Experiencias Docentes

Competencias en límites: esquemas conceptuales y resolución de ejercicios

Competences in limits: conceptual frameworks and exercises solving

Daniel de la Barrera Mayoral

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen III, Número 1, pp. 019–048, ISSN 2174-0410
Recepción: 07 Oct'12; Aceptación: 12 Feb'13

1 de abril de 2013

Resumen

En este documento se considera, por un lado la capacidad de los alumnos de primero de Bachillerato (16-17-años) para la resolución de ejercicios de límites y, por otro lado las nociones que dichos alumnos han adquirido acerca de los límites en la unidad didáctica de límites y continuidad. Para ello se realiza un cuestionario a dos grupos de alumnos y se analizan las respuestas obtenidas.

Palabras Clave: enseñanza de las matemáticas, análisis funcional, enseñanza secundaria, dificultad en el aprendizaje, límite, continuidad, competencia.

Abstract

In this document, it is considered, on the one hand, the skills of the students of first year of Bachillerato (16- 17 years old) in solving exercises involving limits, and in the other hand, the notions which these students have acquired in the "Limits and continuity" didactic unit. For that purpose, a questionnaire is proposed to those pupils, and the answers are analyzed.

Keywords: mathematics education, functional analysis, secondary education, learning disabilities, limit, continuity, literacy[1].

[1] El término literacy ha sido obtenido del informe PISA 2003, en el cuál se denota scientific literacy la competencia científica, y del informe PISA 2009, en el que se denota por Reading literacy a la competencia en comprensión lectora.

1. Objetivo

El objetivo de esta investigación es comprobar si existe alguna relación entre las habilidades que tienen los alumnos en el campo de la ejecución de ejercicios rutinarios y los conceptos e ideas sobre las nociones de límite puntual o en el infinito de una función (finito o infinito) y en la noción de continuidad, que deben haber adquirido en la unidad didáctica correspondiente.

Para ello me marco los siguientes objetivos concretos:

(O1) Estudiar las competencias que ha adquirido el alumnado de 1º de Bachillerato en torno a los límites y la continuidad.

(O2) Estudiar si existe alguna relación entre la capacidad de ejecución correcta de ejercicios rutinarios y la competencia, por parte del alumnado, en la comprensión de las nociones de límite y continuidad.

2. Fundamentación Teórica. Estado de la Cuestión.

El currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) del Sistema Educativo español inicia al alumnado en el estudio de los límites de una sucesión en el cuarto curso de la E.S.O ([6]) y, posteriormente en primero de Bachillerato ([7]) se estudian los límites de funciones y la continuidad de funciones. Por tanto, es un tema de gran relevancia en el modelo de educación española actual.

Las competencias básicas de la educación Secundaria Obligatoria, contempladas en la L.O.E ([9]), proporcionan un interés para conocer si el actual modelo educativo logra los objetivos de adquisición de competencias. Para el presente trabajo destaco la competencia matemática, aunque se puede también referenciar la competencia lingüística.

La competencia matemática "implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos" ([9]). En este trabajo no considero el concepto límite como un concepto básico; sin embargo, este concepto está integrado por esta competencia si se considera como conocimiento y manejo de elementos matemáticos. De hecho considero, de manera similar a otros autores como Tall y Blázquez que es un concepto avanzado de las Matemáticas y que conlleva muchas dificultades a los estudiantes.

A partir de los años noventa, en la didáctica de las matemáticas se comienza a considerar la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos. ([1])

Se considera también para esta fundamentación la didáctica del análisis. Resulta interesante comprobar como uno de los grupos más importantes, en la actualidad, de la didáctica del análisis nació en un congreso a caballo entre psicología y didáctica de las matemáticas. Este grupo, nacido en 1985 en el seno del Psychology of Mathematics Education, consideró el estudio del llamado Pensamiento Matemático Avanzado. "En particular, tratan de profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal ([1]). Siguiendo a autores como Azcárate y Tall, se pueden establecer dos niveles en las matemáticas. Por un lado las matemáticas formales y los conceptos que los estudiantes (sean de un nivel educativo u otro) tienen sobre dicho concepto. En las matemáticas formales se incluyen las definiciones formales y las definiciones que cada persona tiene. En el segundo nivel, se considera la idea que se forma acerca de la definición del objeto matemático. En el presente trabajo, intentaré comprobar cómo el desarrollo de las primeras, no conllevan necesariamente el desarrollo satisfactorio de las segundas. En particular considero los objetos de límite de una función y continuidad de una función.

En el artículo de Azcárate y Camacho ([1]) traducen por esquema conceptual, la expresión original "concept image" que se utiliza para designar las ideas que los estudiantes generan a partir de las matemáticas formales.

Por otro lado Tall ([15]), propone que "el crecimiento matemático comienza con las percepciones de y acciones sobre un objeto en el entorno. El éxito en las percepciones deriva en representaciones visuo-espaciales. Las acciones sobre objetos utilizan representaciones simbólicas (que denominará procepts) que se utilizarán sobre todo en aritmética y álgebra." Estos procepts son el camino que un estudiante necesita realizar para pasar de un proceso o actividad que se puede considerar rutinaria al concepto que posteriormente utilizará para su posterior vida matemática.

En el campo concreto de la didáctica de las funciones se encuentra un interesante artículo de Tall ([14]). En dicho artículo se resumen varias investigaciones acerca de conceptos matemáticos avanzados como función, límite y demostración. Se establece además la diferencia entre las matemáticas escolares y las matemáticas universitarias.

Pone de manifiesto, además que cada generación tiene sus propios "problemas internos" que van pasando a posteriores generaciones. Ello conlleva ciertos conflictos para el alumnado, como la definición de función como objeto en el que cada x le corresponde una única y, entra en conflicto con que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ represente una función. En consecuencia, "cuando se confronta a un alumno por primera vez con definiciones matemáticas es", según Tall, "casi inevitable que solamente conozca un rango reducido de posibilidades que forma sus imágenes conceptuales en un modo que provocará un conflicto cognitivo en el futuro" ([14]). En estos casos se debe tratar de dar una imagen aproximada del concepto, para posteriormente ir encontrando mejores aproximaciones.

Por ello quiero comprobar si el enfoque actual consigue este objetivo de proponer una aproximación a la noción de límite y continuidad en una función.

En el mismo artículo, Tall propone las dificultades a las que se enfrenta el entendimiento del concepto de límite. Estas dificultades se mantienen en la actualidad, como se podrá comprobar a lo largo de este trabajo.

Aunque los límites aparecen de diferentes maneras en la literatura matemática, los diferentes casos (límite finito de una sucesión, límite puntual de una función, etcétera…) presentan dificultades comunes para los alumnos principiantes (p. 11, en [14]). Por ello he querido tratarlos en este trabajo como un único tipo de problemas.

En investigaciones posteriores sobre este problema, se pueden leer dos artículos de Blázquez ([3], [4]), así como su tesis doctoral ([2]). Las tres publicaciones versan sobre la noción de límite y las diferentes concepciones que tienen los estudiantes de secundaria y bachillerato sobre los límites.

