

COMPARACIÓN DE DOS MÉTODOS DE AJUSTE DE LA FUNCIÓN S_B DE JOHNSON A DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS DE MASAS DE PINO RADIATA EN ASTURIAS

José Javier Gorgoso Varela¹, Asunción Cámara-Obregón¹ y Elena Canga-Líbano²

¹ Departamento de Biología de Organismos y Sistemas. Escuela Politécnica de Mieres. Universidad de Oviedo. C/ Gonzalo Gutiérrez Quirós s/n. 33600-MIERES (Asturias-España). Correo electrónico: gorgoso@uniovi.es

² Servicio Regional de Investigación y Desarrollo Agroalimentario de Asturias (SERIDA). Finca "La Mata". Apdo 13. 33820-GRADO (Asturias-España)

Resumen

Las masas de *Pinus radiata* D. Don de Asturias constituyen un importante recurso natural para la región. El pino radiata es la conífera exótica más utilizada en repoblaciones en España, distribuyéndose en la actualidad por toda la cornisa cantábrica, donde se ha adaptado perfectamente al clima. En Asturias se estima en unas 19.000 ha, repartidas principalmente por los concejos del centro y oeste de la región. Sin embargo, en la región no se dispone de las herramientas necesarias para la gestión de estas masas, recurriéndose frecuentemente a las elaboradas en otras zonas próximas. Los modelos de crecimiento de las especies forestales son un buen ejemplo de estas herramientas, y entre ellos se incluyen los modelos de clases diamétricas, basados en el ajuste de una función de densidad o de distribución a los datos de diámetros medidos en parcelas permanentes. Estos modelos proporcionan información sobre la estructura y estabilidad de las masas, y permiten la planificación de tratamientos selvícolas y de los aprovechamientos forestales. En este trabajo se ha ajustado un modelo ampliamente utilizado en el ámbito forestal, como es la función de densidad S_B de Johnson, a datos de distribuciones diamétricas obtenidas de 114 parcelas permanentes instaladas en masas puras y coetáneas de *Pinus radiata* D. Don en la región de Asturias. Los parámetros de la función se obtuvieron mediante los estimadores de KNOEBEL & BURKHART (1991) y por los estimadores de máxima verosimilitud condicionados, fijando en este caso cuatro valores diferentes para el parámetro de situación de la función: cero y el 25%, 50% y 75% del valor mínimo observado en cada distribución, tomando en todos los casos el diámetro máximo observado como parámetro de escala. Para la comparación de los modelos se han empleado los siguientes estadísticos: sesgo, error medio absoluto (EMA) y error medio cuadrático (EMC), calculados en frecuencias relativas del número de pies. Los resultados indican que el método de máxima verosimilitud condicionado es superior al método de KNOEBEL & BURKHART (1991) si se elige un correcto valor del parámetro de situación de la función que no debe ser inferior a la mitad del diámetro mínimo observado.

Palabras clave: *Pinus radiata*, Función de densidad, Método de Knoebel & Burkhardt, Método de máxima verosimilitud

INTRODUCCIÓN

Las masas de *Pinus radiata* D. Don de Asturias constituyen un importante recurso natural para la región. El pino radiata es la conífera exótica más utilizada en repoblaciones en España, distribuyéndose en la actualidad por toda la cornisa cantábrica, donde se ha adaptado perfectamente al clima. En Asturias se estima en unas 19.000 ha (GOBIERNO DEL PRINCIPADO DE ASTURIAS, 2002), repartidas principalmente por los concejos del centro y oeste de la región.

