciones de una teoría determinada, deducidas aritméticamente de dicho sistema, pertenecerán todas también a uno de los dos tipos indicados, *a)* o *b).*

Agreguemos, por último, que el conjunto de expresiones bien formadas del cálculo aritmético de proposiciones es un subconjunto propio no finito del conjunto de expresiones bien formadas del cálculo proposicional clásico. [8]

En lo que sigue, emplearemos las iniciales CAP para designar abreviadamente nuestro cálculo aritmético de las proposiciones.

2. *Expresión aritmética de las proposiciones elementales de una teoría*

Sea s una sucesión cualquiera —finita o no— de proposiciones elementales relativas a una esfera científica cualquiera:

$$s: \qquad p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, p_i, \ldots$$

Al nivel del cálculo aritmético de las proposiciones, cada una de las proposiciones de la sucesión s será consi-

[8] Para la finalidad para la que hemos creado nuestro cálculo aritmético de las proposiciones, que no es —lo repetimos— la de deducir o establecer leyes lógicas, universalmente válidas o comunes, al menos, a distintas ciencias o teorías a la vez, sino la de deducir consecuencias lógicas de proposiciones con un contenido específico de una teoría no meramente formal o analítica, sino sintética, esta restricción no es esencial: en las ciencias sintéticas raramente interesa enunciar relaciones de una proposición consigo misma o con su negación del tipo CpNNp, ApNp, CCNppp, etc. Para nuestro propósito, pues, consideramos que el repertorio de expresiones bien formadas o fórmulas que pueden construirse utilizando las reglas de formación del cálculo es suficiente. Pero, como observamos al final de este trabajo, para otros propósitos podría considerarse un

derada como una proposición atómica o inanalizada, aunque su análisis pueda ser efectuado en otro cálculo aritmético, que podría quedar relacionado, de un modo o de otro, con el primero.

Sea ahora S una sucesión de números primos,[9] en orden creciente:

$$S: \qquad P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots$$

A cada una de las proposiciones elementales de la sucetión s se le coordina (es decir, se le hace corresponder) un número primo de la sucesión S, de tal manera que el número primo P_k, que ocupa el lugar k en S, se coordina a la proposición elemental p_k, que ocupa el lugar homólogo en s. Se enunciará este hecho diciendo que el número primo P_k es el número característico o la expresión aritmética de la proposición elemental p_k.

La correspondencia establecida entre las sucesiones s y S es biunívoca.

Traduciremos luego los operadores lógicos aplicables a las proposiciones elementales por operadores aritméticos,

desarrollo ulterior del cálculo mediante la ampliación de sus reglas de formación.

[9] En algunas aplicaciones —por ejemplo, cuando interese considerar y tratar simultáneamente varias teorías, pero manteniendo siempre una separación entre las expresiones matemáticas de las mismas—, puede convenir disponer simultáneamente de varias sucesiones distintas —todas ellas infinitas— de números primos, de tal forma que inmediatamente —a simple vista o por el ordenador— pueda saberse a cuál de las teorías consideradas pertenece una proposición (atómica o molecular), cuyo número característico se conoce. En tales casos, sugerimos que tal vez el modo más sencillo de formar esas sucesiones parciales de números primos sea "cortar longitudinalmente" la sucesión general de los primos con arreglo a la cifra de terminación de éstos, en el sistema decimal. Por ejemplo:

Primera sucesión:	11, 31, 41, 61, 71, ...	(terminación en 1).
Segunda sucesión:	3, 13, 23, 43, 53, ...	(terminación en 3).
Tercera sucesión:	7, 17, 37, 47, 67, ...	(terminación en 7).
Cuarta sucesión:	19, 29, 59, 79, 89, ...	(terminación en 9).

Si fuera necesario, se recurriría a nuevas subdivisiones: terminaciones en 11, 21, 31, etc.

de modo que toda fórmula lógica o expresión bien formada del CAP que exprese una determinada relación lógica entre proposiciones elementales de una teoría tenga también asociado un número característico, que, como veremos, ya no será, en general, primo y ni siquiera entero, pero sí racional.

3. *Reglas de formación de las fórmulas lógicas del CAP*

Alfabeto A_L de los signos lógicos: [10]

$A_L = \{N, C; p_1, p_2, \ldots; p, q, r, s, t, \ldots; p_h, p_i, p_j, p_k, \ldots; p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots\}$

N es el nombre del operador lógico de negación;

C es el nombre del operador lógico de implicación (o, si se quiere, del condicional); [11]

$p_1, p_2, \ldots$ (subíndices numéricos) son los nombres de proposiciones elementales (constantes, determinadas) pertenecientes a una sucesión s de proposiciones de una teoría científica cualquiera, como la considerada en el § 2.;

$p, q, r, s, t, \ldots; p_h, p_i, p_j, p_k, \ldots; p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots$ (subíndices literales, sin o con ulteriores subíndices, literales o numéricos) son variables proposicionales.

Reglas de formación

rf-1. Una variable proposicional es una expresión lógica elemental del CAP;

[10] Este es el alfabeto de los signos lógicos que podemos llamar primitivos, pero que admite ampliación, como veremos en el capítulo 4.

[11] El condicional no ha de tener en nuestro cálculo forzosamente el sentido de la implicación material del cálculo proposicional clásico. Por el contrario, puede estar coloreado con el matiz específico (o, si se quiere, por la modalidad) que tiene el condicional en la teoría o ciencia de que se trate, un matiz de necesidad física o biológica en las respectivas ciencias, de obligatoriedad (ética o jurídica), etc. La implicación material representa el valor mínimo, común a todos los tipos de implicación, el umbral, podríamos decir.

rf-2. Si e es una expresión lógica elemental del CAP, entonces también Ne es una expresión lógica elemental del CAP;

rf-3. Una expresión lógica elemental del CAP es una forma proposicional del CAP;

rf-4. Si e es una expresión lógica elemental del CAP y f es una forma proposicional del CAP, tal que ninguna parte de f es una variable proposicional isomorfa con una parte de e, entonces Cef es también una forma proposicional del CAP;

rf-5. Si f_1 es una forma proposicional del CAP y f_2 es el resultado de sustituir en f_1 cada una de las variables proposicionales que figuran en la misma por una proposición elemental (constante) de una teoría, perteneciente a una sucesión del tipo de la sucesión s considerada en 2., entonces f_2 es una proposición del CAP;

rf-6. Las formas proposicionales del CAP y las proposiciones del CAP formadas con arreglo a las reglas de formación precedentes son las únicas fórmulas lógicas (o expresiones lógicas bien formadas) del CAP. [12]