En 2000, los autores proponen primero explicar el límite de sucesiones para posteriormente pasar al límite de funciones. ([3]). En el caso de este trabajo, la población que es objeto del estudio son alumnos de primero de bachillerato, que ya conocen los límites de sucesiones, y además recientemente han sido introducidos en los límites de funciones en un punto y límites en el infinito de una función.

En 2001, los mismos autores escriben otro artículo en el que proponen a los estudiantes un cuestionario sobre límites y posteriormente realizan unas entrevistas con los alumnos. Aquí realizan la hipótesis inicial de que el concepto límite acarrea una gran cantidad de dificultades intrínsecas a la noción de límite y que por tanto son independientes de la definición que se utilice ([4]).

En el año 2000, Espinoza y Azcárate, proponen una aproximación al problema a través de la Teoría Antropológica de la didáctica ([10]). La investigación en ese artículo se centra más en lo que el profesor es capaz de hacer para facilitar la comprensión por parte de los alumnos de los límites de funciones.

Otra noción muy íntimamente ligada a la noción de límite es la noción de infinito. Respecto a esta noción se pueden encontrar los trabajos de Sabrina Garbín. En su artículo conjunto con Carmen Azcárate, presentan "algunos resultados, reflexiones y aportaciones de un trabajo de investigación que se centra en identificar las inconsistencias y representar, categorizar y analizar las situaciones de coherencia que manifiestan los alumnos en relación con sus esquemas conceptuales asociados al concepto de infinito actual." (pág. 1, [12]). Por otro lado constatan que "en las preguntas en que está implicado un proceso de infinitud, los estudiantes no siempre responden teniendo en cuenta el proceso infinito" u ofrecen una solución "evadiendo la infinitud, respondiendo de manera finita." En el presente trabajo se observa también esta actitud frente a algunas actividades de esta índole.

En el citado artículo se propone un cuestionario con preguntas acerca del infinito (de hecho algunas son similares a las que se encontrarán en este trabajo) cuyo estudio se realiza desde un punto de vista cualitativo. A continuación cada alumno puede modificar con un bolígrafo de otro color las respuestas que ha dado, o incluso rellenar las preguntas que no ha contestado, pero justificando las respuestas. Por último se realizaron algunas entrevistas a los alumnos para comprobar las conexiones que han formado a la hora de contestar las cuestiones propuestas y conocer los esquemas mentales de los alumnos.

En [11] se proponen motivos para la introducción de la geometría fractal en el currículo de educación secundaria y se propone como una de las actividades motivadoras el conjunto de Cantor. Así, se pone de manifiesto la necesidad de una mayor relación entre los distintos campos de la Matemática a la hora de presentárselos a los estudiantes en el aula.

3. Metodología

Propongo el uso de la siguiente metodología para la consecución de los objetivos citados en la sección 1 de este trabajo.

Para el objetivo (O1) se ha entregado el cuestionario que se adjunta en el apartado anexos a dos grupos de alumnos de 1º de Bachillerato para que lo completen. Uno de los grupos es del Bachillerato de Ciencias Naturales y el otro de Bachillerato de Ciencias Sociales.

La población considerada es de 60 estudiantes de Bachillerato de Ciencias (Bachillerato Ciencias de la Naturaleza) y 20 estudiantes de Bachillerato de Sociales (Bachillerato de Ciencias Sociales).

En lo sucesivo el uso de Ciencias y Sociales se referirá respectivamente al grupo de Bachillerato de Ciencias Naturales y al grupo de Bachillerato en la rama de Ciencias Sociales.

Las respuestas a las preguntas del cuestionario tendrán un carácter cualitativo, y serán clasificadas atendiendo a criterios que detallo en la sección análisis de resultados. Posteriormente en la sección 4 se puede leer un estudio de los resultados obtenidos.

Para el objetivo (O2) se entrega la hoja de ejercicios rutinarios sobre límites que se adjunta en el anexo del presente documento, para su resolución por parte del alumnado. Para el objetivo (O2) se compararán los resultados obtenidos en el cuestionario utilizado en el objetivo (O1) con los obtenidos en esta tanda de ejercicios, para constatar si existe alguna relación entre la ejecución rutinaria de ejercicios de límites y la comprensión de las nociones de límite y continuidad.

Para ello consideraré las variables cualitativas cuestionario y ejercicios. En ambos casos consideraré los siguientes grados competenciales: grado muy alto de comprensión / ejecución de ejercicios, grado alto, grado bajo, grado muy bajo. Posteriormente realizaré una comparativa de los resultados de ambas variables en cada uno de los estudiantes del grupo Naturales. Esta parte del estudio solamente se realiza con el grupo de Naturales, debido a que en el grupo de Sociales la unidad didáctica correspondiente se estudió seis meses antes de la realización de esta experiencia.

El autor del presente trabajo quiere destacar que las posibles conclusiones de esta investigación no tendrán una validez universal, debido a que se realizan con un único grupo de estudiantes y bajo unas condiciones muy particulares. Es decir, los resultados obtenidos serán difícilmente extrapolables a otros centros / grupos de alumnos sin el desarrollo de esta u otra investigación similar.

3.1 Pertinencia de las cuestiones planteadas en el cuestionario

Añado este apartado debido a que parte del alumnado consideraba que varias de las preguntas eran iguales. Dedicaré por ello un par de líneas a cada pregunta para justificar desde un punto de vista matemático – didáctico el por qué de esta aparente repetición.

En la primera pregunta (*¿Qué entiendes por límite?*) trato de obtener los posibles esquemas mentales respecto al concepto de límite. Considero muy posible que la respuesta sea muy similar a la explicación de los profesores en los diferentes grupos.

En la segunda pregunta (*¿Qué quiere decir qué* $\lim_{x\to 4} f(x) = 5$ *?*) quiero comprobar el grado de competencia a la hora de expresar verbalmente el concepto de límite puntual finito de una función. A continuación en la tercera pregunta (*¿Qué puedes decir gráficamente de una función que cumple* $\lim_{x\to 7} f(x) = 2$ *?*) busco esa misma idea, pero en esta ocasión gráficamente.

En la cuarta (*¿Qué quiere decir qué* $\lim_{x\to 4} f(x) = \infty$ *?*) pregunta quiero ver el entendimiento de dos conceptos. Por un lado el concepto de límite puntual infinito y por otro lado el propio concepto de infinito. Con la quinta pregunta (*¿Qué puedes decir de una gráfica que cumple qué* $\lim_{x\to 4} f(x) = \infty$ *?*) pretendo comprobar el entendimiento de los mismos conceptos pero desde un punto de vista gráfico.

En las preguntas 2 y 4 se esperan respuestas que tengan que ver con sustituir valores en la función y que la solución sea un número o infinito, respectivamente. En este caso es posible que muchos estudiantes consideren el infinito como un número.

De manera análoga, la pregunta seis (*¿Qué quiere decir qué* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ *?*) pretende conocer las competencias adquiridas en torno al concepto de infinito y límite (finito) en el infinito de una función. La pregunta 7 (*¿Cómo se comporta una función que cumpla qué* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$ *?*) es similar pero busco una respuesta gráfica.