El Plan Forestal de Asturias (GOBIERNO DEL PRINCIPADO DE ASTURIAS, 2002) establece como uno de sus objetivos el fomento de la producción forestal, proponiendo repoblaciones y ordenaciones de masas de coníferas como el pino radiata, para lo que se marca como objetivo prácticamente triplicar la superficie poblada con esta especie a lo largo de un horizonte temporal de 60 años. Sin embargo, la realidad de lo que viene ocurriendo en Asturias en los últimos años es un descenso en el volumen total de cortas de madera, y en particular en las masas de pino radiata, que han pasado de un volumen medio de cortas de 68.169 m³ en el período 2002-2007 a 42.237 m³ en el año 2008 (SADEI, 2008), debido sin duda a la crisis económica, pero también a que en la región no se dispone de las herramientas necesarias para la gestión de estas masas, recurriéndose frecuentemente a las elaboradas en otras zonas próximas, como es el caso de Galicia.

Los modelos de crecimiento de las especies forestales son un buen ejemplo de estas herramientas de gestión, y entre ellos se incluyen los modelos de clases diamétricas, basados en el ajuste de una función de densidad o de distribución a los datos de diámetros medidos en parcelas permanentes. Estos modelos proporcionan información sobre la estructura y estabilidad de las masas, y permiten la planificación de tratamientos selvícolas y de los aprovechamientos forestales. La falta de gestión provoca que el rendimiento económico de las masas asturianas pobladas con pino radiata sea inferior al que podrían proporcionar, debido a que no se practica la silvicultura más conveniente, lo que provoca habitualmente una elevada mortalidad de pies y proliferación de plagas y enfermedades favorecidas por su condición de especie introducida.

La función S_B de Johnson es un modelo matemático ampliamente utilizado para modelizar distribuciones diamétricas (JOHNSON, 1949; KNOEBEL & BURKHART, 1991; ZHANG et al. 2003, etc.). En este trabajo se comparan dos metodologías muy habituales para la obtención de los parámetros de esta función: mediante los estimadores de KNOEBEL & BURKHART (1991) y por los estimadores de máxima verosimilitud condicionados, fijando en este caso cuatro valores diferentes para el parámetro de situación de la función: cero y 25%, 50% y 75% del valor mínimo observado en cada parcela y el diámetro máximo como parámetro de escala. Para la comparación de los modelos se han empleado los siguientes estadísticos: sesgo, error medio absoluto (EMA) y error medio cuadrático (EMC), medidos en frecuencias relativas del número de pies en cada clase diamétrica.

MATERIAL Y MÉTODOS

Toma de datos

Se han empleado los datos de diámetros normales correspondientes a 114 parcelas permanentes con una superficie comprendida entre los 800 y 1.000 m² instaladas en plantaciones puras de *Pinus radiata* D. Don en el Principado de Asturias, que representan toda la variedad de combinaciones posibles de densidades, edades y calidades de estación. En cada parcela se midieron todos los diámetros con dos mediciones perpendiculares a una altura de 1,3 m sobre el nivel del suelo empleando una forcípula con aproximación hasta 0,1 cm y posteriormente se calculó la media aritmética de ambas medidas. En total se midieron 8.907 pies entre todas las parcelas y para cada una se calcularon las siguientes variables de masa: edad, diámetro medio cuadrático, densidad, área basimétrica y altura dominante.

Los valores promedio, máximo, mínimo y desviación típica de estas variables se muestran en la Tabla 1.

La función S_B de Johnson

La distribución S_B de Johnson (JOHNSON, 1949) tiene la siguiente expresión para una variable aleatoria x :

	Mínimo	Máximo	Media	Desviación Típica
Edad (años)	9,0	54,0	24,7	10,3
d_g (cm)	9,4	46,1	23,1	8,5
N (pies·ha ⁻¹)	275,0	1.775,0	879,2	300,9
G (m ² ·ha ⁻¹)	4,9	78,2	35,30	17,8
H_0 (m)	7,6	39,8	21,0	7,2

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de las principales variables de masa. d_g : diámetro medio cuadrático; N : densidad; G : área basimétrica; H_0 : altura dominante

$$f(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\lambda}{(\epsilon + \lambda - x)(x - \epsilon)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[\gamma + \delta \cdot \ln \left(\frac{x - \epsilon}{\epsilon + \lambda - x} \right) \right]^2} \quad [1]$$

donde: $\epsilon < x < \epsilon + \lambda$; $-\infty < \epsilon < \infty$; $-\infty < \delta < \infty$; $\lambda > 0$; $\pi > 0$

El modelo está caracterizado por el parámetro de localización (ϵ), el parámetro de escala (λ) y los parámetros de forma: δ y π (parámetros de asimetría y kurtosis, respectivamente). En este trabajo se comparan dos métodos de ajuste de la función: método de los estimadores de máxima verosimilitud condicionados y método de KNOEBEL & BURKHART (1991).