4. *Tipos generales de relaciones lógicas n-ádicas (entre las proposiciones elementales de una teoría) expresables en el CAP*

Todas las fórmulas lógicas del CAP pueden escribirse utilizando como únicos operadores lógicos el operador monádico N (negación) y el operador diádico C (condicional), los mismos que Lukasiewicz toma como primitivos para construir axiomáticamente el cálculo proposicional clásico en sus *Elements of Mathematical Logic.* [13]

[12] Como decimos al final de este trabajo, para otras finalidades puede concebirse, sin embargo, una ampliación de estas reglas de formación, para dar cabida en el cálculo a otras fórmulas.

[13] Jan Lukasiewicz, *Elements of Mathematical Logic,* Pergamon Press, PWN, Polish Scientific Publishers, Varsovia 1963,

Sin embargo, puede resultar conveniente utilizar también otros operadores lógicos, en general n-ádicos, definidos en función de aquéllos dos (N y C), tanto para abreviar y simplificar la escritura de las fórmulas lógicas como para poner mejor en evidencia los tipos generales de relaciones lógicas existentes entre las proposiciones elementales de las teorías científicas consideradas.

Para ello, generalizaremos el empleo de los operadores diádicos K (conjunción), A (alternativa) y D (disyunción exclusiva)[14] del cálculo proposicional clásico al caso de n argumentos, utilizando, para evitar confusiones, cuando se apliquen a más de dos argumentos, paréntesis que encierren los argumentos a que se apliquen.

Consideremos, primero, las definiciones de tales operadores para el caso más simple de dos argumentos:

$$\mathrm{CKpqr} =_{\mathrm{def}} \mathrm{CpCqr} \qquad \mathrm{Apq} =_{\mathrm{def}} \mathrm{CNpq} \qquad \mathrm{Dpq} =_{\mathrm{def}} \mathrm{CpNq}$$

y generalicemos, ahora, esas definiciones para el caso de n expresiones lógicas elementales $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n$ (cada una de las cuales puede ser, con arreglo a las reglas de formación

reimpreso en 1966. Véase el capítulo II: The Sentential Calculus: "The system of the sentential calculus which is to be expounded below contains two kinds of primitive terms: symbols of negation N and symbols of the conditional sentence C" (p. 23).

[14] Tanto en español como en francés he optado, siguiendo a mi maestro I. M. Bochenski, por elegir, entre los distintos términos posibles, el de *alternativa* para designar al operador que otros llaman *suma lógica* o *disyunción* (*no exclusiva*), equivalente al *vel* latino: {1, 1, 1, 0} pq; y el de *disyunción exclusiva* para designar al operador, que también se designa mediante la "barra de Sheffer", equivalente al *aut* latino: {0, 1, 1, 1} pq. Pero también diremos que tanto en el caso de dos argumentos como en el caso general de n argumentos, ese operador traduce la relación de *incompatibilidad*. Véanse I. M. Bochenski, *Précis de Logique Mathématique*, Bussum (Holanda), F. G. Kroonder, 1949, así como R. Blanché, *Introduction à la Logique Mathématique*, París, Armand Colin, 1968, pp. 48-49, donde se discuten las variantes y ambigüedades de los términos utilizados en francés para designar a los operadores del cálculo proposicional.

enunciadas, una variable proposicional o también una variable proposicional precedida de una o más negaciones):

$$CK(e_1e_2 \ldots e_{n-1})e_n =_{def} Ce_1Ce_2 \ldots Ce_{n-1}e_n$$
$$A(e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_n) =_{def} CNe_1CNe_2 \ldots CNe_{n-1}e_n$$
$$D(e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_n) =_{def} Ce_1Ce_2 \ldots Ce_{n-1}Ne_n$$

Con ello, las distintas relaciones lógicas entre n proposiciones elementales de una teoría que pueden expresarse mediante fórmulas lógicas del CAP quedarán clasificadas en los tipos generales siguientes:

Derivabilidad de una proposición e_n (que puede ser una proposición elemental p_n o una proposición elemental precedida de negaciones) de un conjunto de n—1 proposiciones e_1, e_2, ..., e_{n-1}:

$CK(e_1e_2 \ldots e_{n-1})e_n$	"la proposición e_n es *derivable* de las proposiciones e_1, e_2, ..., e_{n-1}".

Alternabilidad de un conjunto de n proposiciones e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n:

$A(e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_n)$	"hay *alternativa* entre las proposiciones e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n" o también "son proposiciones *alternables*" (al menos una de ellas es verdadera, o válida, o afirmada en la teoría).

Incompatibilidad de un conjunto de n proposiciones e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n:

$D(e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_n)$	"hay *incompatibilidad* entre las proposiciones e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n" o también "son proposiciones *incompatibles*" (al menos una de ellas es falsa, o inválida, o negada en la teoría).

El principio de equivalencia, que luego enunciaremos, permitirá establecer ulteriores relaciones lógicas entre los operadores lógicos primitivos N (monádico) y C (diádico) y los nuevos operadores n-ádicos K(...), A(...) y D(...) que acabamos de definir.

Siempre que para facilitar la expresión aritmética y la memorización y tratamiento automáticos de una teoría se considere conveniente utilizar los operadores lógicos n-ádicos K(...), A(...) y D(...), deberá reconocerse explícitamente la ampliación del lenguaje lógico que ello supone ampliando en consecuencia el alfabeto de los signos lógicos y las reglas de formación de las fórmulas lógicas del cálculo, del modo siguiente:

Alfabeto ampliado de los signos lógicos A_{LA}:

$$A_{LA} = \{N, C, K, A, D; (,); p_1, p_2, \ldots; p, q, r, s, t, \ldots; p_h, p_i, p_j, p_k, \ldots; p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots\}$$

Reglas de formación de las fórmulas lógicas del CAP, ampliadas mediante la inserción, entre la rf-4 y la rf-5, de la regla siguiente:

rf-4bis. Si f_1 es una forma proposicional del CAP y f_2 es una traducción o abreviatura admitida de f_1, en virtud de las precedentes definiciones de los operadores n-ádicos K(...), A(...) y D(...), entonces f_2 es también una forma proposicional del CAP.