He considerado importante realizar la separación entre explicación verbal y gráfica de los conceptos debido a que existen dos visiones principales: analítica y geométrica.

La pregunta 8 (*¿Qué quiere decir qué* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *?*) pretende conocer si el alumnado es capaz de diferenciar el caso 6 del caso en el que el límite sea infinito en el infinito.

La pregunta nueve (*¿Qué quiere decir que una función sea continua?*) trata de comprobar la capacidad para reconocer funciones continuas. Para ello se pide que definan con sus propias palabras el término continuidad de una función.

En la pregunta diez (*¿Qué podemos decir de la gráfica de una función que sea continua en* $x = x_0$ *?*) intento comprobar si entiende que una función sea continua en un punto.

En la pregunta 11 (*¿Qué condiciones debe cumplir una función para ser continua en* $x = x_0$ *?*) se pide que escriban qué condiciones teóricas cumple una función que sea continua en un punto.

En la pregunta 12 (*Representa una función que sea continua.*), se pide la representación de una gráfica continua para comprobar el grado de dificultad que los estudiantes utilizan a la hora de representar este tipo de funciones. Se espera que la mayor parte del alumnado emplee para responder a esta cuestión funciones lineales o cuadráticas, y en cualquier caso derivables.

En las preguntas 13 (*Representa una función con una discontinuidad de salto finito.*) y 14 (*Representa una función con una discontinuidad de salto infinito.*) se comprueba la competencia en la adquisición de los conceptos discontinuidad de salto finito y discontinuidad de salto infinito. Se tratará de diferenciar esta última de la discontinuidad esencial.

Las preguntas de 1 a la 14 tienen una relación directa con las competencias que los alumnos deberían haber adquirido en la realización de la unidad didáctica Límites y Continuidad.

Sin embargo, las siguientes preguntas (de la 15 a 17) tienen un grado de dificultad añadido que se detalla a continuación:

En la pregunta 15 (*¿Cuál es el límite de la siguiente sucesión: triangulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, heptágono regular,…? ¿Por qué?*) se pregunta por el posible límite de una sucesión de figuras planas regulares. Considero el círculo como "polígono regular de infinitos lados" debido a que si inscribimos los polígonos en sus respectivas circunferencias circunscritas, la forma y longitud / perímetro, se aproximan a la de la circunferencia.

La pregunta 16 (*Tomamos el intervalo* [0, 1]. *Lo dividimos en tres partes iguales, quitamos el intervalo central. En cada uno de los intervalos que tenemos repetimos la misma operación: dividimos en tres subintervalos y quitamos el central. Si repetimos indefinidamente la operación, ¿qué obtenemos?*) es una aproximación al conjunto de Cantor. Se pretende comprobar si los estudiantes tienen la capacidad de construir conjuntos a partir de sus definiciones y consiguen abstraer al límite.

El problema 17 (*Mezclamos un litro de pintura blanca con un litro de pintura azul. ¿Qué proporción de pintura blanca tendremos en la mezcla? Si añadimos, otro litro de pintura azul, ¿qué proporción de pintura blanca tendremos? Si añadimos, 40 litros más de pintura azul, ¿qué proporción de pintura blanca tendremos? Si seguimos añadiendo pintura azul, ¿a qué tiende la proporción de pintura blanca en la mezcla? ¿Habrá algún momento en el que la proporción de pintura blanca sea exactamente cero?*) trata sobre proporciones, que es un tema ampliamente estudiado a lo largo de la Educación Secundaria, y se quiere comprobar las posibles conexiones que los alumnos generan entre estos dos temas.

4. Análisis e interpretación de los resultados obtenidos

En este apartado se encuentra el análisis de los datos recogidos. El análisis se realizará de la siguiente manera. Primero un análisis de las respuestas obtenidas en el cuestionario del apartado *3. Metodología*. Después se realiza un análisis del objetivo (O1). Posteriormente del objetivo (O2).

El desarrollo de la unidad didáctica fue el siguiente: En una primera sesión se explicó de manera gráfica qué es el límite de una función. Posteriormente se explicó como calcular límites de funciones que están definidas sobre los reales y existen en el punto en que se pretende hallar el límite. Posteriormente se comenzaron a tratar los diferentes tipos de indeterminaciones y como resolverlos. En ningún momento se habló de la definición formal, ya que los estudiantes no están familiarizados con los términos para todo, existe y otros formalismos.

Además en ninguno de los casos hemos observado respuestas que incluyan expresiones como estar "suficientemente cerca".

4.1. Análisis de las respuestas del cuestionario

Como he observado anteriormente, en el grupo de Sociales ha transcurrido un tiempo de seis meses entre la unidad didáctica y la realización del cuestionario. Por ello el porcentaje de respuestas en blanco es siempre superior al obtenido en el grupo de Naturales en las preguntas relacionadas con los límites. En las preguntas directamente relacionadas con la continuidad estas diferencias tienden a desaparecer. Además al haber transcurrido tanto tiempo, no han realizado los límites para el objetivo (O2).

En el análisis de las preguntas se siguen unas clasificaciones similares a las que dan Blázquez ([2]) y Garbín ([12], [13]).

PREGUNTA 1 (*¿Qué entiendes por límite?*).

En esta pregunta clasifico las respuestas en:

- Sin respuesta.
- Respuestas en las que aparece la expresión **acercar sin tocar** (o similares)
- Respuestas en que no aparece la expresión sin alcanzar (o similares).
- Respuestas que no tienen sentido desde el punto de vista didáctico-matemático.

Los resultados aparecen en la Tabla 1.

Tabla 1. Pregunta 1 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	3	5	8
SIN SENTIDO	7	2	9
ACERCAR SIN TOCAR	16	4	20
APROXIMACIÓN	34	9	43

Como ya observan Blázquez ([3], [4]) y Garbín ([12]), existen diferencias entre estudiantes que hablan de "sin tocar", o los que hablan de que "la función no supera". En ambos casos solamente consideran funciones monótonas en sus argumentos.

Entre estas respuestas destaca una en la que el alumno habla de imagen de una función y de dominio. Sin embargo, este tipo de casos es muy extraño. Otra estudiante escribe ideas sobre una aproximación a un número real. Ello lleva a pensar que no tiene nada claro el concepto de límite.

Como se puede observar en la tabla 1, la mayor parte de los alumnos tiene el concepto de límite adquirido como una aproximación. Como ya destacaban en sus trabajos autores como

Blázquez, los estudiantes tienen la idea de que un límite no puede ser alcanzable ni superable, considerando solamente funciones monótonas.

PREGUNTA 2 (*¿Qué quiere decir que* $\lim_{x\to 4} f(x) = 5$ *?*).

En esta pregunta considero las siguientes categorías:

- Sin respuesta
- Respuestas parecidas a "si la x tiende a 4, la y tiende a 5" (tendencia).
- Respuestas similares a "si sustituyes la x por 4 la y te queda 5" (sustitución).
- Respuestas "tiende a, pero sin tocar" (tendencia sin contacto).
- Ejemplos de funciones que cumplen el límite (ejemplo).
- Respuesta sin sentido.

Los resultados se recogen en la Tabla 2.

