RELACIÓN ALTURA-DIÁMETRO CON PARÁMETROS ALEATORIOS PARA RODALES REGULARES DE *PSEUDOTSUGA MENZIESII* EN EL NORTE DE ESPAÑA

Carlos Antonio López-Sánchez [1], **Roque Rodríguez Soalleiro** [2] **y Juan Gabriel Álvarez González** [1]

[1] Unidad de Gestión Forestal Sostenible. Departamento de Ingeniería Agroforestal. Universidad de Santiago de Compostela. Campus Universitario s/n. 27002-LUGO (España).Correo electrónico: carlosantonio.lopez@usc.es

[2] Unidad de Gestión Forestal Sostenible. Departamento de Producción Vegetal. Universidad de Santiago de Compostela. Campus Universitario s/n. 27002-LUGO (España)

Resumen

En España el abeto Douglas es una especie común en las plantaciones productivas de la mitad septentrional, en donde ha sido empleada en cerca de 10.000 ha durante la última década. A pesar de ello, son escasos los estudios de crecimiento y producción de la especie. En este trabajo se presenta una relación altura-diámetro generalizada ajustada a datos de una red de 110 parcelas temporales instaladas entre 1993 y 2005, y que cubren las diferentes edades, densidades y calidades de estación en plantaciones distribuidas por Galicia, Asturias, Castilla y León, Cantabria, País Vasco y La Rioja. En total se ha contado con 5.501 pares de datos altura-diámetro. El ajuste de la ecuación conllevó dos fases: inicialmente se probaron tres relaciones altura-diámetro generalizadas y se seleccionó una en función de análisis gráficos y estadísticos de bondad del ajuste; posteriormente se ha determinado qué parámetros del modelo debían expandirse incorporando un término aleatorio específico por parcela. Por último, el modelo se ha calibrado para determinar el tamaño adecuado de muestra que permita la estimación de los parámetros aleatorios con suficiente exactitud y con el menor esfuerzo de muestreo posible.

Palabras clave: *Modelos mixtos, Multicolinealidad, Calibración, Abeto Douglas*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento de las alturas de los árboles de un rodal forestal juega dos papeles muy importantes en la modelización del crecimiento y la producción. En primer lugar, en rodales regulares, la altura dominante y la edad se utilizan para estimar la productividad de la estación a través del índice de sitio. En segundo lugar, las curvas altura total-diámetro normal (*h-d*) son la base para predecir los volúmenes totales o comerciales de un árbol mediante tarifas de cubicación, funciones de perfil de tronco o tarifas de volumen porcentual, además estas dos variables también aparecen como entrada en algunos modelos para la estimación individual de los crecimientos en diámetro o en altura de los pies de la masa.

La relación *h-d* puede ajustarse a funciones lineales, como una parábola de segundo grado, o más comúnmente, a modelos no lineales (HUANG et *al*., 1992). Sin embargo, las relaciones así ajustadas, también denominadas locales, no se adap-

ISSN: 1575-2410

tan bien a todas las posibles condiciones estacionales y al diferente estado selvícola de los rodales, debido a que su forma varía con la edad, la calidad de estación o la densidad (Prodan et *al.*, 1997).

Por tanto, una única curva no puede ser utilizada para la estimación de todas las posibles relaciones que se pueden encontrar dentro de las distintas masas a lo largo de su desarrollo. Para evitar dicho inconveniente, las relaciones h-d locales pueden mejorarse considerando la inclusión de las variables que caracterizan la dinámica de cada masa en las distintas ecuaciones, dando lugar a las funciones de altura-diámetro generalizada (Curtis, 1967; Larsen & Hann, 1987; López et *al.*, 2003).

Por otro lado, tanto la altura total como el diámetro normal son variables que se obtienen en árboles de una misma parcela, y a su vez las parcelas están ubicadas en masas con distintos emplazamientos geográficos. Tal estructura estocástica anidada (árbol anidado o identificado a parcela) da lugar a una falta de independencia entre las observaciones, debido a que los datos de la misma unidad de muestreo (en este caso la parcela) tienden a parecerse más entre sí mismos (West et *al.*, 1984; Fox et *al.*, 2001). El desarrollo de la metodología de modelos mixtos (efectos fijos y aleatorios) permite definir explícitamente la estructura estocástica anidada. Lappi (1986, 1991) aplicó dicha metodología a diversas aplicaciones en el campo de la biometría forestal, habiendo sido ampliamente utilizada desde entonces (Fang & Bailey, 2001; Calama y Montero, 2004; Castedo et *al.*, 2006).