5. *Expresión aritmética de las fórmulas lógicas del CAP*

Para la expresión aritmética de las fórmulas lógicas del CAP, utilizaremos los signos incluidos en el *alfabeto aritmético* A_A siguiente:

$$A_A = \{-, ^{-1}, *, (,); P_1, P_2, \ldots; P, Q, R, S, T, \ldots; P_h, P_i, P_j, P_k, \ldots; P_{h_1}, P_{h_2}, \ldots\}$$

— es el signo de sustracción de la artmética ordinaria;

$^{-1}$ es el signo de la unidad negativa como exponente;

$\ast$ es el signo de multiplicación de la aritmética ordinaria;

(,) son los paréntesis;

P_1, P_2, ... designan los números primos de una sucesión como la S considerada en 2. que corresponden a las proposiciones elementales p_1, p_2, ..., que ocupan lugares homólogos en una sucesión como la s, con arreglo al tipo de correspondencia biunívoca considerado en 2.;

P, Q, R, S, T, ...; P_h, P_i, P_j, P_k, ...; P_{h_1}, P_{h_2}, ... son variables numéricas que designan las expresiones aritméticas de las variables proposicionales respectivas.

En general, convendremos en designar la expresión aritmética de cualquier proposición o forma proposicional del CAP —es decir, de cualquier fórmula lógica del CAP— utilizando para ello la letra mayúscula correspondiente a la letra minúscula con que designamos aquélla, con los mismos subíndices, si los hubiere.

La expresión aritmética de los operadores lógicos primitivos será la siguiente:

Operadores lógicos	*Operadores aritméticos*
Ne	$—E^{-1}$
Cef	$E^{-1} \ast F$

De esta correspondencia básica se deducen las siguientes:

$CKe_1e_2e_3 = Ce_1Ce_2e_3$	$E_1^{-1} \ast E_2^{-1} \ast E_3$
$Ae_1e_2 = CNe_1e_2$	$(—E_1^{-1})^{-1} \ast E_2 = —E_1 \ast E_2$
$De_1e_2 = Ce_1Ne_2$	$E_1^{-1} \ast (—E_2^{-1}) = —E_1^{-1} \ast E_2^{-1}$

y, para el caso general de n argumentos:

$CK(e_1 \ldots e_{n-1})e_n = Ce_1 \ldots Ce_{n-1}e_n$ $\quad E_1^{-1} \ast \ldots \ast E_{n-1}^{-1} \ast E_n$

$A(e_1 \ldots e_{n-1}e_n) = CNe_1 \ldots CNe_{n-1}e_n$ $\quad (-E_1^{-1})^{-1} \ast \ldots \ast (-E_{n-1}^{-1})^{-1} \ast E_n = = (-1)^{n-1} \ast E_1 \ast \ldots \ast E_{n-1} \ast E_n$

$D(e_1 \ldots e_{n-1}e_n) = Ce_1 \ldots Ce_{n-1}Ne_n$ $\quad E_1^{-1} \ast \ldots \ast E_{n-1}^{-1} \ast (-E_n^{-1}) = -(E_1 \ast \ldots \ast E_{n-1} \ast E_n)^{-1}$

6. *El principio de equivalencia del CAP y las clases de equivalencia lógica*

El sentido y alcance precisos de la equivalencia lógica en nuestro cálculo aritmético de las proposiciones queda definido por el *principio de equivalencia*, que enunciaremos así:

La condición necesaria y suficiente para que dos fórmulas lógicas f_1 y f_2 del CAP sean lógicamente equivalentes es que sus respectivas expresiones aritméticas (o números característicos) F_1 y F_2 sean iguales.

Escribiremos, por consiguiente:

$$f_1 \approx f_2 \quad \text{si y sólo si} \quad F_1 = F_2$$

(siendo $\approx$ el signo de equivalencia lógica, que introducimos aquí no como signo del CAP, sino como signo del metalenguaje que utilizamos para hablar de las fórmulas del CAP. [15]

Del principio de equivalencia se deducen inmediatamente las siguientes equivalencias clásicas del cálculo proposicional:

1. $NNp \approx p$ (principio de la doble negación), ya que $-(-P^{-1})^{-1} = P$.
2. $NNNp \approx Np$ (principio de la triple negación), ya que $-(-(-P^{-1})^{-1})^{-1} = -P^{-1}$.

[15] También los signos e, e_1, e_2, ... e_n (expresiones lógicas elementales) y f, f_1, f_2 (formas proposicionales o fórmulas) que venimos utilizando para hablar de las fórmulas del CAP desde que hemos establecido las reglas de formación de dichas fórmulas son signos del metalenguaje del CAP.

3. Cpq $\approx$ CNqNp (1.ª ley de la contraposición simple), ya que $P^{-1} * Q = (-Q^{-1})^{-1} * (-P^{-1})$.

4. CpNq $\approx$ CqNp (2.ª ley de la contraposición simple), ya que $P^{-1} * (-Q^{-1}) = Q^{-1} * (-P^{-1})$.

5. CNpq $\approx$ CNqp (3.ª ley de la contraposición simple), ya que $(-P^{-1})^{-1} * Q = (-Q^{-1})^{-1} * P$.

6. CpCqr $\approx$ CqCpr (ley de la conmutación simple o permutación de los antecedentes), ya que $P^{-1} * Q^{-1} * R = Q^{-1} * P^{-1} * R$.

7. CKpqr $\approx$ CKNrqNp (1.ª ley de la contraposición silogística), ya que $P^{-1} * Q^{-1} * R = (-R^{-1})^{-1} * Q^{-1} * (-P^{-1})$.

8. CKpqr $\approx$ CKpNrNq (2.ª ley de la contraposición silogística), ya que $P^{-1} * Q^{-1} * R = P^{-1} * (-R^{-1})^{-1} * (-Q^{-1})$.