Tabla 2. Pregunta 2 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	2	5	7
SIN SENTIDO	12	3	15
TENDENCIA	17	3	20
TENDENCIA SIN CONTACTO	5	1	6
EJEMPLO	2	1	3
SUSTITUCION	22	7	29

La respuesta "tendencia" implica un mayor grado de competencia en la comprensión del concepto límite que la respuesta "sustitución" debido a que la segunda no se tiene en cuenta que la función puede no existir en el punto $x = 4$.

En esta pregunta algunos alumnos escriben una función que cumple la igualdad del enunciado como por ejemplo $f(x) = x+1$.

En el grupo de Naturales se observa como la mitad del alumnado da una respuesta con sentido, utiliza una respuesta de "tendencia" (con o sin contacto) y la otra mitad de sustitución. Esto puede ser debido a que en la resolución de los límites el profesor lo primero que dice es que antes que nada hay que sustituir la x en la fórmula y ver si resulta un valor.

En el grupo de Sociales hay un porcentaje superior en el grupo que da una respuesta de "sustitución" respecto al grupo que da una respuesta de "tendencia".

PREGUNTA 3 (*¿Qué puedes decir gráficamente de una función que cumple* $\lim_{x \to 7} f(x) = 2$ *?*).

En esta pregunta, considero las siguientes respuestas:

- Sin respuesta.
- Representación del punto (7,2) pero ninguna función. (Punto)
- Función que pasa por el (7,2). (Función)
- Que es una función de salto finito/infinito. (Discontinuidad)
- Respuesta sin sentido, respuesta "que es continua", o respuestas no gráficas. (Sin sentido)

Las respuestas de cada tipo vienen recogidas en la Tabla 3.

Tabla 3. Pregunta 3 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	16	11	27
PUNTO	6	1	7
FUNCIÓN	11	2	13
DISCONTINUIDAD	5	1	6
SIN SENTIDO	22	5	27

Debido al alto número de respuestas en blanco del grupo de Sociales no se puede extraer ninguna conclusión sobre este grupo.

En el grupo de Naturales se observa que la mayor parte de los estudiantes que están en la categoría "sin sentido" repiten la respuesta verbal de la pregunta 2, cambiando los datos correspondientes. Ello quiere poder decir que no tienen la competencia de representar funciones que cumplan que el límite puntual de dicha función en un punto sea un número real.

Por otro lado se observa que una porción importante del grupo Naturales responde en el grupo de discontinuidad; pero, ninguno advierte la posibilidad de que sea una discontinuidad evitable.

PREGUNTA 4 (*¿Qué quiere decir qué* $\lim_{x\to 4} f(x) = \infty$ *?*).

En esta cuestión se puede constatar cómo es un error frecuente considerar el infinito como un número más. Se han recogido respuestas bastante similares a la pregunta 2. Categorizo las respuestas de la siguiente manera:

- Sin respuesta.
- Respuestas que incluyen tiende o se aproxima. (Tendencia)
- Si la $x = 4$, entonces la $y = \infty$. (Sustitución)
- Es una indeterminación. (Indeterminación)
- No tiene límite (sin límite)
- Respuesta sin sentido. (Sin sentido)

Las respuestas de cada tipo están recogidas en la Tabla 4.

Tabla 4. Pregunta 4 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	9	9	18
SIN SENTIDO	9	3	12
TENDENCIA	16	3	19
SUSTITUCIÓN	16	3	19
INDETERMINACIÓN	4	0	4
SIN LÍMITE	6	2	8

Destaca la respuesta de una estudiante que sí considera el infinito como "un número que no se puede alcanzar".

Como se puede observar en la tabla 4, la mayor parte del alumnado de Sociales no responde o lo hace con repuestas que no tienen sentido (puntos de corte).

En el grupo de Naturales, se tiene de nuevo la mitad de los estudiantes que consideran el límite como una mera sustitución, sin considerar que la función podría no estar definida en el punto, y la otra mitad dan respuestas de tendencia.

La mayor parte de la población identifica este límite como una indeterminación pero sin decir nada acerca de las características que pueden tener las funciones que cumplen la condición del enunciado.

PREGUNTA 5 (*¿Qué puedes decir de una gráfica que cumple qué* $\text{lím}_{x\to 4} f(x) = \infty$ *?*).

En esta pregunta se considera como respuesta óptima la representación de una gráfica con una asíntota vertical en $x = 4$. Se clasifican las respuestas en las siguientes categorías:

- Sin respuesta.
- Respuestas verbales similares a las obtenidas en la pregunta 4 (Verbal) En este apartado incluimos respuestas como "es discontinua".
- Respuesta sin sentido. (Sin sentido)
- Respuesta gráfica correcta (Gráfica)

Las respuestas están recogidas en la Tabla 5.

Tabla 5. Pregunta 5 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	18	11	29
SIN SENTIDO	16	6	22
VERBAL	25	1	26
GRÁFICA	1	2	3

Destaca, negativamente, el hecho de la aparición de la respuesta "es continua" en varios estudiantes del grupo de Naturales.

En el grupo de Naturales, dos estudiantes representan la gráfica de la recta $y = 4$ con un agujero en $x = 4$. Esta respuesta ha sido catalogada en la categoría sin sentido.

En esta pregunta la mayor parte del alumnado da una respuesta verbal, dejando de manifiesto que aún no se ha adquirido las competencias necesarias respecto a los límites y al infinito que son necesarias para poder resolver a esta cuestión de una manera satisfactoria.

PREGUNTA 6 (*¿Qué quiere decir qué* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ *?*).

Clasifico las respuestas en las siguientes respuestas-tipo:

- Sin respuesta.
- Respuestas que incluyen tiende o se aproxima. (Tendencia)
- Si la $x = \infty$, entonces... (Sustitución)
- Es una indeterminación. (Indeterminación)
- No tiene límite (sin límite)
- Respuesta sin sentido. (Sin sentido)

Tabla 6. Pregunta 6 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	17	9	26
SIN SENTIDO	1	3	4
TENDENCIA	19	5	24
SUSTITUCIÓN	16	3	19
INDETERMINACIÓN	7	0	7

Una estudiante sustituye el valor ∞, pero a la vez dice que no existe. Ello demuestra inconsistencias en la adquisición del concepto límite, ya que el concepto de infinito parece estar bien adquirido debido a que reconoce que no existe.

En esta pregunta, sin embargo, se puede observar como la mayor parte del alumnado no tiene adquirido un grado de competencia suficiente en el uso del infinito, ya que una cantidad significativa del grupo utiliza expresiones como "cuando x tiende a ∞". Otra cantidad significativa trata de sustituir el valor de infinito en la función.

También reaparecen respuestas que dan a entender que los estudiantes consideran que un límite no puede ser alcanzado.

En el grupo de Sociales una estudiante parece no tener la competencia suficiente respecto a las funciones debido a que dice que una función tiene infinitos valores.

PREGUNTA 7 (*¿Cómo se comporta una función que cumpla qué* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$ *?*).