La metodología de modelos mixtos estima de forma simultánea los denominados parámetros fijos, que son comunes a todas las unidades de muestreo (en este caso las parcelas) y los aleatorios, que son parámetros específicos de cada unidad de muestreo (parcela) proporcionando consistencia a las estimaciones de los parámetros y a sus errores estándar asociados. Además, la inclusión de parámetros aleatorios específicos para cada parcela permite la modelización de la variabilidad de un determinado fenómeno entre sus diferentes localizaciones (luego de definir la estructura de la matriz de varianzas-covarianzas de parámetros aleatorios), proporcionando una mejora en las estimaciones de la variable dependiente (altura total del árbol).

Una ventaja añadida de los modelos mixtos es la posibilidad de realizar una calibración de los mismos, a partir de una muestra de observaciones adicionales de la variable dependiente, que permita predecir el valor de los parámetros aleatorios para una unidad muestral cualquiera diferente de las empleadas en el ajuste del modelo.

En base a estas consideraciones, el objetivo de este trabajo será encontrar un modelo altura-diámetro generalizado (ajustado por el método de mínimos cuadrados ordinarios) que sirva para describir y predecir adecuadamente las relaciones *h-d* en las plantaciones de *Pseudotsuga menziesii* en España considerando distintas variables dasométricas (edad, densidad, altura dominante, diámetro dominante, etc.) y desarrollar dicho modelo mediante la metodología de modelos mixtos. Esto permitirá incrementar la capacidad predictiva de las estimaciones de cualquier otra parcela mediante la calibración del modelo a partir de una pequeña proporción de alturas medidas en esa parcela.

MATERIAL Y MÉTODOS

Se ha utilizado la muestra de alturas totales y diámetros normales medidos en 110 parcelas instaladas por la UXFS. Además de los datos de árbol individual (altura total (h) en m-diámetro normal (d) en cm) se han utilizado las siguientes variables dasométricas: diámetro medio cuadrático (d_g) en cm; diámetro dominante (D_0) en cm, definido como el diámetro medio de los 100 pies más gruesos por hectárea; altura dominante (H_0) en m, definida como la altura media de los 100 pies más gruesos por hectárea; altura media ($\bar{h}$) en m; densidad (N) expresada como número de pies/ha y edad (t) en años. En la Tabla 1 se muestran los estadísticos descriptivos de dichas variables.

Del gran número de ecuaciones existentes que cumplen con las características básicas de estas relaciones, se han seleccionado tres por los buenos resultados que han mostrado para especies del noroeste peninsular (Diéguez-Aranda et *al.*, 2009). En la Tabla 2 se muestran sus expresiones matemáticas.

Inicialmente, el ajuste se llevó a cabo por regresión no lineal empleando el procedimiento NLIN del programa estadístico SAS/STAT™

Variable	Nº observac.	Media	Mínimo	Máximo	Desviación estándar
h	5501	15,66	2,50	36,00	5,86
d	5501	20,85	5,00	57,70	9,01
d_g	110	22,48	8,44	37,88	6,13
D_0	110	31,17	11,30	54,22	8,00
H_0	110	19,29	6,50	34,37	5,53
$\bar{h}$	110	16,60	5,37	27,39	4,83
N	110	942	280	2.128	383,87
t	110	27,56	8,00	63,00	9,22

Tabla 1. *Estadísticos descriptivos de las variables de la muestra correspondiente a las 110 parcelas inventariadas*

Modelo	Expresión
SCHNUTE (1981)	$h = \left(1{,}3^{b_1} + \left(H_0^{b_1} - 1{,}3^{b_1}\right) \cdot \dfrac{1 - exp(-b_0 . d)}{1 - exp(-b_0 . D_0)}\right)^{\frac{1}{b_1}}$
COX (1994) modificado (citado en LÓPEZ et *al.*, 2003)	$h = b_0 + b_1 \cdot \bar{h} + b_2 \cdot d_g + b_3 \cdot e^{b_4 \cdot d} + b_5 \cdot \bar{h}^{b_6} \cdot e^{b_4 \cdot d} + b_7 \cdot d_g^{b_8} \cdot e^{b_4 \cdot d}$
TOMÉ (1989)	$h = H_0 \cdot e^{\left(b_0 + b_1 \cdot H_0 + b_2 \cdot \frac{N}{1000} + b_3 \cdot t\right)\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D_0}\right)}$