9. Dpq $\approx$ ANpNq (ley de la disyunción), ya que $-P^{-1} * Q^{-1} = (-1) * (-P^{-1}) * (-Q^{-1})$.

10. Apq $\approx$ Aqp (ley de la permutación de la alternativa), ya que $(-1) * P * Q = (-1) * Q * P$.

11. Dqp $\approx$ Dqp (ley de la permutación de la disyunción), ya que $-P^{-1} * Q^{-1} = -Q^{-1} * P^{-1}$.

El principio de equivalencia permite clasificar todas las fórmulas del cálculo aritmético de las proposiciones en clases de equivalencia lógica. Cada clase de equivalencia lógica del cálculo aritmético de las proposiciones está caracterizada por un invariante aritmético que permite identificar la clase a que pertenece una fórmula lógica arbitrariamente dada. Este invariante aritmético es la expresión aritmética (o número característico) común a todas las fórmulas lógicas de una misma clase.[16]

[16] Como se sabe, el problema llamado "problema de las palabras" (o secuencias de signos), planteado con toda generalidad por Thue para los cálculos asociativos, es el siguiente:

Dado un par de palabras (secuencias) cualesquiera, determinar si son equivalentes o no.

Si tenemos en cuenta, especialmente, el carácter recursivo de la regla de formación rf-2 del CAP, cuya consecuencia es que cualquier fórmula puede incluir una sucesión indefinida de signos de negación N contiguos, así como los principios de la doble y triple negación, etc., constataremos que cualquier fórmula del CAP admite un número infinito de fórmulas lógicamente equivalentes, es decir, que cada clase de equivalencia lógica del CAP es infinita. Sin embargo, podemos considerar lo que llamaremos *clases reducidas de equivalencia lógica,* resultantes de las dos restricciones siguientes:

a) Una clase reducida de equivalencia lógica no contendrá fórmulas en que figuren dos o más signos N contiguos.

b) Una clase reducida de equivalencia lógica no contendrá fórmulas en que figuren los operadores n-ádicos K, A y D utilizados para abreviar o simplificar las fórmulas del CAP, sino sólo fórmulas construidas mediante los dos operadores lógicos primitivos N y C.

Este problema puede resolverse cuando existen invariantes característicos de cada clase de equivalencia. (Véase, por ejemplo, Maurice Gross, André Lentin, *Notions sur les Grammaires Formelles,* París, Gauthier-Villars, 1967, especialmente el capítulo "Mots-Monoïdes-Langages", pp. 13-16.)

Refiriéndonos a esa perspectiva, podemos decir aquí que el problema de las palabras (secuencias) está resuelto para nuestras fórmulas lógicas, porque existe siempre un invariante característico de cada clase de equivalencia lógica que es su número característico. También sería posible comprobar que el sistema de relaciones de Thue en que se basan las equivalencias de nuestro cálculo está compuesto por las relaciones siguientes:

NNe	$\sim$	e	(doble negación)
Ce_1Ce_2	$\sim$	Ce_2Ce_1	(permutación de los antecedentes)
Ce_1e_2	$\sim$	CNe_2Ne_1	(contraposición)

tales que si en una fórmula f_1 de nuestro cálculo se sustituye una secuencia por la secuencia intercambiable con ella, de acuerdo con las relaciones precedentes, la fórmula resultante f_2 tiene el mismo número característico que f_1, es decir: $F_2 = F_1$.

En efecto, toda fórmula puede transformarse en otra equivalente a ella, arbitrariamente elegida, mediante sucesivas sustituciones del tipo indicado.

De este modo resultarán clases reducidas de equivalencia lógica con un número finito de fórmulas. Más exactamente, el número de fórmulas de cada clase reducida de equivalencia lógica será n! (factorial de n), donde n expresa el número de variables proposicionales o de proposiciones elementales que figuran en las fórmulas de que se trate.

Así, por ejemplo, para el caso de fórmulas del tipo Cpq (con dos variables proposicionales o proposiciones elementales), cada clase reducida de equivalencia lógica estará compuesta por dos fórmulas equivalentes:

$Cpq \approx CNqNp$	de expresión aritmética $P^{-1} \ast Q$
$CpNq \approx CqNp$	de expresión aritmética $—P^{-1} \ast Q^{-1}$
$CNpq \approx CNqp$	de expresión aritmética $—P \ast Q$
$CNpNq \approx Cqp$	de expresión aritmética $P \ast Q^{-1}$

En el caso de fórmulas con tres variables proposicionales o proposiciones elementales, una clase reducida cualquiera de equivalencia lógica se compone de 3! = 6 fórmulas equivalentes, por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{l} CpCqr \approx CpCNrNq \approx CqCpr \approx \\ \approx CqCNrNp \approx CNrCpNq \approx CNrCqNp \end{array}\right\} \text{todas ellas con la misma expresión aritmética } P^{-1} \ast Q^{-1} \ast R.$$

En el caso de fórmulas con cuatro variables proposicionales o proposiciones elementales, una clase reducida cualquiera de equivalencia lógica se compone de 4! = 24 fórmulas equivalentes, por ejemplo:

$$\underbrace{\begin{array}{l} CpCqCrs \approx CpCqCNsNr \approx CpCrCqs \approx \\ \approx CpCrNsNq \approx CpCNsCqNr \approx CpCNsCrNq \approx \\ \approx CqCpCrs \approx CqCpCNsNr \approx CqCrCps \approx \\ \approx CqCrCNsNp \approx CqCNsCpNr \approx CqCNsCrNp \approx \\ \approx CrCpCqs \approx CrCpCNsNq \approx CrCqCps \approx \\ \approx CrCqCNsNp \approx CrCNsCpNq \approx CrCNsCqNp \approx \\ \approx CNsCpCqNr \approx CNsCpCrNq \approx CNsCqCpNr \approx \\ \approx CNsCqCrNp \approx CNsCrCpNq \approx CNsCrCqNp \end{array}}_{\text{todas ellas con la misma expresión aritmética } P^{-1} \ast Q^{-1} \ast R^{-1} \ast S}$$

7. *Afirmación de una proposición en un teoría*

De acuerdo con las reglas de formación de nuestro cálculo aritmético de las proposiciones, las fórmulas lógicas del CAP pueden ser de dos clases: las *formas proposicionales,* cuyos argumentos son variables proposicionales, y las *proposiciones,* cuyos argumentos son proposiciones elementales (constantes) de una teoría científica determinada. Las proposiciones de dicha teoría científica que podemos memorizar en forma aritmética y tratar mediante nuestro cálculo aritmético han de resultar precisamente de sustituir las variables proposicionales de las formas proposicionales bien formadas del CAP por proposiciones elementales (constantes) de la repetida teoría.

