LABERINTOS ANALÍTICOS

R. Beneyto

1. Introducción

DADO UN CONJUNTO Γ de *n* enunciados $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, donde $n \geq 0$, y un enunciado ψ decimos, en ocasiones, que ψ es una *consecuencia lógica* de Γ.

Tal aserto puede ser establecido por dos vías distintas. Por una parte —y éste es el procedimiento hasta el presente más usual, casi privativo— podemos construir al respecto, mediante sucesivas aplicaciones de un conjunto de reglas —las denominadas *reglas de inferencia*— una derivación del enunciado ψ a partir del conjunto Γ de enunciados $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ dentro de un cálculo lógico determinado.

El segundo procedimiento consiste en mostrar que todas las sustituciones de nuevos términos por los términos que figuran en los enunciados $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ y ψ que dan como resultado enunciados $\phi'_1, \phi'_2, \ldots, \phi'_n$ verdaderos dan también como resultado enunciados ψ' que son, a su vez, verdaderos.

El conjunto de los problemas que podemos decidir positivamente mediante el primer método coincide con el conjunto de los problemas que podemos decidir positivamente mediante el segundo método. En otras palabras: si denominamos *establecimiento sintáctico de una consecuencia lógica* al primer procedimiento y *establecimiento semántico de una consecuencia lógica* al segundo, toda consecuencia lógica puede ser establecida indistintamente de un modo sintáctico o de un modo semántico.

Nuestro trabajo consiste en la presentación de un método —al que denominaremos *método de los laberintos* *analíticos*— que tiene su base en el de 'Semantic Tableaux' de Beth, [1] y que, como éste, permite el establecimiento semántico de consecuencias lógicas.

Pero antes es preciso que nos detengamos en algunas consideraciones.

2. *Lenguaje L, interpretaciones y modelos*

Es ya usual en lógica servirse de lenguajes artificiales para obviar los inconvenientes que ofrecen los lenguajes naturales.

El alfabeto del lenguaje artificial L de que vamos a hacer uso consta de los siguientes objetos:

a: constantes individuales: $a, b, \ldots, q;$

b: variables individuales: $r, s, \ldots, z;$

c: constantes predicativas: $A^n, B^n, \ldots, Z^n$ donde $n \geq 0$.

d: juntores: —, &, v, $\rightarrow$, $\Leftrightarrow$;

e: cuantores: $(\forall .)$, $(\exists .)$, donde los puntos están ocupados por una y sólo una variable individual cualquiera.

Combinando estos objetos obtenemos expresiones que reciben el nombre de *fórmulas*. Pero no todas ellas pertenecen a nuestro lenguaje. Se selecciona el conjunto de fórmulas del mismo mediante las definiciones de fórmula atómica y de fórmula de L.

Una *fórmula atómica* es una expresión constituida por una constante predicativa de índice n seguida de n símbolos, cada uno de los cuales es o una variable individual o una constante individual. C^0, B^3abx y C^2pq son, por ejemplo, fórmulas atómicas. Una fórmula ϕ es una *fórmula* de L si ϕ es una fórmula atómica o —supuesto que ψ y χ sean fórmulas de L y α sea una variable individual cualquiera— si ϕ es

[1] Beth, E. W.: The Foundation of Mathematics. Amsterdam: North Holland, 1965.

Beth, E. W.: Semantic Entailment and Formal Derivability; en J. Hintikka (ed.): The Philosophy of Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 1969.

Smullyan, R. M.: First-Order Logic. Berlin: Springer-Verlag, 1968.

—ψ, $\psi \& \chi$, $\psi v \chi$, $\psi \rightarrow \chi$, $\psi \Leftrightarrow \chi$, $(\forall\ \alpha)\psi$ o $(\exists\ \alpha)\psi$. Una variable α ocurre en una fórmula $\emptyset$ si alguno de los objetos que constituyen $\emptyset$ es α. Una ocurrencia de la variable α en $\emptyset$ es libre si $\emptyset$ no es la fórmula $(\forall\ \alpha)\psi$ ni $(\exists\ \alpha)\psi$ ni esa ocurrencia de α es parte de una de las fórmulas que componen $\emptyset$ que sea $(\forall\ \alpha)\psi$ o $(\exists\ \alpha)\psi$. Finalmente, una fórmula de L es un enunciado de L si en ella ninguna variable ocurre libre.