En esta pregunta considero las siguientes categorías de respuestas:

- Sin respuesta.
- Respuesta verbal (Verbal)
- Respuestas sobre discontinuidades o continuidad. (Continuidad)
- Respuestas sin sentido, diferentes a las de continuidad (Sin sentido)
- Respuesta gráfica correcta (Gráfica)
- Ejemplo analítico particular.(Ejemplo)

Para ver los resultados consultar Tabla 7.

Tabla 7. Pregunta 7 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	29	9	38
SIN SENTIDO	3	3	6
VERBAL	13	7	20
CONTINUIDAD	9	0	9
GRÁFICA	5	0	5
EJEMPLO	1	1	2

En esta pregunta la inmensa mayoría de los estudiantes deja la pregunta en blanco o da una respuesta verbal que mantiene los argumentos que se encontraban ya en respuestas anteriores.

Del grupo restante la mayor parte escribe que la función es continua / discontinua. Ello indica que tienen ciertas nociones adquiridas, pero no saben relacionarlas de una manera correcta. Es decir, saben que los límites y la continuidad están relacionados por unas "normas" que ellos no tienen interiorizadas.

Un grupo reducido da una respuesta gráfica. Es destacable que todos consideran funciones constantes o monótonas crecientes, dejando de manifiesto una vez más que los estudiantes no consideran que un límite sea superable o alcanzable.

PREGUNTA 8 (*¿Qué quiere decir qué* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *?*).

En esta pregunta se admiten tanto respuestas verbales como respuestas gráficas. Las respuestas son clasificadas en los siguientes tipos:

- Sin respuesta.
- Sustitución del valor en la función. (Sustitución)
- Tendencia de las variables dependiente e independiente (Tendencia)
- Ejemplo concreto (Ejemplo)
- Respuestas sin sentido (Sin sentido)

Los resultados están recogidos en la Tabla 8.

Tabla 8. Pregunta 8 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	19	10	29
SUSTITUCIÓN	17	4	21
TENDENCIA	13	2	15
EJEMPLO	4	1	5
SIN SENTIDO	7	3	10

Se observa como la mayor parte del alumnado que contesta lo hace en términos de sustitución. Por ello se deduce que se considera el infinito como un número real al que se le pueden aplicar unas operaciones perfectamente definidas. Sin embargo, algunos estudiantes consideran que no puede existir una función que cumpla dichas condiciones.

PREGUNTA 9 (*¿Qué quiere decir que una función sea continua?*).

Casi todos los estudiantes responden que una función continua es aquélla que se puede representar sin levantar el lápiz del papel. No es de extrañar esta definición ya que es la definición que se suele dar en las aulas del primer curso de Bachillerato en cualquiera de las especialidades.

Un estudiante confundió continua con constante y respondió de manera correcta a esta última noción. Otro añadió las condiciones que debe cumplir una función para que sea continua en un punto.

Un pequeño grupo utiliza expresiones como “no se para” o “no se corta” para referirse a la continuidad.

PREGUNTA 10 (*¿Qué podemos decir de la gráfica de una función que sea continua en* $x = x_0$ *?*).

Clasifico las respuestas en las siguientes categorías (Para ver las respuestas de cada tipo consultar la Tabla 9):

- Sin respuesta.
- Es una recta (Recta).
- No se levanta el lápiz del papel en ese punto. (Particularización)
- Respuestas sin conexión aparente con el enunciado de la pregunta (Sin sentido).
- Condiciones teóricas / existencia del límite.

Tabla 9. Pregunta 10 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	20	14	34
RECTA	6	2	8
PARTICULARIZACIÓN	11	2	13
SIN SENTIDO	14	2	16
CONDICIONES TEÓRICAS	9	0	9

Varios estudiantes responden "que es una recta". Esto denota la dificultad que tienen estos para pensar en funciones continuas que no sean polinomios de grado bajo.

Una persona responde que es continua en el origen al no estar familiarizada con la notación x=x_0 para denotar puntos. Por ello propongo una modificación de la pregunta para posibles repeticiones del cuestionario.

Otros identifican $x = x_0$ con un intervalo al responder que la función es continua en el intervalo.

Un estudiante de Naturales escribe la definición de derivada para responder a esta pregunta. Esta respuesta puede deberse a que en la semana que se rellenó el cuestionario, el alumnado estaba estudiando la introducción a las derivadas en clase y en dicha definición aparece un límite.

Se observa que ningún estudiante del grupo de Sociales da una respuesta con las condiciones teóricas, debido a, con casi total seguridad, que el aprendizaje no ha sido significativo; es decir, no ha dejado "huella" en el alumnado.

También se puede constatar que los estudiantes que ponen algún tipo de condición teórica en sus respuestas no escriben que la función debe valer lo mismo que el límite o no ponen que debe existir el límite.

PREGUNTA 11 (*¿Qué condiciones debe cumplir una función para ser continua en* $x = x_0$ *?*).

Clasifico las respuestas en los siguientes tipos (Para ver las respuestas de cada tipo consultar la Tabla 10):

- Sin respuesta.
- Respuestas sin conexión aparente con el enunciado de la pregunta (Sin sentido).
- Condiciones teóricas / existencia del límite.
- Repuestas en las que se entiende que los límites laterales existen y coinciden, pero no incluyen nociones acerca del valor de la función en el punto (Límites laterales).
- Respuestas en las que se tiene en cuenta el valor de la función (o la existencia de la misma) pero no se hace referencia a los límites laterales de la función en el punto (Valor de función).

Tabla 10. Pregunta 11 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	23	12	35
SIN SENTIDO	8	4	12
CONDICIONES TEÓRICAS	12	1	13
LÍMITES LATERALES	9	1	10
VALOR DE FUNCIÓN	8	2	10

Aunque la mayor parte de los estudiantes que contestan han dado una respuesta que, en mayor o menor grado, incluyen las condiciones teóricas pedidas. En esta pregunta existen respuestas como "que x sea igual a x_0". Por ello añadimos una modificación a la pregunta 7 en el apartado correspondiente a modificaciones del cuestionario.

En las respuestas de condiciones teóricas se encuentran dos tipos de respuestas: aquellos estudiantes que han adquirido un mayor grado de competencia en el uso de la terminología y notación en torno a los límites, utilizando términos como límites laterales y otro grupo que se expresa con frase cómo "toman el miso valor que la función".

En esta pregunta se han encontrado algunos ejemplos de funciones continuas, pero al no haber añadido un punto particular, no se ha considerado la posible categoría "ejemplo". Estas respuestas han sido consideradas en la clasificación sin sentido.

<u>PREGUNTA 12 (*Representa una función que sea continua.*).</u>

En esta pregunta no se ha determinado el dominio de la función. Por ello, se encuentran gráficas cuyo dominio son todos los reales, otras gráficas solamente los reales positivos.

Los 80 estudiantes representan una función continua. La inmensa mayoría representan la gráfica de un polinomio de grado menor o igual que 2. Tres de ellos representan el logaritmo neperiano. Solamente uno representa una función que no es derivable.

Se puede pensar, por tanto, que el concepto de función continua es una noción en la que resulta relativamente sencillo alcanzar un grado competencial satisfactorio.