Ahora bien, cierto número de proposiciones —ya sean *elementales* (consideradas como *atómicas* o inanalizadas al nivel del CAP), ya sean *moleculares* y expresen determinadas *relaciones lógicas* entre las elementales— son susceptibles de ser afirmadas inicialmente como válidas en la teoría considerada *(axiomas)* y los *números característicos* correspondientes *(primos,* en el caso de las proposiciones *elementales,* y *racionales,* de todos modos, en el caso de las proposiciones *moleculares)* pueden ser admitidos en la memoria de las proposiciones afirmadas en la teoría, [17] para deducir de ellos sistemáticamente, mediante el cálculo aritmético, los números característicos que han de ser traducidos o interpretados lógicamente como las consecuencias lógicas legítimas de aquellas proposiciones iniciales —es decir, como los *teoremas* demostrables en la teoría al nivel del cálculo proposicional—. Con estos teoremas (y eventualmente con nuevos axiomas) se ampliará la memoria de las proposiciones afirmadas en la teoría para seguir indefinidamente el proceso.

Si designamos por la letra t la teoría en cuestión, y por f una fórmula cualquiera (de argumentos constantes, es

[17] Como en el caso del "cálculo aritmético de las cualidades" expuesto en el trabajo citado en la nota (1), esta *memoria* puede ser concebida abstractamente o efectivamente realizada en el ordenador.

decir, una proposición) bien formada con arreglo a las reglas de formación del cálculo, utilizaremos el signo de aserción $\vdash$ para formar expresiones del tipo siguiente:

$$\vdash_t f$$

que leeremos: "la fórmula f del cálculo CAP es afirmada como válida en la teoría t". Entonces el número F, expresión aritmética o número característico de la fórmula f, puede ser admitido en la memoria de las proposiciones afirmadas y sometido al proceso de cálculo que traduce aritméticamente las reglas de deducción de las consecuencias lógicas de los axiomas.

Designaremos con la expresión si(t) el sistema de proposiciones inicialmente afirmadas en una teoría t (sistema de axiomas de la teoría t) y con la expresión SI(t) al conjunto de números característicos de las proposiciones de si(t).

8. *Reglas de deducción del CAP*

rd-1. *Regla de la eliminación*

Si f_1 y f_2 son dos fórmulas (constantes, o sea, proposiciones) afirmadas en una teoría t; si los respectivos números característicos F_1 y F_2 son dos fracciones $F_1 = N_1/D_1$, $F_2 = N_2/D_2$ tales que el numerador de una de ellas tiene con el denominador de la otra un factor primo P_i común —y uno sólo— de tal modo que al efectuar el producto aritmético $F_3 = F_1 \ast F_2$, dicho factor P_i —y sólo él— queda eliminado; entonces todas las proposiciones que tengan F_3 como número característico (todas ellas, por lo tanto, lógicamente equivalentes entre sí) quedarán afirmadas como teoremas en la teoría t.

rd-2. *Regla de la equivalencia*

Si f_1 es una fórmula (constante, o sea, una proposición) afirmada en una teoría t y F_1 es su número característico; entonces todas las fórmulas f_i, f_j, ... cuyo número característico sea igual a F_1 quedarán afirmadas como teoremas en la teoría t.[18]

9. *El proceso de deducción automática de los teoremas de una teoría t utilizando el cálculo aritmético de las proposiciones*

De acuerdo con lo anteriormente expuesto y suponiendo que han quedado registrados en una memoria los números característicos de todas las proposiciones inicialmente afirmadas en una teoría t, se procederá como sigue para deducir automáticamente los teoremas de la teoría t (o más exacta-

[18] *Representación esquemática de las reglas de deducción*

Si empleamos expresiones de la forma n (f) = F (metalógicas) para indicar que cierta fórmula lógica f tiene como número característico el número F, podremos representar las reglas de deducción rd-1 y rd-2 que acabamos de enunciar mediante los esquemas siguientes:

ed-1. *Esquema de la eliminación*

$$\left\{\begin{array}{l} \vdash_t f_1 \qquad n(f_1) = F_1 \quad F_1 = N_1/D_1 = \dfrac{N'_1 * P_i}{D_1} \\[2ex] \vdash_t f_2 \qquad n(f_2) = F_2 \quad F_2 = N_2/D_2 = \dfrac{N_2}{D'_2 * P_i} \\[2ex] F_3 = F_1 * F_2 = N_1/D_1 * N_2/D_2 = \dfrac{N'_1 * P_i * N_2}{D_1 * D'_2 * P_i} = \\[2ex] = \dfrac{N'_1 * N_2}{D_1 * D'_2} \text{ (irreductible)} \\[2ex] F_3 = n(f_3) \end{array}\right.$$

$\vdash_t f_3$

ed-2. *Esquema de la equivalencia*

$$\left\{\begin{array}{l} \vdash_t f_1 \qquad n(f_1) = F_1 \\ F_1 = n(f_i) = n(f_j) = \ldots \end{array}\right.$$

$\vdash_t f_i$

$\vdash_t f_j$

.....

mente, aquéllos que pueden deducirse al nivel del cálculo proposicional):

a) Se efectuarán sistemáticamente todos los productos binarios de los números del conjunto SI(t), sometiendo los resultados a un análisis destinado a rechazar todos aquéllos que no hayan traído con sigo la eliminación de uno y un solo factor primo común, con arreglo a la *regla de eliminación* rd-1. Es evidente que si el número de factores primos de un número F_1 es m_1 y el número de factores primos de otro número F_2 es m_2, la citada eliminación habrá tenido lugar si y sólo si el número de factores del resultado $F_3 = F_1 * F_2$ es $m_3 = m_1 + m_2 - 2$.

b) Los resultados válidos serán retenidos para incluirlos en la memoria de las proposiciones y para continuar con ellos el proceso, hasta que se hayan agotado todas las combinaciones y no puedan obtenerse resultados nuevos.

c) Obtenidos todos los números característicos válidos (es decir, correspondientes a proposiciones afirmables en la teoría t, en virtud de la regla de deducción rd-1), se construirán sistemáticamente, en aplicación de la regla de deducción rd-2 o *regla de la equivalencia,* todas las proposiciones lógicas, entre sí equivalentes, pertenecientes a cada una de las clases reducidas de equivalencia representadas por los números característicos retenidos, que son, como sabemos, los invariantes aritméticos de dichas clases. Según hemos visto, el número de proposiciones de cada clase reducida de equivalencia es n! (factorial de n), donde n es el número de factores primos (con exponente 1 ó —1) del respectivo invariante aritmético.