- Método de máxima verosimilitud

El método de máxima verosimilitud para los parámetros de forma (δ y π) de la distribución SB de Johnson con valores predeterminados para los parámetros de situación (ϵ) y de escala (λ) fue computado por JHONSON (1949), HAFLEY & SCHREUDER (1977) o SIEKIERSKI (1992). Los valores de los parámetros son obtenidos con las siguientes expresiones:

$$\delta = \frac{1}{S_i} \quad [2] \quad \gamma = \frac{-\bar{f}_i}{S_i} \quad [3] \quad \bar{f}_i = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{n} \quad [4]$$

$$S_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f_i - \bar{f}_i)^2}{n} \quad [5] \quad f_i = \ln \left(\frac{x_i - \epsilon}{\epsilon + \lambda - x_i} \right) \quad [6]$$

donde x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) son los diámetros de los árboles. El parámetro ϵ fue predeterminando como: cero, 25%; 50% y 75% del diámetro mínimo de cada parcela. ZHANG et al. (2003) y SCOLFORO et al. (2003) compararon diferentes valores de este parámetro con este método de ajuste. El parámetro λ fue establecido como el diámetro máximo de cada parcela en todos los casos.

- Método de KNOEBEL & BURKHART (1991)

El método desarrollado por KNOEBEL & BURKHART (1991) y usado por autores como

ZHOU & McTAGUE (1996) y ZHANG et al. (2003), estima los parámetros de la función con las siguientes ecuaciones:

$$\delta = \frac{Z_{95}}{\ln \left(\frac{D_{95} - \epsilon}{\epsilon + \lambda - D_{95}} \right) - \ln \left(\frac{D_{50} - \epsilon}{\epsilon + \lambda - D_{50}} \right)} \quad [7]$$

$$\gamma = -\delta \cdot \ln \left(\frac{D_{50} - \epsilon}{\epsilon + \lambda - D_{50}} \right) \quad [8]$$

$$\epsilon = d_{min} - 1.3 \text{ (cm)} \quad [9]$$

$$\lambda = d_{max} - \epsilon + 3.8 \text{ (cm)} \quad [10]$$

donde d_{min} es el diámetro mínimo de cada parcela, d_{max} es el diámetro máximo de la parcela, Z_{95} representa el valor normal estándar de la distribución normal correspondiente al percentil acumulado del 95%, y D_{95} y D_{50} son los diámetros estimados correspondientes a los percentiles del 95% y del 50% de las distribuciones observadas.

Bondad de los ajustes

La consistencia del ajuste de los dos métodos fue evaluada con el sesgo, el error medio absoluto (EMA) y el error medio cuadrático (EMC), calculados con las siguientes expresiones:

$$Sesgo = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i - \hat{Y}_i}{N} \quad [11] \quad EMA = \frac{\sum_{i=1}^N |Y_i - \hat{Y}_i|}{N} \quad [12]$$

$$EMC = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N} \quad [13]$$

donde Y_i es la frecuencia relativa observada del número de pies en cada clase diamétrica, \hat{Y}_i es la frecuencia teórica predicha por el modelo y N es el número total de datos. Estos estadísticos fueron calculados en frecuencias relativas pro-

medio para todas las clases diamétricas y para todas las parcelas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La Tabla 2 muestra los valores promedio totales del sesgo, del error medio absoluto (EMA) y del error medio cuadrático (EMC) en frecuencias relativas del número de pies para los dos métodos de ajuste de la función S_B de Johnson considerando hasta un diámetro máximo de los árboles de 65 cm.