<u>PREGUNTA 13 (*Representa una función con una discontinuidad de salto finito.*).</u>

En esta pregunta se encuentran los siguientes tipos de respuestas:

- Respuesta en blanco.
- Gráfica de una función con una discontinuidad de salto finito. (Salto finito).
- Gráfica de una función continua (Continua).
- Gráfica de una función con una discontinuidad evitable (Evitable)
- Grafica de una función cuyo dominio es el conjunto de los reales menos un intervalo (Intervalo)
- Gráfica de una función con una discontinuidad de salto infinito (Infinito)

Tabla 11. Pregunta 13 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	3	0	3
SALTO FINITO	31	11	42

Tabla 11. Pregunta 13 del cuestionario (cont.).

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
CONTINUA	1	1	2
EVITABLE	16	0	16
INTERVALO	9	7	16
INFINITO	0	1	1

Se observa como más de la mitad del alumnado es capaz de representar una función que tenga una discontinuidad de salto finito. Sin embargo, hay un porcentaje relativamente alto que confunde este tipo de discontinuidad con las discontinuidades evitables. Existe un tercer grupo amplio que no tiene la habilidad de distinguir una discontinuidad de un intervalo en el que la función no está definida.

PREGUNTA 14 (*Representa una función con una discontinuidad de salto infinito*).

Considero las mismas categorías que en la pregunta anterior, cambiando la respuesta evitable por la esencial, que es considerar una función con una discontinuidad de tipo esencial.

Tabla 12. Pregunta 14 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	10	5	15
SALTO FINITO	4	2	6
CONTINUA	3	0	3
ESENCIAL	0	1	1
INTERVALO	17	7	24
INFINITO	26	5	31

Se comprueba que la mitad de los estudiantes que contestan, representan, efectivamente, la gráfica de una función con una discontinuidad de salto infinito.

El estudiante que en la pregunta anterior representó una gráfica de una función con una discontinuidad de salto infinito, en esta ocasión representó una con un salto finito.

PREGUNTA 15.

Esta pregunta, al ser más compleja y abierta, recoge una mayor variedad de respuestas. Trato de clasificarlas en las siguientes categorías:

- Sin respuesta.
- El círculo /la circunferencia con explicación. (completa)
- El círculo / la circunferencia pero sin dar una explicación. (Parcial)
- Polígono de infinitos lados. (Polígono)
- "No puede haber límites de figuras geométricas" (Geométricas)
- Infinito.
- Otro tipo de respuestas (Sin sentido)
- Octógono regular.

Tabla 13. Pregunta 15 del cuestionario.

	NATURALES	SOCIALES	TOTALES
SIN RESPUESTA	16	14	30
COMPLETA	11	0	11
PARCIAL	4	0	4
POLÍGONO	3	0	3
GEOMÉTRICAS	2	0	2
INFINITO	9	0	9
SIN SENTIDO	15	2	17
OCTÓGONO	0	4	4

En este caso, se han recogido expresiones como $\text{lím}_{x\to\infty} x$ porque hay infinitos lados, o respuestas similares. Esto se puede ver como un intento de transformar el enunciado del problema en una función real de variable real. Sin embargo, en ninguno de los casos se obtiene un resultado que se pueda considerar adecuado.

Una estudiante de Naturales ofrece la siguiente respuesta: "Un círculo, porque cuantos más lados tiene un polígono más se asemeja a éste, y un polígono de infinitos lados sería un círculo, porque los lados serían los infinitos puntos que forman el círculo". Aparte del pequeño error de confundir círculo con circunferencia, demuestra un alto grado de competencia en varios campos de las matemáticas; en particular, en los límites y en la geometría plana. Además es capaz de identificar los lados de ese "límite" con los puntos de una circunferencia.

Otro estudiante defiende que la respuesta es un círculo, ya que "llegará un momento que sean infinitos los lados de los polígonos, más o menos un círculo". En esta respuesta se encuentra de nuevo la idea de límite como una aproximación, en este caso, de figuras geométricas a otra dada.

Otro estudiante de Naturales justifica que dicho límite sería un "círculo, porque los vértices de los polígonos regulares están a la misma distancia del centro. Así que si hay infinitos lados todos los puntos de la figura equidistarán del centro, ya que los lados serían puntos al ser infinitos".

La respuesta octógono regular denota una baja competencia en la adquisición de nociones como sucesión y límite de una sucesión, ya que solamente consideran el siguiente elemento de la sucesión y le toman como límite.

PREGUNTA 16.

Esta pregunta, sin duda la más compleja para los alumnos por el grado de abstracción necesario, tiene una gran variedad de respuestas diferentes. Por tanto, presento a continuación las más interesantes desde el punto de vista del trabajo. Las partes entre comillas son las respuestas literales de los estudiantes.

RESPUESTA 1

$$\text{“}\begin{cases} x < (0,1) \\ x = (0,1) \\ x > (0,1) \end{cases} \text{Una función de salto infinito.”}$$

En esta respuesta existe un afán por responder la pregunta mediante la búsqueda de una función. Es evidente que esta respuesta no tiene corrección suficiente para ser una función, ya que iguala la x a un intervalo, o no da un valor a la función.

REPUESTA 2

"Intervalos muy pequeños que se acercan a cero."

En esta respuesta se observa un proceso de límite que es correcto, ya que el alumno entiende que se tienen intervalos de longitud cada vez más pequeña, pero no considera la infinitud de intervalos que tiene en cada paso del proceso.

RESPUESTA 3

"Pues, que se hace pequeño y tiende a 1 y a 0."

Esta estudiante también muestra procesos correctos, pero nuevamente no considera todos los intervalos, aunque si considera que alguno de estos se puede aproximar a 1.

RESPUESTA 4

"Infinitos intervalos divididos en los intervalos $\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]\cup\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$"

Este estudiante comienza el proceso y contempla que hay que seguir realizando divisiones, pero no considera que en el límite, no habrá intervalos, habrá puntos que pertenezcan o no al límite.

RESPUESTA 5

"Al final obtendremos un intervalo demasiado pequeño, de microtamaño, y habrá un momento en el que no se puedan dividir más los intervalos porque la distancia del 0 al 1 no es infinita"

Este estudiante, que cursa la optativa de dibujo técnico, considera que llegará un momento en el que los intervalos serán indivisibles. Esta visión se puede deber a que el alumno se imagina una división con regla y compás y naturalmente los útiles de dibujo no van a poder dividir intervalos muy pequeños.

RESPUESTA 6

"Quedan infinitos intervalos muy pequeños. Al final quedan puntos (de longitud cero)"

En esta ocasión, el proceso de límites se realiza de una manera correcta, al identificar los puntos como intervalos cuya longitud es cero.

RESPUESTA 7

"Se obtiene $\left[0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right]$"

En esta respuesta solamente se considera el primer paso y se propone como solución final. Por tanto, se constata que este estudiante no ha entendido el problema como un problema en el que hay que considerar límites, si no como una sencilla operación que se realiza una única vez.

RESPUESTA 8

"Obtenemos 0. Como 0 dividido por 3 es 0 y 1 dividido entre 3 en 0.33, se aproxima a 0".