Todas estas operaciones pueden ser efectuadas sin dificultad alguna y con rapidez suficiente en un ordenador, con la impresión inmediata de todos los resultados válidos, entre los cuales pueden luego seleccionarse humanamente, es decir, por equipos de científicos especialistas de la materia, aquéllos que merezca la pena retener definitivamente.

Como ejemplos sencillos de deducción por aplicación de las dos reglas aritméticas de deducción que hemos enunciado, presentamos a continuación tres cuadros, que podríamos llamar tablas de *multiplicación proposicional.* Los tres muestran las consecuencias que pueden deducirse de un par de fórmulas lógicas de nuestro cálculo, tomadas como premisas, por multiplicación de los números característicos de éstas y aplicación de la regla de la equivalencia. En el cuadro I tomamos como premisas, respectivamente, una fórmula de 2 ó 3 argumentos y una fórmula de 1 argumento; en el cuadro II, una fórmula de 2 ó 3 argumentos y una fórmula de 2 argumentos. El cuadro III, en el que se han tomado ambas premisas con 3 argumentos (y el resultado o consecuencia tiene 4 argumentos), es más esquemático, pues no hay espacio para aplicar, tras la regla de eliminación por multiplicación, la regla de la equivalencia. Por lo tanto, en este último cuadro, tanto de los números característicos multiplicados, que aparecen en la columna de la izquierda y en la fila superior del cuadro, como de los números característicos producto, que aparecen en los cuadrados de intersección, cuando son resultados válidos, se presenta sólo una de las fórmulas lógicas de la clase de equivalencia que tiene el número indicado como invariante. De hecho cada uno de los multiplicandos corresponde como invariante a una clase reducida de equivalencia que contiene $6 = 3!$ (factorial de 3) fórmulas equivalentes y cada uno de los resultados a una clase de equivalencia que contiene $24 = 4!$ (factorial de 4) fórmulas equivalentes. En otras palabras, cada cuadrado de intersección resume las 24 consecuencias lógicas que pueden deducirse de cada una de las 36 ($= 6 \ast 6$) combinaciones de premisas resumidas en los números característicos que encabezan la fila y la columna que se cruzan en el cuadrado considerado. Cada cuadrado resume, pues $36 \ast 24 = 864$ deducciones legítimas, autorizadas por una sola multiplicación aritmética, y, como la hoja adjunta tiene 32 cuadrados llenos, en ella se sintetizan $32 \ast 864 = 27.648$ deducciones válidas.

(En los cuadros hemos omitido, por falta de espacio, el signo de multiplicación $\ast$.)

Una última observación: Como hemos explicado repetidamente, para la finalidad para la que hemos creado nuestro cálculo aritmético de las proposiciones, las restricciones implícitas en las reglas de formación de las fórmulas lógicas del CAP, y ante todo la no-repetibilidad en una fórmula de una misma variable proposicional (de acuerdo con lo establecido por la regla de formación rf-4), no constituyen una limitación esencial. Sin embargo, para otros propósitos, podríamos concebir la ampliación de las reglas de formación para dar origen a un cálculo en que tuvieran cabida otras fórmulas del cálculo proposicional clásico, por ejemplo, de la forma:

Cf_1f_2 donde f_1 y f_2 podrían ser, en condiciones que ahora no vamos a examinar, fórmulas con una o más variables proposicionales comunes.

Sin entrar aquí en más detalles, nos limitaremos a observar que, en ese caso, cuando f_1 y f_2 fueran fórmulas equivalentes —y por lo tanto sus respectivos números característicos F_1 y F_2 iguales ($F_1 = F_2$), las fórmulas Cf_1f_2 y Cf_2f_1 tendrían los números característicos siguientes:

Cf_1f_2	$F_1^{-1} \ast F_2 = F_1^{-1} \ast F_1 = 1$
Cf_2f_1	$F_2^{-1} \ast F_1 = F_1^{-1} \ast F_1 = 1$

En otras palabras, en un cálculo ampliado de ese tipo, cuando dos fórmulas lógicas f_1 y f_2 fueran equivalentes, las dos implicaciones Cf_1f_2 y Cf_2f_1 tendrían ambas como número característico la unidad positiva.

Otras leyes o teoremas fundamentales del cálculo proposicional clásico tendrían también como número característico la unidad positiva, por ejemplo:

CKCpqCqrCpr	$(P^{-1} \ast Q)^{-1} \ast (Q^{-1} \ast R)^{-1} \ast (P^{-1} \ast R) = 1$ (Ley del silogismo)
CKCpqpq	$(P^{-1} \ast Q)^{-1} \ast P^{-1} \ast Q = 1$ (Modus ponendo ponens)

Habría que estudiar, pues, si no sería posible construir un cálculo ampliado de ese tipo en que la *unidad positiva* tuviera el papel de invariante característico de la clase de las *tautologías* equivalentes a las de la forma Cf_1f_1 al mismo tiempo que la *unidad negativa* tuviera el papel de invariante característico de la clase de las *contradicciones* equivalentes a las de la forma Kf_1Nf_1 (para ésto último habría que introducir en tal cálculo, bajo ciertas condiciones, fórmulas lógicas de la forma Nf_1 ó Kf_1f_2, donde f_1 y f_2 serían fórmulas lógicas cualesquiera con una o más variables proposicionales comunes). El número característico de toda fórmula equivalente a una de la forma Kf_1Nf_1 sería:

$$(-F^{-1}) * F_1 = -1$$

Pero ésta no es más que una sugerencia que brindo a quienes consideren de alguna utilidad ampliar el cálculo en esa dirección.