Los resultados de la Tabla 2 muestran que los mejores ajustes se han obtenido con el método de los estimadores condicionados de máxima verosimilitud prefijando el parámetro de situación de la función (ϵ) con un valor de al menos la mitad del diámetro mínimo observado en cada distribución. El valor el error medio cuadrático (EMC) ha sido el mismo para valores de ϵ iguales al 50% y al 75% del diámetro mínimo, sin embargo los valores del sesgo y del error medio absoluto (EMA) han sido ligeramente mejores cuando el parámetro de situación se hace coincidir con la mitad del diámetro mínimo. Resultados con diferentes valores de este parámetro han sido comparados en varios estudios. Por ejemplo, el método de KNOEBEL & BURKHART (1991) propone: $\epsilon = d_{min} - 1,3$; ZHANG et al. (2003) propusieron: $\epsilon = d_{min} - c$, siendo c igual a 0,5; 1; 1,5 y 2, obteniendo los mejores resultados con $c = 0,5$, evitando ambos fijar el parámetro igual al diámetro mínimo observado; y SCOLFORO et al. (2003) compararon diferentes fracciones del diámetro mínimo obteniendo el mejor resultado con un valor igual al 25% de dicho valor. Sin embargo, PALAHÍ et al. (2007) consideraron el diámetro mínimo observado o cero en distribuciones no truncadas. El hecho de

que las distribuciones sean truncadas o no debe condicionar el valor más adecuado para este parámetro. Los peores resultados se han obtenido cuando el parámetro de situación ha tomado el valor de cero, valor elegido por GORGOSO et al. (2005) que no debe ser muy adecuado en el caso de distribuciones truncadas y muchas veces con un valor mínimo del diámetro bastante alto como las disponibles para este trabajo.

La Figura 1 (a y b) muestra la evolución del valor promedio del sesgo y del error medio cuadrático (EMC) en cada clase diamétrica en el ajuste de la función S_B de Johnson por el método de KNOEBEL & BURKHART (1991) y por el método de los estimadores de máxima verosimilitud condicionados fijando el parámetro de situación igual a la mitad del diámetro mínimo observado en cada distribución.

El método de KNOEBEL & BURKHART (1991) obtuvo un valor similar del EMC al método de máxima verosimilitud cuando el parámetro de situación tomó el valor del 25% del diámetro mínimo observado. Sin embargo, el método es inferior a los mejores ajustes por máxima verosimilitud (cuando se fija ϵ como 50% o 75% del diámetro mínimo), lo que se manifiesta sobre todo en el valor promedio del EMC de las clases diamétricas más pequeñas como se puede observar en la Figura 1. Esto concuerda con los estudios del SCOLFORO et al. (2003) para *Pinus taeda* en Brasil y ZHANG et al. (2003), quienes compararon, respectivamente, cinco y cuatro métodos de ajuste de la función S_B de Johnson y encontraron el método de los estimadores de máxima verosimilitud más preciso que el método de KNOEBEL & BURKHART (1991).

En la Figura 2 (a y b) se muestran dos de las parcelas del estudio (TIBI y REAI) con menor EMC en el ajuste por máxima verosimilitud fijando el parámetro de situación igual al 50%

	Parámetro ϵ	Parámetro λ	Sesgo	EMA	EMC
Máxima verosimilitud	cero	d_{max}	0,000414	0,015641	0,000468
	$0,25 \cdot d_{min}$	d_{max}	0,000494	0,014912	0,000413
	$0,50 \cdot d_{min}$	d_{max}	0,000545	0,014628	0,000394
	$0,75 \cdot d_{min}$	d_{max}	0,000561	0,014661	0,000394
KNOEBEL & BURKHART (1991)	$d_{min} - 1,3$	$d_{max} - \epsilon + 3,8$	0,000899	0,014742	0,000414