Si elegimos un dominio no vacío de objetos y asignamos a cada constante individual de L un objeto de dicho dominio, a cada constante predicativa de L cuyo índice *n* es 0 uno de los dos valores de verdad 'Verdad' y 'Falsedad', a cada constante predicativa de L cuyo índice *n* es 1 un conjunto de individuos del dominio y a cada constante predicativa de L cuyo índice *n* es mayor que 1 una relación *n*-aria entre elementos del dominio, hemos interpretado nuestro lenguaje.

Con tal interpretación cada uno de los enunciados $\emptyset$ de L resulta ser verdadero o falso en atención a las siguientes convenciones:

El enunciado $\emptyset$ es verdadero en una interpretación I

a: cuando en I asociamos 'Verdad' con $\emptyset$, si éste es una constante predicativa de índice *n* igual a 0.

b: cuando el objeto que en I asociamos con la constante individual pertenece al conjunto que en I asociamos con la constante predicativa, si $\emptyset$ es una constante predicativa de índice *n* igual a 1 seguida de una constante individual.

c: cuando los objetos asociados en I con las constantes individuales constituyen un *n*-plo ordenado —conforme al orden en que ocurren las constantes— que es uno de los *n*-plos ordenados determinados en el dominio por la relación *n*-aria que asociamos en I con la constante predicativa, si $\emptyset$ es una constante predicativa de índice *n* mayor que 1 seguida de *n* constantes individuales.

d: cuando ψ no es verdadero en I, si $\emptyset$ es el enunciado —ψ.

e: cuando ψ y χ son verdaderos en I, si $\emptyset$ es el enunciado $\psi \& \chi$.

f: cuando ψ es verdadero en I, o lo es χ o lo son ambos, si $\emptyset$ es el enunciado $\psi \vee \chi$.

g: cuando $-\psi \vee \chi$ es verdadero en I, si $\emptyset$ es el enunciado $\psi \rightarrow \chi$.

h: cuando $(\psi \rightarrow \chi)$ & $(\chi \rightarrow \psi)$ es verdadero en I, si $\emptyset$ es el enunciado $\psi \Leftrightarrow \chi$.

i: cuando para cada constante β de L el enunciado $\alpha \psi \beta$ —donde α es una variable y $\alpha \psi \beta$ es el resultado de sustituir β por todas las ocurrencias libres de α en ψ—, es verdadero en I, si $\emptyset$ es el enunciado $(\forall\alpha)\psi$.

j: cuando para alguna constante β de L el enunciado $\alpha \psi \beta$ es verdadero en I, si $\emptyset$ es el enunciado $(\exists\alpha)\psi$.

El enunciado $\emptyset$ es falso en I si $\emptyset$ no es verdadero en I.

En el caso de que todos los enunciados de un conjunto Γ de enunciados sean verdaderos en una interpretación I decimos que I es un *modelo* de Γ.

3. *Laberintos analíticos*

¿En qué circunstancias, desde el punto de vista semántico, podemos decir que el enunciado ψ es una consecuencia lógica del conjunto Γ de enunciados $\emptyset_1, \emptyset_2, \ldots, \emptyset_n$? En el caso de que se trate de enunciados de un lenguaje natural, sólo cuando hayamos resuelto afirmativamente los resultados de 'todas' las posibles sustituciones a que anteriormente hemos aludido. Y, en el caso de que se trate de enunciados de L, cuando 'todas' sus posibles interpretaciones resulten ser modelos del enunciado

$$(\emptyset_1 \;\&\; \emptyset_2 \;\&\; \ldots \;\&\; \emptyset_n) \rightarrow \psi.$$

(En lo sucesivo siempre que hablemos de 'enunciados' nos referimos a enunciados de L.)

Una simple reflexión sobre el problema es suficiente para advertir lo compleja que resulta la solución positiva del mismo. Por su parte, la solución negativa precisa sólo encontrar una interpretación que no sea modelo del enunciado

$$(\emptyset_1 \;\&\; \emptyset_2 \;\&\; \ldots \;\&\; \emptyset_n) \rightarrow \psi;$$

es decir, una interpretación que sea modelo del conjunto de enunciados $\emptyset_1$, $\emptyset_2$, ..., $\emptyset_n$ y $—\psi$.

Así, por ejemplo, el enunciado P & $—Q$ no es una consecuencia lógica del enunciado (P & S) v (P & T). Una posible interpretación que no sea modelo del enunciado

((P & S) v (P & T)) → (P & $—Q$) es la siguiente:

> P está asociado con 'Verdad'
> S está asociado con 'Verdad'
> T está asociado con 'Falsedad' y
> Q está asociado con 'Verdad'

Una búsqueda sin regla de tales interpretaciones —'contraejemplos', en términos de Beth— puede resultar tan tediosa, especialmente cuando intervienen cuantores, como lo era la solución positiva a la cuestión de si un enunciado es una consecuencia lógica de un determinado conjunto de enunciados.