CUADRO I		P	p	Q	q	—P^{-1}	Np	—Q^{-1}	Nq
Cpq CNqNp	$P^{-1}Q$	Q	q	———		———		—P^{-1}	Np
CpNq CqNp	—$P^{-1}Q^{-1}$	—Q^{-1}	Nq	—P^{-1}	Np	———		———	
CNqp CNpq	—PQ	———		———		Q	q	P	p
CNpNq Cqp	PQ^{-1}	———		P	p	—Q^{-1}	Nq	———	
CpCqr CpCNrNq CqCpr CqCNrNp CNrCpNq CNrCqNp	$P^{-1}Q^{-1}R$ CKpqr	$Q^{-1}R$	Cqr CNrNq	$P^{-1}R$	Cpr CNrNp	———		———	
CpCqNr CpCrNq CqCpNr CqCrNp CrCpNq CrCqNp	—$P^{-1}Q^{-1}R^{-1}$ D (pqr)	—$Q^{-1}R^{-1}$	Dqr Drq	—$P^{-1}R^{-1}$	Dpr Drp	———		———	
CpCNqr CpCNrq CNqCpr CNqCNrNp CNrCpq CNrCNqNp	—$P^{-1}QR$	—QR	Aqr Arq	———		———		$P^{-1}R$	Cpr CNrNp
CpCNqNr CpCrq CNqCpNr CNqCrNp CrCpq CrCNqNp	$P^{-1}QR^{-1}$ CKprq	QR^{-1}	Crq CNqNr	———		———		—$P^{-1}R^{-1}$	Dpr Drp
CNpCqr CNpCNrNq CqCNpr CqCNrp CNrCNpNq CNrCqp	—$PQ^{-1}R$	———		—PR	Apr Arp	$Q^{-1}R$	Cqr CNrNq	———	
CNpCNqr CNpCNrq CNqCNpr CNqCNrp CNrCNpq CNrCNqp	PQR A (pqr)	———		———		—QR	Aqr Arq	—PR	Apr Arp
CNpCqNr CNpCrNq CqCNpNr CqCrp CrCNpNq CrCqp	$PQ^{-1}R^{-1}$	———		PR^{-1}	Crp CNpNr	—$Q^{-1}R^{-1}$	Dqr Drq	———	
CNpCNqNr CNpCrq CNqCNpNr CNqCrp CrCNpq CrCqNp	—PQR^{-1}	———		———		QR^{-1}	Crq CNqNr	PR^{-1}	Crp CNpNr

CUADRO II	$Q^{-1}S$ { Cqs CNsNq	$-Q^{-1}S^{-1}$ { Dqs Dsq	$-QS$ { Aqs Asq	QS^{-1} { Csq CNqNs
Cpq CNqNp $P^{-1}Q$	$P^{-1}S$ Cps CNsNp	$-P^{-1}S^{-1}$ Dps Dsp	—	—
CpNq CqNp $-P^{-1}Q^{-1}$	—	—	$P^{-1}S$ Cps CNsNp	$-P^{-1}S^{-1}$ Dps Dsp
CNqp CNpq $-PQ$	$-PS$ Aps Asp	PS^{-1} Csp CNpNs	—	—
CNpNq Cqp PQ^{-1}	—	—	$-PS$ Aps Asp	PS^{-1} Csp CNpNs
CpCqr CpCNrNq CqCpr CqCNrNp CNrCpNq CNrCqNp $P^{-1}Q^{-1}R$ CKpqr	—	—	$-P^{-1}RS$ CNrCNsNp CNrCps CNsCNrNp CNsCpr CpCNsr CpCNrs	$P^{-1}RS^{-1}$ CKpsr CpCsr CpCNrN CsCpr CsCNrN CNrCpN CNrCsN
CpCqNr CpCrNq CqCpNr CqCrNp CrCpNq CrCqNp $-P^{-1}Q^{-1}R^{-1}$ D (pqr)	—	—	$P^{-1}R^{-1}S$ CKprs CpCrs CpCNsNr CrCps CrCNsNp CNsCrNp CNsCpNr	$-P^{-1}R^{-1}S^{-1}$ D (prs) CpCr CpCs CrCp CrCs CsCr CsCp
CpCNqr CpCNrq CNqCpr CNqCNrNp CNrCpq CNrCNqNp $-P^{-1}QR$	$-P^{-1}RS$ CpCNsr CpCNrs CNsCpr CNsCNrNp CNrCps CNrCNsNp	$P^{-1}RS^{-1}$ CKpsr CpCsr CpCNrNs CsCpr CsCNrNp CNrCpNs CNrCsNp	—	—
CpCNqNr CpCrq CNqCpNr CNqCrNp CrCpq CrCNqNp $P^{-1}QR^{-1}$ CKprq	$P^{-1}R^{-1}S$ CKprs CpCNsNr CpCrs CNsCpNr CNsCrNp CrCps CrCNsNp	$-P^{-1}R^{-1}S^{-1}$ D (prs) CpCrNs CpCsNr CrCpNs CrCsNp CsCpNr CsCrNp	—	—
CNpCqr CNpCNrNq CqCNpr CqCNrp CNrCNpNq CNrCqp $-PQ^{-1}R$	—	—	PRS A (prs) CNpCNrs CNpCNsr CNrCNps CNrCNsp CNsCNpr CNsCNrp	$-PRS^{-1}$ CNpCNr CNpCsr CNrCNp CNrCsp CsCNrp CsCNpr
CNpCNqr CNpCNrq CNqCNpr CNqCNrp CNrCNpq CNrCNqp PQR A (pqr)	PRS A (prs) CNpCNsr CNpCNrs CNsCNpr CNsCNrp CNrCNps CNrCNsp	$-PRS^{-1}$ CNpCsr CNpCNrNs CsCNpr CsCNrp CNrCsp CNrCNpNs	—	—
CNpCqNr CNpCrNq CqCNpNr CqCrp CrCNpNq CrCqp $PQ^{-1}R^{-1}$	—	—	$-PR^{-1}S$ CNpCNsNr CNpCrs CNsCNpNr CNsCrp CrCNsp CrCNps	$PR^{-1}S^{-1}$ CKrsp CrCsp CrCNpN CsCrp CsCNpN CNpCsN CNpCrN
CNpCNqNr CNpCrq CNqCNpNr CNqCrp CrCNpq CrCqNp $-PQR^{-1}$	$-PR^{-1}S$ CNpCNsNr CNpCrs CNsCNpNr CNsCrp CrCNps CrCNsp	$PR^{-1}S^{-1}$ CKrsp CrCsp CrCNpNs CsCrp CsCNpNr CNpCrNs CNpCsNr	—	—