Tabla 2. Resultados de los estadísticos empleados en la comparación de metodologías de ajuste de la distribución SB de Johnson. d_{min} : diámetro mínimo observado en cada parcela; d_{max} : diámetro máximo observado

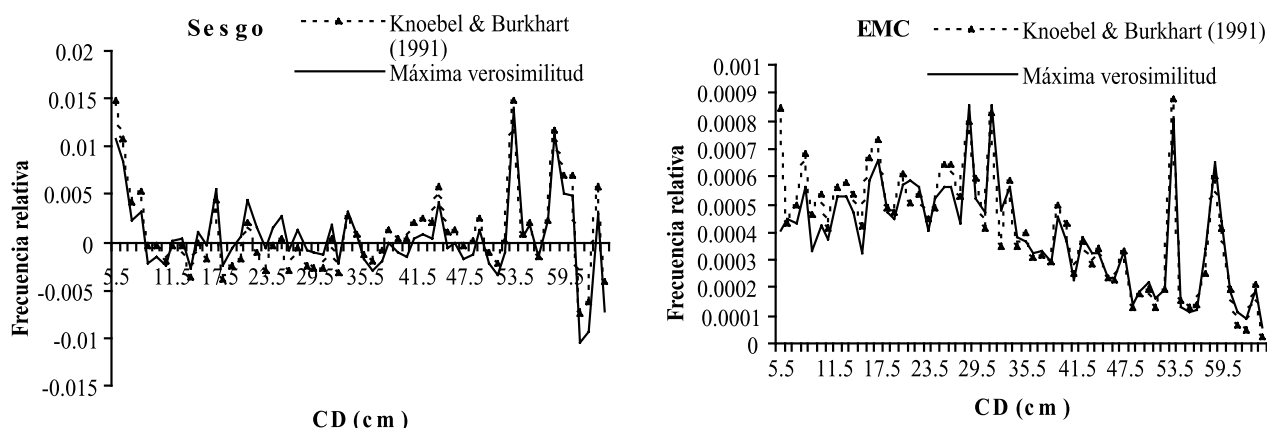


Figura 1 (a y b), Evolución del valor promedio del sesgo y del error medio cuadrático (EMC) en cada clase diamétrica en los dos métodos de ajuste de la función S_B de Johnson: KNOEBEL & BURKHART (1991) y Máxima Verosimilitud ($\delta = 0,5 \cdot d_{min}$ y $\lambda = d_{max}$)

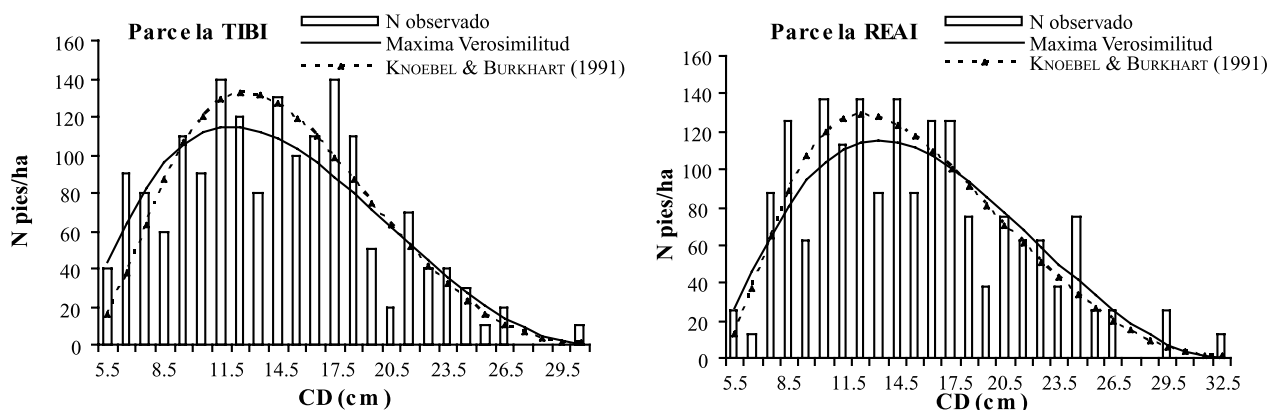


Figura 2 (a y b), Densidades observadas y descritas en dos parcelas por la función S_B de Johnson: Máxima Verosimilitud ($\epsilon = 0,5 \cdot d_{min}$ y $\lambda = d_{max}$) y KNOEBEL & BURKHART (1991)