Con el método de las *Semantic Tableaux* de Beth disponemos de un medio para descubrir la posibilidad de uno o más contraejemplos o para concluir, en caso contrario, al cabo de un número finito de pasos, la imposibilidad de construir uno. Si sucede lo primero, el problema tiene una solución negativa; si lo segundo, es que cualquier interpretación es un modelo del conjunto Γ y del enunciado ψ.

La estructura arbórea del método de Beth presenta algunos inconvenientes que se pueden obviar, tal y como puede verse en el método de los laberintos analíticos, cuya forma externa es lineal, si bien internamente mantiene dicha estructura arbórea.

Un *laberinto* A es una sucesión de puntos consecutivamente numerados, ocupado cada uno de ellos por un enunciado, y una serie de conjuntos de números o *claves* de ruta del punto. Un *laberinto parcial* AP de un laberinto A es la sección del laberinto A comprendida entre el primer punto y otro punto cualquiera p, ambos incluidos.

Cada punto de un laberinto, parcial o no, determina al menos una ruta ρ que concluye en dicho punto. El número de rutas determinadas por un punto equivale al número de claves de ruta del mismo. La *ruta* determinada por una clave Δ es el conjunto de todos los puntos que presentan entre sus claves alguna clave Δ' tal que $\Delta' \subseteq \Delta$. De Δ se dice que es una *clave subordinada* de Δ'. Todos estos puntos reciben la denominación de *puntos coincidentes. Extensión de una clave* respecto de un número es el conjunto que resulta de añadir dicho número a los elementos del conjunto que constituía la clave en cuestión. Una serie de claves se ha extendido respecto de un número si se han extendido todas las claves de la serie. Una clave se *clausura* si se clausura la ruta que determina. Es decir, si en dos puntos de la ruta figuran dos enunciados que constituyen una pareja de Beth o si se han clausurado todas las rutas subordinadas a ella. Dos enunciados ϕ y ψ constituyen una *pareja de Beth* si ψ es el enunciado —ϕ o ϕ es el enunciado —ψ; si dichos enunciados constituyen una pareja de Beth y ocupan dos puntos coincidentes forman una *pareja propia de Beth.*

Veamos la elaboración de un laberinto. Queremos saber si el enunciado $(\forall x)Ax$ v $(\forall y)By$ es una consecuencia lógica del enunciado $(\forall x)$ $(\forall y)$ $(Ax$ v $By)$ —damos por supuesto que son enunciados de L y suprimimos el índice '1' que deberían presentar A y B. La condición que ha de cumplir cualquier contraejemplo es la de satisfacer los enunciados

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (Ax \text{ v } By) \qquad \text{y}$$
$$—((\forall x)Ax \text{ v } (\forall y)By).$$

Por ello incluimos estos dos enunciados en los puntos (1) y (2) respectivamente con el conjunto vacío Λ como clave de ruta.

		(1)	$(\forall x)\ (\forall y)\ (Ax$ v $By)$	Λ	
	*	(2)	$—((\forall x)Ax$ v $(\forall y)By)$	Λ	
*a		(3)	$(\forall y)\ (Aa$ v $By)$	Λ	de (1)
	*	(4)	$—(\forall x)Ax$	Λ	de (2)
	*	(5)	$—(\forall y)By$	Λ	de (2)
	*	(6)	Aa v Ba	Λ	de (3)
		(7)	$—Aa$	Λ	de (4)

	(8)	*Aa*	* {8}	de	(6)
	(9)	*Ba*	* {9}/	de	(6)
*b	(10)	$(\forall y)(Ab \vee By)$	Λ	de	(1)
*	(11)	$Aa \vee Bb$	Λ	de	(3)
	(12)	—*Bb*	Λ	de	(5)
	(13)	$Ab \vee Bb$	Λ	de	(10)
	(14)	*Aa*	* {9, 14}	de	(11)
	(15)	*Bb*	* {9, 15}	de	(11)
		$(\forall x)Ax \vee (\forall y)By$			