Tabla 2. *Modelos altura-diámetro generalizada analizados. Donde h es la altura del árbol(m); d es su diámetro normal (cm); H_0 es la altura dominante (m); D_0 es el diámetro dominante (cm); $\bar{h}$ es la altura media (m); d_g es el diámetro medio cuadrático (cm); N es la densidad (pies·ha-1); t es la edad (años); y b_i son los parámetros a estimar en el ajuste*

(SAS INSTITUTE, 2004). La selección del mejor modelo se basó en los estadísticos representativos de sesgo y precisión (sesgo $\bar{E}$, coeficiente de determinación R^2 y raíz del error medio cuadrático *REMC*); en el valor del número de condición (*NC*) para evitar problemas de multicolinealidad, así como en la evolución del sesgo y de la raíz del error medio cuadrático por clases de diámetro y por clases de altura. Tras seleccionar el mejor modelo se procedió a ajustarlo como un modelo mixto incluyendo parámetros aleatorios asociados a cada uno de los parámetros fijos específicos por parcela, empleando el procedimiento NLMIXED (SAS INSTITUTE, 2004).

Se realizó una calibración del modelo mixto para determinar el tamaño de muestra y el tipo de árboles a muestrear para estimar los parámetros aleatorios de una parcela cualquiera diferente de las empleadas en el ajuste del modelo. Se han considerado las siguientes opciones de medición de alturas: (i) selección aleatoria de un determinado número de pies; (ii) selección de un determinado número de los pies más pequeños de la parcela y (iii) selección de un determinado número de los pies más grandes de la parcela.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En un primer momento se ajustaron los modelos sin tener en consideración los parámetros aleatorios, indicándose los estadísticos de bondad del ajuste en la Tabla 3.

El modelo de SCHNUTE (1981) es el que muestra los peores resultados de los estadísticos, debido a la inclusión de un menor número de variables independientes, consecuencia de que únicamente requiere de la medición de diámetros. Sin embargo, las diferencias en las estimaciones son inferiores al 1% con respecto a los otros modelos analizados. También cabe destacar que se trata del único modelo de los analizados que se encuentra exento de colinealidad entre sus variables, además de ser el que exige

Modelo	Variables	Nº parám.	$\bar{E}$	*REMC*	R^2	*NC*
Schnute (1981)	d, H_0, D_0	2	0,0935	2,0877	0,8729	2,45
Cox (1994) mod.	$d, d_g, \bar{h}$	9	-4,69E-6	2,0802	0,8738	173,50
Tomé (1989)	$d, H_0, D_0, t; N$	4	-0,0727	2,0335	0,8795	13,66

***Tabla 3**. Estadísticos de bondad del ajuste de los modelos altura-diámetro generalizada analizados. Donde d es el diámetro normal (cm); H_0 es la altura dominante (m); D_0 es el diámetro dominante (cm); $\bar{h}$ es la altura media (m); d_g es el diámetro medio cuadrático (cm); N es la densidad (pies/ha); t es la edad (años); $\bar{E}$ es el sesgo; REMC es la raíz del error medio cuadrático; R^2 es el coeficiente de determinación del ajuste y NC es el número de condición*

un menor esfuerzo de muestreo. Los análisis gráficos de la evolución del sesgo y de la raíz del error medio cuadrático en la estimación de la altura por clases diamétricas (no mostrados), también indicaron un buen comportamiento de este modelo, por lo que finalmente fue seleccionado como modelo base.

A continuación se realizó el ajuste de un modelo mixto asumiendo la existencia de un parámetro aleatorio asociado a cada uno de los dos parámetros fijos definidos por el modelo base. En la Tabla 4 se muestran los valores correspondientes a las componentes de la matriz de varianzas covarianzas para los parámetros aleatorios que definen la variabilidad existente entre las parcelas, la estimación de los parámetros (errores estándar entre paréntesis) y la comparación de la bondad del ajuste del modelo base y del modelo con efectos mixtos.

Se observa que el simple desarrollo del modelo mixto aporta una ganancia del 4,42% sobre el valor de *REMC* del modelo base, aunque en el caso de que no se conozcan los parámetros aleatorios (modelo mixto marginal), se produce una perdida sobre este mismo valor del 3,46%. A efectos de minimizar el esfuerzo de muestreo y paralelamente abaratar los costes de inventario asociados, se han planteado diferentes alternativas a la ejecución del proceso de calibración, que consideran la medición de la altura de un número de entre 1 a 5 árboles por parcela bajo las variantes de medición de pies aleatorios, pies menores y pies mayores.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para el proceso de calibración del modelo de Schnute (1981) desarrollado según técnicas de modelos mixtos en base a las diferentes alternativas de muestreo propuestas.