del diámetro mínimo. Se puede comprobar en ambos casos un mejor ajuste de este método que el de KNOEBEL & BURKHART (1991) en las clases diamétricas más pequeñas.

CONCLUSIONES

La elección del valor del parámetro de situación en el ajuste de funciones de densidad o de distribución a distribuciones diamétricas condiciona mucho la precisión de los ajustes. En este trabajo se comprueba que el método de máxima verosimilitud es superior al de KNOEBEL & BURKHART (1991) cuando se fija el parámetro ϵ a un valor adecuado, que no debería ser inferior a la mitad del diámetro mínimo observado en el caso de las masas de *Pinus radiata* D. Don en Asturias.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Fundación en Asturias para la Investigación Científica y Tecnológica (FYCIT), la Consejería del Medio Rural y Pesca, ASMADERA, AESA y la Asociación Forestal “El Bosque”, a través del proyecto: Estudio del crecimiento y producción en pinares regulares de *Pinus radiata* D. Don en Asturias (PC04-57).

BIBLIOGRAFÍA

- GOBIERNO DEL PRINCIPADO DE ASTURIAS; 2002. *Plan Forestal de Asturias*. Consejería de Medio Rural y Pesca. Oviedo.
- GORGOSO, J.J.; ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, J.G. Y ROJO, A.; 2005. Ajuste de la función SB de

- Johnson a datos de distribuciones diamétricas de abedul en Galicia. En: S.E.C.F.-Gobierno de Aragón (eds.), *Actas del 4º Congreso Forestal Español*. CD-Rom. Imprenta Repes, S.C. Zaragoza.
- HAFLEY, W.L. & SCHREUDER, H.T.; 1977. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. *Can. J. For. Res.* 4: 481-487.
- JOHNSON, N.L.; 1949. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika* 36: 149-176.
- KNOEBEL, B.R. & BURKHART, H.E.; 1991. A bivariate distribution approach to modeling forest diameter distributions at two points in time. *Biometrics* 47: 241-253.
- PALAHÍ, M.; PUKKALA, T.; BLASCO, E. & TRASOBARES, A.; 2007. Comparison of beta, Johnson's SB, Weibull and truncated Weibull functions for modeling the diameter distribution of forest stands in Catalonia (north-east of Spain). *Eur. J. For. Res.* 126: 563-571.
- SADEI, 2008. *Anuario Estadístico de Asturias*. Instituto Asturiano de Estadística. Gobierno del Principado de Asturias. Oviedo.
- SCOLFORO, J.R.S.; VITTI, F.C.; GRISI, R.L.; ACERBI, F. & DE ASSIS A.L.; 2003. SB distribution's accuracy to represent the diameter distribution of *Pinus taeda*, through five fitting methods. *Forest Ecol. Manage.* 175: 489-496.
- SIEKIERSKI, K.; 1992. Comparison and evaluation of three methods of estimation of the Johnson SB distribution. *Biom. J.* 34: 879-895.
- ZHANG, L.; PACKARD, K.C. & LIU, C.; 2003. A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Johnson's SB distributions to mixed spruce-fir stands in northeastern North America. *Can. J. For. Res.* 33: 1340-1347.
- ZHOU, B. & MCTAGUE, J.P.; 1996. Comparison and evaluation of five methods of estimation of the Johnson System parameters. *Can. J. For. Res.* 26: 928-935.