CUADRO III

meros ca- cterísticos fórmulas lóg.	$R^{-1}S^{-1}T$ CrCst CKrst	—$R^{-1}S^{-1}T^{-1}$ CrCsNt D(rst)	—$R^{-1}ST$ CrCNst	$R^{-1}ST^{-1}$ CrCNsNt	—$RS^{-1}T$ CNrCst	$RS^{-1}T^{-1}$ CNrCsNt	RST CNrCNst A(rst)	—RST^{-1} CNrCNsNt
$Q^{-1}R$ Cqr pqr	$P^{-1}Q^{-1}S^{-1}T$ CpCqCst CK(pqs)t	—$P^{-1}Q^{-1}S^{-1}T^{-1}$ CpCqCsNt D(pqst)	—$P^{-1}Q^{-1}ST$ CpCqCNst	$P^{-1}Q^{-1}ST^{-1}$ CpCqCNsNt	——	——	——	——
$^{-1}Q^{-1}R^{-1}$ CqNr pqr)	——	——	——	——	$P^{-1}Q^{-1}S^{-1}T$ CpCqCst CK(pqs)t	—$P^{-1}Q^{-1}S^{-1}T^{-1}$ CpCqCsNt D(pqst)	—$P^{-1}Q^{-1}ST$ CpCqCNst	$P^{-1}Q^{-1}ST^{-1}$ CpCqCNsNt
^{-1}QR Nqr	—$P^{-1}QS^{-1}T$ CpCNqCst	$P^{-1}QS^{-1}T^{-1}$ CpCNqCsNt	$P^{-1}QST$ CpCNqCNst	—$P^{-1}QST^{-1}$ CpCNqCNsNt	——	——	——	——
QR^{-1} NqNr	——	——	——	——	—$P^{-1}QS^{-1}T$ CpCNqCst	$P^{-1}QS^{-1}T^{-1}$ CpCNqCsNt	$P^{-1}QST$ CpCNqCNst	—$P^{-1}QST^{-1}$ CpCNqCNsNt
$Q^{-1}R$ pCqr	—$PQ^{-1}S^{-1}T$ CNpCqCst	$PQ^{-1}S^{-1}T^{-1}$ CNpCqCsNt	$PQ^{-1}ST$ CNpCqCNst	—$PQ^{-1}ST^{-1}$ CNpCqCNsNt	——	——	——	——
$^{-1}R^{-1}$ pCqNr	——	——	——	——	—$PQ^{-1}S^{-1}T$ CNpCqCst	$PQ^{-1}S^{-1}T^{-1}$ CNpCqCsNt	$PQ^{-1}ST$ CNpCqCNst	—$PQ^{-1}ST^{-1}$ CNpCqCNsNt
R pCNqr pqr)	$PQS^{-1}T$ CNpCNqCst	—$PQS^{-1}T^{-1}$ CNpCNqCsNt	—PQST CNpCNqCNst A (pqst)	$PQST^{-1}$ CNpCNqCNsNt CK(NpNqNs)Nt	——	——	——	——
QR^{-1} pCNqNr NpNqNr	——	——	——	——	$PQS^{-1}T$ CNpCNqCst	—$PQS^{-1}T^{-1}$ CNpCNqCsNt	—PQST CNpCNqCNst A(pqst)	$PQST^{-1}$ CNpCNqCNsNt CK(NpNqNs)Nt

BIBLIOGRAFÍA

BELY, N. et al.: *Procédures d'analyse sémantique appliquées à la documentation scientifique.* Paris, Gauthier-Villars, 1970.

BLANCHE, Robert: *Structures intellectuelles* (Essai sur l'organisation systématique des concepts). Paris, J. Vrin, 1966.

——— *Introduction à la Logique Mathématique.* Paris, Armand Colin, 1968.

BOCHENSKI, I. M.: *Précis de Logique Mathématique.* Bussum (Holanda), F. G. Kroonder, 1949.

COUTURAT, Louis: *La Logique de Leibniz,* d'après des documents inédits. Paris, Félix Alcan, 1901.

GARDIN, N., LEVY, F.: *Lexique documentaire pour l'information scientifique.* Marseille, Groupe d'Etude pour l'information scientifique, 1969.

GROSS, M., LENTIN, A.: *Notions sur les Grammaires Formelles.* Paris, Gauthier-Villars, 1967.

KLEENE, S. C.: *Introduction to Metamathematics.* Amsterdam, North-Holland, 1967.

LEIBNIZ, G. W.: *Opuscules et fragments inédits,* extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre par Louis Couturat. Paris, Félix Alcan, 1903.

LUKASIEWICZ, J.: *Elements of Mathematical Logic.* Peegamon Press, PWN, Polish Scientific Publishers. Varsovia 1963, reimpreso en 1966.

SÁNCHEZ-MAZAS, M.: *Fundamentos matemáticos de la Lógica Formal.* Caracas, Universidad Central de Venezuela, 1963.

———. *Preliminary ideas concerning an automatic computation of "qualities".* Proceedings of the IFIP Congress 68, vol. I, pp. 224-230. Amsterdam, North-Holland, 1969.

———. *Ideas preliminares para un cálculo automático de las "cualidades".* Revista de Automática, año I, núm. 2, pp. 19-25. Madrid, 1968. (Traducción del anterior.)

SMULLYAN, R. M.: *Theory of Formal Systems.* Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1961.

UNISIST; Etude sur la réalisation d'un système mondial d'information scientifique, effectuée par l'Organisation des Nations Unies pour l'education, la science et la culture et le Conseil International des unions scientifiques. Paris, UNESCO, 1971.