Esta estudiante solamente considera un intervalo de los dos que nos quedan en cada iteración. Por ello únicamente tendrá un punto, que efectivamente será el 0.

RESPUESTA 9

"Que se acerca al valor 0,5 cada vez más y más."

Esta estudiante considera otro problema diferente, en el que en vez de eliminar el intervalo central, se queda con el central y elimina los laterales.

RESPUESTA 10

"Que al final nos quedamos sin intervalo que dividir"

Esta estudiante considera el límite de las iteraciones como el final, lo cual nos dice que tiene un buen grado de competencia en la noción límite. Además dado que la alumna es del grupo de Sociales, en este caso es una competencia consolidada.

PREGUNTA 17.

En esta pregunta se observa que la mayor parte de las respuestas son correctas. Sin embargo, se encuentra alguna respuesta que dice que la proporción de pintura será 0 en el infinito, que nuevamente proporciona la idea de una sustitución en una función. Otras justificaciones dicen que la pintura blanca siempre estará ahí.

Por tanto, se siguen encontrando los mismos errores de entender el límite como una mera sustitución y como una cota que no se puede alcanzar.

4.2 Análisis del Objetivo (O1)

Para comprobar las competencias adquiridas, contemplo, por un lado las competencias demostradas en el cuestionario (variable cuestionario), y por otro lado en los ejercicios entregados (variable ejercicios).

En cuánto los cuestionarios considero las siguientes graduaciones:

- MUY ALTO: Más de 14 respuestas que se puedan considerar correctas desde un punto de vista matemático-didáctico.
- ALTO: Entre 9 y 13 respuestas que tengan sentido matemático didáctico.
- BAJO: Entre 6 y 8 respuestas.
- MUY BAJO: Menos de 6 respuestas.

Los datos están recogidos en la Tabla 14.

Tabla 14. Competencias en cuestionario.

GRADO DE COMPETENCIA EN CUESTIONARIO	ESTUDIANTES
MUY ALTO	4
ALTO	13

Tabla 14. Competencias en cuestionario (cont.).

GRADO DE COMPETENCIA EN CUESTIONARIO	ESTUDIANTES
BAJO	41
MUY BAJO	22

Se observa como en este caso se consideran a los 80 alumnos de la muestra, y de ellos 63 (más del 75%) tienen un grado de competencia bajo o muy bajo en los conceptos asociados a límites y continuidad.

Para la variable de los ejercicios se han considerado los siguientes grados:

- MUY ALTO: Más de 10 límites correctamente resueltos.
- ALTO: Entre 8 y 10 límites correctamente resueltos.
- BAJO: Entre 4 y 7 límites correctamente resueltos.
- MUY BAJO: Menos de 4 límites correctos.

Tabla 15. Capacidad de resolución de ejercicios rutinarios

CAPACIDAD DE RESOLUCION DE EJERCICIOS	ESTUDIANTES
MUY ALTO	37
ALTO	15
BAJO	4
MUY BAJO	4

Si se observa la tabla 15, se ve que 52 de los 60 estudiantes tienen un alto grado de competencia en la resolución mecánica de límites. Esto representa al 86% del alumnado de Naturales que ha realizado los ejercicios.

4.3. Análisis del Objetivo (O2)

Se ha considerado para este objetivo las variables y grados considerados en la sección metodología. Incluyo los datos en la tabla 16. Se recuerda al lector que para este objetivo únicamente se considera el alumnado de Naturales.

Los grados de la variable cuestionario tienen color rojo y los de la variable ejercicio tienen color verde

Tabla 16. Comparativa entre ejercicios y cuestionario

EJERCICIOS CUESTIONARIO	MUY ALTO	ALTO	BAJO	MUY BAJO	TOTALES CUESTIONARIO
MUY ALTO	2	0	0	0	2
ALTO	4	1	2	0	7
BAJO	25	12	0	2	39
MUY BAJO	6	2	2	2	12
TOTALES EJERCICIOS	37	15	4	4	60

En esta tabla se observa cómo el 86% (52 de 60) de los alumnos tienen un grado de competencia en resolución de límites alto o muy alto. Esto quiere decir que son capaces de resolver ejercicios rutinarios sin grandes dificultades. De hecho, la lista de ejercicios propuestos, son en su totalidad indeterminaciones que deben ser resueltas con métodos que el alumnado acaba de aprender.

Por otro lado el 85% de los estudiantes considerados, tienen un grado bajo o muy bajo en la adquisición del concepto límite. Si el estudio se ciñera exclusivamente a la competencia de la representación gráfica de límites, este porcentaje se vería aumentado aún más. Esta afirmación surge de la observación de las respuestas obtenidas en las preguntas 3, 5 y 7 del cuestionario de la sección 7 de este documento.

Por ello se puede decir que, efectivamente, los estudiantes saben resolver límites de manera mecánica pero que no trae relacionado la correcta comprensión de las nociones relacionadas con límites.

No se puede decir que esta afirmación sea extrapolable a otros casos, pero es un punto de partida para otras investigaciones que consideren también alumnos de Naturales y no solamente alumnos de ciencias Sociales ([2]).

4.4. Mejoras para el cuestionario

En la pregunta número 1 no queda muy claro si el límite debe ser el de una función o es de una sucesión. Para trabajos acerca de límites finitos de sucesiones ver, por ejemplo, la tesis de F.J. Claros ([5]). Para el siguiente uso del cuestionario, añadir "de una función" al enunciado de esta pregunta.

Sustituir la pregunta número 3 por "Representa una función que cumpla $lím_{x\to 7} f(x) = 2$."

Hacer una sustitución en la pregunta 5 análoga a la realizada en la pregunta 3.

Sustituir la pregunta 7 por "Representa una gráfica que cumpla $lím_{x\to\infty} f(x) = 4$."

Añadir la siguiente pregunta tras la número 8: "¿Qué entiendes por x tiende al infinito?"

Modificar la pregunta 10, para que ponga en un "$x = 0$" en lugar de "$x = x_0$".

Modificar la pregunta 11 a "Enuncia las condiciones teóricas que debe satisfacer una función para ser continua en $x = 0$."

5. Conclusiones

La mayor parte del alumnado tiene una visión muy particular de los límites. Para ellos, se puede considerar que los límites son aproximaciones a un punto que es una cota inalcanzable. Además, casi siempre consideran que las funciones que se utilizan son monótonas crecientes. Ambas afirmaciones provocarían que los estudiantes no entendieran el límite de funciones como $\frac{\text{sen } x}{x}$, ya que el límite de la función en el infinito es 0, pero la función toma infinitos valores positivos y negativos para valores grandes de x.

Por otro lado, una gran parte de los estudiantes consideran los límites como meras sustituciones de un valor en una fórmula, como se puede observar en las preguntas 2, 4, 6 y 8. En las preguntas 3, 5 y 7 se puede contemplar que el alumnado no tiene, en general, un alto grado de competencia en la representación de funciones que cumplan ciertas condiciones; en este caso que el límite puntual o infinito de la función tenga un valor dado.