Consideremos los pasos dados en la confección del laberinto tras la introducción de los dos enunciados. Sea *a* uno de los individuos de un posible contraejemplo. Tal individuo ha de satisfacer la condición antes indicada. En (3) establecemos que cumple (1). En (4) y (5) establecemos las condiciones impuestas por (2) y, para evitar innecesarias repeticiones de los enunciados —$(\forall x)Ax$ y —$(\forall y)By$, marcamos (2) con un '*' prohibiendo cualquier posible transformación de dicho enunciado. En (6) nos aseguramos de que *a* satisface la condición que establecemos en (3). En (7) elegimos el individuo *a* como el exigido por (4). Ello significa que cuando otro enunciado exija un individuo concreto no podemos utilizar ya este individuo y, en consecuencia, marcamos *a* con un * para especificar la situación en que se encuentra. A su vez se ha cumplido plenamente (4), por lo que se prohibe también (4) para cualquier otro individuo del dominio. En estas circunstancias (5) queda pendiente hasta la introducción de un nuevo individuo. (6) indica que cualquier contraejemplo tiene una doble opción: o que *a* satisfaga *A* o que *a* satisfaga *B*. Por esta razón en (8) y (9) iniciamos dos rutas distintas que determinamos con sus respectivas claves {8} y {9}. Como hicimos en (2), prohibimos (6). Los puntos (7), (8) y (9) no admiten transformación. Los enunciados de (7) y (8) constituyen una pareja propia de Beth en la ruta determinada por {8}, por lo que ésta se clausura *{8}. Introducimos un segundo individuo *b*. En (10) nos aseguramos de que *b* satisface (1) y en (11) de que satisface (3). (4) está prohibido y, por (12), *b* cumple (5). Igual que antes hicimos con *a* y (4), prohibimos ahora *b* y (5). (13) resulta de (10) y el laberinto presenta dos nuevas rutas en atención a (11): {9, 14} y {9, 15}. Con {9}/ especificamos que esta clave se ha extendido. En la ruta determinada por {9, 14} figura la pareja propia de Beth Aa y $-Aa$, por lo que queda clausurada. La pareja Bb y $-Bb$ aparece en la ruta determinada por {9, 15} que, consecuentemente, se clausura. Todas las rutas subordinadas a {9} —{9, 14} y {9, 15}— se han clausurado, por lo cual {9} también se clausura. Con ello se han clausurado todas las rutas del laberinto y éste se clausura: es imposible encontrar un contraejemplo. Y así escribimos —ya fuera del laberinto— el enunciado

$$(\forall x)Ax \vee (\forall y)By.$$

He aquí las tablas de Beth [1] correspondientes a este laberinto:

VÁLIDOS		NO VÁLIDOS	
(1)	$(\forall x)(\forall y)(Ax \vee By)$	(2)	$(\forall x)Ax \vee (\forall y)By$
(7)	$(\forall y)(Aa \vee By)$	(3)	$(\forall x)Ax$
(8)	$Aa \vee Ba$	(4)	Aa
		(5)	$(\forall y)By$
		(6)	Bb

(i)	(ij)	(i)	(ij)
(9) Aa	(10) Ba		
	(11) $(\forall y)(Ab \vee By)$		
	(12) $Aa \vee Bb$		

(iij)	(iv)	(iij)	(iv)
(13) Aa	(14) Bb		

[1] Beth. E. W.: Semantic Entailment and Formal Derivability (op. cit.), p. 22.

En la figura de la izquierda presentamos nuestro laberinto en forma de árbol y en la derecha hacemos lo propio con la tabla de Beth.

```
       (1)                 (1)                    (2)
       (2)                 (7)                    (3)
       (3)                 (8)                    (4)
       (4)                /   \                   (5)
       (5)             (9)    (10)                (6)
       (6)                    (11)               /   \
       (7)                    (12)             ( )    ( )
      (10)                   /    \                  /   \
      (11)               (13)     (14)             ( )    ( )
      (12)
      (13)
     /    \
  (8)     (9)
         /   \
     (14)    (15)
```

Para la construcción del laberinto comenzamos con la introducción de una constante individual si procede —es decir, si en el problema interviene algún cuantor. Se pasa a operar punto a punto hasta agotar todas las posibilidades de operar con dicha constante. Se procede después a introducir una segunda, una tercera, etc. constantes. De todos modos, si en un laberinto ningún punto no prohibido de una ruta no clausurada está ocupado por un enunciado ($\exists\alpha$)ø o —($\forall\alpha$)ø no procede introducir nuevas constantes. Las rutas no clausuradas constituyen posibles contraejemplos.