Para todas las variantes planteadas (pies aleatorios, menores y mayores) se observa una lógica ganancia en términos de bondad del ajuste a medida que se incrementa el número de árboles. A igual número de árboles considerados, la variante que mejor funcionamiento presenta es la correspondiente a la de pies menores, seguida de la de pies aleatorios y finalmente la de pies mayores. Este funcionamiento en el proceso de calibración puede ser consecuencia de

Modelo	Parámetros fijos		Componentes de la varianza				Bondad del ajuste		
	a_0	a_1	σ_u^2	σ_v^2	σ_{uv}	σ^2	$\bar{E}$	*REMC*	R^2
Base (ajuste)	0,06840 (0,0013)	0,9963 (0,0010)					0,0935	2,0877	0,8729
Mixto (marginal)	0,06730 (0,005659)	1,0400 (0,08372)					0,1072	2,1599	0,8591
Mixto (ajuste)	0,06730 (0,005659)	1,0400 (0,08372)	0,003293 (0,0001)	0,3342 (0,0309)	-0,03261 (0,0014)	3,8745 (0,0856)	0,0737	1,9955	0,8799

***Tabla 4**. Estimación de los parámetros y estadísticos de bondad del ajuste de los modelos base y con efectos mixtos seleccionado, diferenciando entre el modelo mixto marginal, en el que se asigna a los parámetros aleatorios el valor medio, es decir 0, y el modelo mixto ajustado con la asignación a cada parcela de los parámetros aleatorios estimados. Donde a_0 y a_1 son los parámetros fijos del modelo; σ_u^2 es la varianza del parámetro aleatorio u; σ_v^2 es la varianza del parámetro aleatorio v; σ_{uv} es la covarianza existente entre parámetros aleatorios; σ^2 es la varianza del error del modelo; $\bar{E}$ el sesgo; REMC la raíz del error medio cuadrático y R^2 el coeficiente de determinación del ajuste; entre paréntesis aparecen los errores estándar asociados a los parámetros*

Supuesto	**% reducc $\bar{E}$**	**% reducc *REMC***	**% increm R^2**
Variables de masa + 1 pie aleatorio	-0,37	-0,64	0,15
Variables de masa + 1 pie menor	-0,76	-0,99	0,23
Variables de masa + 1 pie mayor	0,00	-0,86	0,20
Variables de masa + 2 pies aleatorios	-24,04	-0,72	0,17
Variables de masa + 2 pies menores	-22,37	-3,06	0,70
Variables de masa + 2 pies mayores	-21,04	-1,47	0,36
Variables de masa + 3 pies aleatorios	-25,07	-1,22	0,28
Variables de masa + 3 pies menores	-47,34	-4,00	0,93
Variables de masa + 3 pies mayores	-21,33	-1,57	0,37
Variables de masa + 4 pies aleatorios	-29,68	-2,08	0,48
Variables de masa + 4 pies menores	-53,79	-4,36	1,00
Variables de masa + 4 pies mayores	-21,70	-1,68	0,42
Variables de masa + 5 pies aleatorios	-43,10	-2,22	0,51
Variables de masa + 5 pies menores	-56,28	-4,51	1,03
Variables de masa + 5 pies mayores	-22,05	-1,75	0,44

Tabla 5. *Comparación de los estadísticos de bondad del ajuste de las diferentes alternativas de muestreo propuestas para la realización del proceso de calibración con respecto al modelo mixto marginal*

que la expresión matemática del modelo en su forma base esté ya considerando como efectos fijos el binomio altura dominante-diámetro dominante de la masa (CASTEDO et *al*., 2006), lo que sugiere que la mayor incertidumbre en las predicciones del modelo se manifiesta en la parte inferior de la curva de regresión.

Una vez que la variante de muestreo de pies menores se presenta como la que mejor funcionamiento ofrece, únicamente resta por encontrar un compromiso entre el esfuerzo de muestreo y la capacidad de ajuste del proceso de calibración. Analizando la ganancia relativa que supone la incorporación de una nueva medición en términos de reducción de sesgo y aumento de precisión, se llega a la conclusión de que la alternativa de medición de dos árboles por parcela es la más adecuada.