De las preguntas 15 y 16 se desprende que los estudiantes tienen serias dificultades para considerar los límites en otras situaciones. No es de extrañar esta situación debido a que durante la unidad didáctica todos los límites son relativos a una función y además durante la mayor parte de dicha unidad, solamente interesa resolver indeterminaciones.

En contraste, casi todo el alumnado ha logrado responder de una manera satisfactoria la última pregunta, debido a que tienen una mayor familiaridad con las proporciones en mezclas.

Se podría decir que el grado de competencia en la noción límite no es muy alto en los estudiantes considerados en este trabajo.

Sin embargo, el grado de competencia en los términos de continuidad es mayor. Casi todos son capaces de distinguir y representar los distintos tipos de discontinuidades.

En relación con el objetivo (O2) se observa que los estudiantes realizan bien los ejercicios rutinarios, pero sin adquirir los conceptos en el grado que sería deseable.

Agradecimientos

El autor quisiera agradecer al centro la Inmaculada PP. Escolapios de Getafe por brindarle la oportunidad de realizar este estudio en sus aulas. También quisiera agradecer al profesor D. Carlos de Castro Hernández por las aportaciones realizadas.

Bibliografía

[1] AZCÁRATE, C. y CAMACHO, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* Vol. X, Nº 2, 135-149. Disponible en http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/matias-carmen.pdf. Consulta realizada el 5 de Mayo de 2012.

[2] BLÁZQUEZ, S. (2000). Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid.

[3] BLÁZQUEZ, S. y ORTEGA, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. *En* El futuro del cálculo infinitesimal. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica. Disponible en http://www4.uva.es/didamatva/investigacion/Publicaciones/concept_limite_educ_secund.pdf Consulta realizada el 5 de Mayo de 2012.

[4] BLÁZQUEZ, S. y ORTEGA, T. (2001). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, vol. 10, 117-133. Disponible en http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=122572 Consulta realizada el 5 de Mayo de 2012

[5] CLAROS, F. J. (2010). Límite finito de una sucesión: Fenómenos que organiza; tesis doctoral. Disponible en http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=22293 Consultado el 14de Mayo de 2012

[6] Comunidad Autónoma de Madrid. (2007). DECRETO 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. B.O.C.M. Núm. 126, 48 - 139. Disponible en: http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/curriculo_secundaria_madrid.pdf. Consultado el 22 de Agosto de 2012.

[7] Comunidad Autónoma de Madrid. (2008). *DECRETO 67/2008, de 19 de junio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo del Bachillerato.* B.O.C.M. Núm. 152, 6 - 84. Disponible en http://www.ucm.es/cont/descargas/documento32723.pdf Consultado el 22 de Agosto de 2012.

[8] CORNU, B. (1991). Limits. *En* D. Tall (ed.): Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer, 153-166.

[9] España. (2006). REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. B.O.E. Núm. 5, 677 - 773. Disponible en http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf Consultado el 22 de Agosto de 2012.

[10] ESPINOZA, l. y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. Enseñanza de las *Ciencias*, 18(3), 355-368. Disponible en http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=95017 Consultado el 5 de Mayo de 2012.

[11] FIGUEIRAS, L.; MOLERO, M.; SALVADOR, A. y ZUASTI, N (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría a través de los fractales. Revista SUMA. Nº 35, 45-52.

[12] GARBÍN, S. y AZCÁRATE, C. (2001). Infinito actual e inconsistencias**:** acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de los alumnos de 16-17 años. Enseñanza de las Ciencias, 2002, 20 (1), 87-113. Disponible en http://ensciencias.uab.es/revistes/20-1/87-113.pdf Consultado el 5 de Mayo de 2012.

[13] GARBÍN, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años en el infinito?,RELIME Vol. 8, No. 2 169-194. Disponible en http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2096328 Consultado el 5 de Mayo de 2012.

[14] TALL, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof, in Grouws D.A. (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, 495-511. Disponible en http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-to-amt.pdf Consulta realizada el 3 de Mayo de 2012

[15] TALL, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, Proceedings of PME 19, Recife (Brasil). Disponible en http://digilander.libero.it/leo723/materiali/algebra/dot1995b-pme-plenary.pdf Consultado el 6 de Mayo de 2012.

6. Anexos

6.1 Cuestionario

1) ¿Qué entiendes por límite?

2) ¿Qué quiere decir qué $\text{lím}_{x\to 4} f(x) = 5$ *?*

3) ¿Qué puedes decir gráficamente de una función que cumple $\text{lím}_{x\to 7} f(x) = 2$ *?*

4) ¿Qué quiere decir qué $\text{lím}_{x\to 4} f(x) = \infty$ *?*

5) ¿Qué puedes decir de una gráfica que cumple qué $\lim_{x \to 4} f(x) = \infty$ *?*

6) ¿Qué quiere decir qué $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$ *?*

7) ¿Cómo se comporta una función que cumpla qué $\lim_{x \to \infty} f(x) = 4$ *?*

8) ¿Qué quiere decir qué $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ *?*

9) ¿Qué quiere decir que una función sea continua?

10) ¿Qué podemos decir de la gráfica de una función que sea continua en $x = x_0$ *?*

11) ¿Qué condiciones debe cumplir una función para ser continua en $x = x_0$ *?*

12) Representa una función que sea continua.

13) Representa una función con una discontinuidad de salto finito.

14) Representa una función con una discontinuidad de salto infinito.

15) ¿Cuál es el límite de la siguiente sucesión: triangulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, heptágono regular,…? ¿Por qué?

16) Tomamos el intervalo [0, 1]. *Lo dividimos en tres partes iguales, quitamos el intervalo central. En cada uno de los intervalos que tenemos repetimos la misma operación: dividimos en tres subintervalos y quitamos el central. Si repetimos indefinidamente la operación, ¿qué obtenemos?*

17) Mezclamos un litro de pintura blanca con un litro de pintura azul. ¿Qué proporción de pintura blanca tendremos en la mezcla? Si añadimos, otro litro de pintura azul, ¿qué proporción de pintura blanca tendremos? Si añadimos, 40 litros más de pintura azul, ¿qué proporción de pintura blanca tendremos? Si seguimos añadiendo pintura azul, ¿a qué tiende la proporción de pintura blanca en la mezcla? ¿Habrá algún momento en el que la proporción de pintura blanca sea exactamente cero?

6.2 Ejercicios

A) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right)$

B) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x} \right)$

C) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1} \right)^{x+5}$

D) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x+7} \right)^{x}$

E) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 3x} \right)^{\frac{x^2+3}{x+1}}$

F) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2 - x + 2}} \right)$

G) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 3x^2} - 3}{2x+1} \right)$

H) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 6}{\sqrt[5]{x^{13} - x^5}} \right)$

I) $\text{lím}_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right)$ J) $\text{lím}_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}\right)$

K) $\text{lím}_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2+3}\right)^{\frac{1}{x}}$ L) $\text{lím}_{x\to a}\left(\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)$

M) Hallar a para que $\text{lím}_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+3}{3x}\right)=25$

Sobre el autor:
Nombre: Daniel de la Barrera Mayoral
Correo Electrónico: dbarrera@mat.ucm.es
Institución: Departamento geometría y topología. Facultad Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid, España.