Nos resta presentar ahora las reglas adecuadas para la construcción del laberinto.

4. *Reglas de construcción*

EC. *Eliminación de la conjunción.* Si ø figura en un punto no prohibido p, alguna de cuyas claves no ha sido clausurada, de un laberinto parcial AP de m puntos y ø es el enunciado ψ & χ increméntese AP en dos nuevos puntos $(m + 1)$ y $(m + 2)$ y prohíbase p. Introdúzcase ψ en el punto $(m + 1)$ y χ en el punto $(m + 2)$. Las series s′ y s″ de claves de $(m + 1)$ y $(m + 2)$ son la serie s de claves no clausuradas de p.

ED. *Eliminación de la disyunción.* Si ϕ figura en un punto no prohibido p, alguna de cuyas claves no ha sido clausurada, de un laberinto parcial AP de m puntos y ϕ es el enunciado $\psi \lor \chi$ increméntese AP en dos nuevos puntos $(m + 1)$ y $(m + 2)$ y prohíbase p. Introdúzcase ψ en el punto $(m + 1)$ y χ en el punto $(m + 2)$. Las series s′ y s″ de claves de $(m + 1)$ y $(m + 2)$ son, respectivamente, s$(m + 1)$ y s$(m + 2)$, donde s$(m + 1)$ y s$(m + 2)$ son las series que resultan de extender, respecto de $(m + 1)$ y $(m + 2)$, las claves subordinadas no extendidas ni clausuradas de las claves no clausuradas de p.

EI. *Eliminación de la implicación.* Si ϕ figura en un punto no prohibido p, alguna de cuyas claves no ha sido clausurada, de un laberinto parcial AP de m puntos y ϕ es el enunciado $\psi \rightarrow \chi$ increméntese AP en dos nuevos puntos $(m + 1)$ y $(m + 2)$ y prohíbase p. Introdúzcase $—\psi$ en el punto $(m + 1)$ y χ en el punto $(m + 2)$. Las series de claves s′ y s″ de $(m + 1)$ y $(m + 2)$ son, respectivamente, s$(m + 1)$ y s$(m + 2)$.

EDI. *Eliminación de la doble implicación.* Si ϕ figura en un punto no prohibido p, alguna de cuyas claves no ha sido clausurada, de un laberinto parcial AP de m puntos y ϕ es el enunciado $\psi \Leftrightarrow \chi$ increméntese AP en dos nuevos puntos $(m + 1)$ y $(m + 2)$ y prohíbase p. Introdúzcase $\psi \rightarrow \chi$ en el punto $(m + 1)$ y $\chi \rightarrow \psi$ en el punto $(m + 2)$. Las series de claves s′ y s″ de $(m + 1)$ y $(m + 2)$ son la serie s de claves no clausuradas de p.

EG. *Eliminación del cuantor general.* Si ϕ figura en un punto p, alguna de cuyas claves no ha sido clausurada, de un laberinto parcial AP de m puntos y ϕ es el enunciado $(\forall \alpha)\psi$, increméntese AP en un nuevo punto $(m + 1)$. Introdúzcase $\alpha\psi\beta_n$ en el punto $(m + 1)$ —β_n es la constante individual de que se está haciendo uso—. La serie de claves s′ de $(m + 1)$ es la serie s de claves no clausuradas de p. Si el punto p en que $\emptyset$ figura es el resultado de la aplicación de una EG, una EE, una EN-7 ó una EN-8 con la misma variable β_n o es el resultado de una serie de operaciones sobre un determinado conjunto de puntos de los cuales el primero resulta al aplicar una de dichas reglas con la misma variable β_n, increméntese el AP resultante con n-1 nuevos puntos. Introdúzcase $\alpha\psi\beta_1$, $\alpha\psi\beta_2$, ..., $\alpha\psi\beta_{n-1}$ respectivamente en los puntos $(m + 2)$, $(m + 3)$, ..., $(m + n)$. Las series s″ de dichos puntos son la serie s′ del punto $(m + 1)$.

EE. *Eliminación del cuantor existencial.* Si $\emptyset$ figura en un punto no prohibido p, alguna de cuyas claves no ha sido clausurada, de un laberinto parcial AP de m puntos y $\emptyset$ es el enunciado $(\exists\alpha)\psi$, y si β_n no es una constante prohibida ni figura en ψ, increméntese AP en un nuevo punto $(m + 1)$ y prohíbase p y la constante β_n. Introdúzcase $\alpha\psi\beta_n$ en el punto $(m + 1)$. La serie de claves s′ de $(m + 1)$ es la serie s de claves no clausuradas del punto p.