CONCLUSIONES

Del análisis de los modelos propuestos se deduce que la incorporación de un mayor número de variables independientes reduce el sesgo y supone una ganancia en la capacidad explicativa de la variabilidad total de los mismos, aunque a costa de presentar problemas de multicolinealidad. Sin embargo, este incremento en la precisión de los modelos (inferior al 1%), lleva asociado un mayor esfuerzo de muestreo en campo que no justifica su selección. A raíz de esto, se recomienda utilizar como modelo predictivo para caracterizar las plantaciones de *Pseudotsuga menziesii* en España, el propuesto por SCHNUTE (1981). Su elección también se justifica por estar exento de multicolinealidad, además de garantizar que la altura estimada se corresponda con la altura dominante cuando el diámetro normal se corresponde con el diámetro dominante de la masa. El modelo seleccionado se mejoró incluyendo parámetros aleatorios por parcela mediante la metodología de modelos mixtos (proceso de ajuste). Se analizaron diferentes alternativas de estimación de los parámetros aleatorios para el uso práctico del modelo (proceso de calibración) a partir de una pequeña proporción de alturas obtenidas de árboles de la parcela, llegando a la conclusión de que las estimaciones derivadas de la medición de los dos pies menores de la parcela es la óptima.

BIBLIOGRAFÍA

CALAMA, R. & MONTERO, G.; 2004. Interregional nonlinear height-diameter model with random coefficients for stone pine in Spain. *Can. J. For. Res.* 34: 150-163.

CASTEDO, F.; DIÉGUEZ-ARANDA, U.; BARRIO, M.; SÁNCHEZ, M. & GADOW, K.V.; 2006. A generalized height-diameter model including random components for radiata pine plantations in northwestern Spain. *Forest Ecol. Manage.* 229: 202-213.

Curtis, R.; 1967. Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-fir. *For. Sci.* 13 (4): 365-375.

Diéguez-Aranda, U.; Rojo Alboreca, A.; Castedo-Dorado, F.; Álvarez González, J.G.; Barrio-Anta, M.; Crecente-Campo, F.; González González, J.M.; Pérez-Cruzado, C.; Rodríguez Soalleiro, R.; López Sánchez, C.A.; Balboa-Murias, M.A.; Gorgoso Varela, J.J. y Sánchez Rodríguez, F.; 2009. *Herramientas selvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia.* Xunta de Galicia. Santiago de Compostela.

Fang, Z. & Bailey, R.; 2001. Nonlinear mixed effects modelling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *For. Sci.* 47: 287-300.

Fox, J.; Ades, P. & Bi, H.; 2001. Stochastic structure and individual-tree growth models. *Forest Ecol. Manage.* 154: 261–276.

Huang, S.; Titus, S. & Wiens, D.; 1992. Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species. *Can. J. For. Res.* 22: 1297-1304.

Lappi, J.; 1986. Mixed linear models for analyzing and predicting stem form variation of Scots pine. *Commun. Inst. For. Fenn.* 34: 1–69.

Lappi, J.; 1991. Calibration of height and volume equations with random parameters. *For. Sci.* 37: 781-801.

Larsen, D. & Hann, D.; 1987. *Height-diameter equations for seventeen tree species in southwest Oregon* (Vol. 46). Oregon State University Seafood Research Laboratory. Corvallis.

López, C.A.; Gorgoso, J.J.; Castedo, F.; Rodríguez, R.; Álvarez, J.G. y Sánchez, F.; 2003. A height-diameter model for Pinus radiata D. Don in Galicia (Northwest Spain). *Ann. For. Sci.* 60: 237-245.

Prodan, M.; Peters, R.; Cox, F. & Real, P.; 1997. *Mensura Forestal.* Costa Rica: Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA).

SAS Institute, I.; 2004. *SAS/STAT™. 9.1.* User´s Guide. CARY.

Schnute, J.; 1981. A versatile growth model with statistically stable parameters. *Can. J. For. Res.* 38: 1128-1140.

Tomé, M.; 1989. *Modelaçao do crescimento da árvore individual em povoamentos de Eucalyptus globulus Labill. (1ª rotaçao) na regiao centro de Portugal.* Ph. D. Thesis. Lisboa, Portugal: Instituto Superior de Agronomía.

West, P.; Ratkowsky, D. & Davis, A.; 1984. Problems of hypothesis testing of regressions with multiple measurements from individual sampling units. *Forest Ecol. Manage.* 7: 207–224.