EN. *Eliminación de la negación.* Si $\emptyset$ figura en un punto no prohibido p, alguna de cuyas claves no ha sido clausurada, de un laberinto parcial AP de m puntos y $\emptyset$ es el enunciado —ψ, entonces

1: Si ψ es un enunciado atómico, prohíbase p.

2: Si ψ es el enunciado —χ, increméntese AP en un nuevo punto $(m + 1)$ y prohíbase p. Introdúzcase χ en el punto $(m + 1)$. La serie s′ de claves de $(m + 1)$ es la serie s de claves no clausuradas de p.

3: Si ψ es el enunciado χ & θ increméntese AP en dos nuevos puntos $(m + 1)$ y $(m + 2)$ y prohíbase p. Introdúzcase —χ en el punto $(m + 1)$ y —θ en el punto $(m + 2)$. Las series de claves s′ y s″ de $(m + 1)$ y $(m + 2)$ son, respectivamente, s$(m + 1)$ y s$(m + 2)$.

4: Si ψ es el enunciado χ v θ increméntese AP en dos nuevos puntos $(m + 1)$ y $(m + 2)$ y prohíbase p. Introdúzcase —χ en el punto $(m + 1)$ y —θ en el punto $(m + 2)$. Las series de claves s′ y s″ de $(m + 1)$ y $(m + 2)$ son la serie s de claves no clausuradas de p.

5: Si ψ es el enunciado $\chi \rightarrow \theta$ increméntese AP en dos nuevos puntos $(m + 1)$ y $(m + 2)$ y prohíbase p. Introdúzcase χ en el punto $(m + 1)$ y $-\theta$ en el punto $(m + 2)$. Las series s′ y s″ de $(m + 1)$ y $(m + 2)$ son la serie s de claves no clausuradas de p.

6: Si ψ es el enunciado $\chi \Leftrightarrow \theta$ increméntese AP en dos nuevos puntos $(m + 1)$ y $(m + 2)$ y prohíbase p. Introdúzcase $-(\chi \rightarrow \theta)$ en el punto $(m + 1)$ y $-(\theta \rightarrow \chi)$ en el punto $(m + 2)$. Las series de claves s′ y s″ de $(m + 1)$ y $(m + 2)$ son, respectivamente s$(m + 1)$ y s$(m + 2)$.

7: Si ψ es el enunciado $(\forall \alpha)\chi$ y si β_n no es una constante prohibida ni figura en χ increméntese AP en un nuevo punto $(m + 1)$ y prohíbanse p y la constante β_n. Introdúzcase $-\alpha\psi\beta_n$ en el punto $(m + 1)$. La serie de claves s′ de $(m + 1)$ es la serie s de claves no clausuradas de p.

8: Si ψ es el enunciado $(\exists \alpha)\chi$ increméntese AP en un nuevo punto $(m + 1)$. Introdúzcase $-\alpha\chi\beta_n$ en el punto $(m + 1)$ —β_n es la constante individual de que se está haciendo uso—. La serie de claves s′ de $(m + 1)$ es la serie s de claves no clausuradas de p. Si el punto p en que ϕ figura es el resultado de la aplicación de una EG, una EE, una EN-7 ó una EN-8 con la misma variable β_n o es el resultado de una serie de operaciones sobre un determinado conjunto de puntos de los cuales el primero resulta al aplicar una de dichas reglas con la misma variable β_n, increméntese el AP resultante con n-1 nuevos puntos. Introdúzcanse $-\alpha\chi\beta_1$, $-\alpha\chi\beta_2$, ..., $-\alpha\chi\beta_{n-1}$ respectivamente en los puntos $(m + 2)$, $(m + 3)$, ..., $(m + n)$. Las series s″ de dichos puntos son la serie s′ del punto $(m + 1)$.

C-1. *Regla primera de clausura.* Si en una ruta ρ determinada por una clave Δ no extendida existe algún par de puntos p_1 y p_2 tales que los enunciados ϕ_1 y ϕ_2 que los ocupan constituyen una pareja de Beth, clausúrese ρ. Es decir, si una ruta ρ contiene alguna pareja propia de Beth, clausúrese dicha ruta.

C-2. *Regla segunda de clausura.* Si todas las n rutas ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n de un laberinto A determinadas por la n claves no extendidas en él existentes se hallan clausuradas, clausúrese el laberinto A.