

MODELO DE DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS PARA MASAS DE ABEDUL EN EL NOROESTE DE ESPAÑA USANDO LA FUNCIÓN BETA

J. Javier Gorgoso Varela¹ y Alberto Rojo Alboreca²

¹ Departamento de Biología de Organismos y Sistemas. E.U. de Ingenierías Técnicas. Universidad de Oviedo. C/ Gonzalo Gutiérrez Quirós s/n. 33600-MIERES (Asturias-España). Correo electrónico: gorgoso@uniovi.es

² Departamento de Enxeñaría Agroforestal. Escola Politécnica Superior. Universidade de Santiago de Compostela. Campus Universitario s/n. 27002-LUGO (España)

Resumen

En este estudio se ha comprobado la bondad de ajuste de la función Beta a distribuciones diamétricas de masas procedentes de regeneración natural y plantaciones de abedul (*Betula alba* L.) en Galicia, empleando para ello un total de 125 parcelas permanentes. Se han comparado dos métodos de ajuste: regresión no lineal y el método de los momentos, empleando como estadísticos de comparación el sesgo, el error medio absoluto, el error medio cuadrático y el número de parcelas rechazadas por el test de Kolmogoroff-Smirnoff. Luego los parámetros de la función han sido recuperados a partir de los momentos de primer y de segundo orden de las distribuciones (diámetro medio y varianza respectivamente), y los extremos de la función fueron predichos con variables de masa de fácil obtención a partir de las tablas de producción para la especie en Galicia: diámetro medio cuadrático (d_q), altura dominante (H_0), área basimétrica (G), edad (t), densidad (N) y el Índice de Hart-Becking (IH). Los resultados han mostrado una buena adaptación de la función a masas con diferentes orígenes (regeneración natural y plantaciones) con un comportamiento similar de las dos metodologías de ajuste. Una vez modelizados los parámetros de la función se han rechazado 21 parcelas por el test de Kolmogoroff-Smirnoff con un nivel de significación del 5%, lo que supone un 17% del total de parcelas.

Palabras clave: *modelo de clases diamétricas, regresión no lineal, método de los momentos, Betula alba*

INTRODUCCIÓN

Los modelos de clases diamétricas son herramientas muy útiles para describir y predecir la estructura de las masas forestales, proporcionan información sobre la estabilidad de las masas, facilitan la planificación de tratamientos selvícolas, proporcionan información sobre el uso industrial de la madera, sobre el tipo de maquinaria más adecuada para los aprovechamientos forestales, etc.

El primer trabajo de caracterización de las distribuciones diamétricas fue llevado a cabo por DELIQCOURT (1898) quien construyó un modelo basado en la progresión geométrica (distribución exponencial) para bosques de masas irregulares.

Otros modelos de clases diamétricas se han aplicado a distribuciones de frecuencias de masas regulares y coetáneas. En este caso el histograma de frecuencias en un rango diamétrico dado adopta una forma típica unimodal o de

“Campana de Gauss”, cuyas formas varían en función de los coeficientes de asimetría y kurtosis de la función. Como ejemplos se pueden citar trabajos en los que se han empleado las funciones “A” y “B” de densidad de Charlier (SCHNUR, 1934), y otras que se adaptan a ambos tipos de masas (regulares e irregulares), como la distribución Gamma (NELSON, 1964), la función triparamétrica logarítmica normal o Lognormal (BLISS & REINKER, 1964), la función de densidad SB de Johnson (JOHNSON & KITCHEN, 1971) o la función Weibull (BAILEY & DELL, 1973).

La primera modelización o relación entre los parámetros de una función de densidad con variables de masa o con momentos de la distribución diamétrica fue realizada por CLUTTER & BENNETT (1965) en Georgia con *Pinus elliotii* Engelm. La función empleada fue la función Beta, utilizando la reparametrización de Pearson para la estimación de los parámetros. Esta misma función fue aplicada a distribuciones diamétricas en modelos desarrollados por MALTAMO et al. (1995) para *Pinus sylvestris* y *Picea abies* en Finlandia, por LI et al. (2002) para modelizar la distribución Beta bivariante generalizada (GBD-2) aplicada a datos de diámetros y alturas de *Pseudotsuga menziesii* en Idaho, o por WANG & RENNOLLS (2005), quienes la encontraron más precisa que la SB de Johnson en masas de *Cunninghamia lanceolata*. En España esta función también fue empleada por ÁLVAREZ-GONZÁLEZ (1997), quien la comparó con otras de frecuente uso en el ámbito forestal aplicadas a datos de *Pinus pinaster* en Galicia, y por ÁLVAREZ-TABOADA Y LÓPEZ-SÁNCHEZ (2001) en rodales regulares de *Quercus robur* en la provincia de Lugo.

En este trabajo se pretende desarrollar un modelo de clases diamétricas utilizando la función Beta, ya que es lo suficientemente flexible para adaptarse tanto a masas regulares como irregulares, por lo que puede describir y predecir las distribuciones de diámetros de los abedulares del noroeste de España. Además servirá de complemento al modelo basado en la función Weibull biparamétrica desarrollado para la especie en esta región (GORGOSO et al., 2007) y a otros modelos de crecimiento existentes (ROJO et al., 2005; DIÉGUEZ-ARANDA et al., 2006). Para ello se han empleado datos procedentes de masas con distinto origen: regeneración natural y regeneración mediante plantación.

MATERIAL Y MÉTODOS

Toma de datos de campo

Para describir las distribuciones diamétricas de las masas se han empleado datos procedentes del primer inventario de una red de 125 parcelas permanentes. En la selección de parcelas se ha pretendido conseguir una muestra representativa de edades, densidades y calidades de estación de las masas forestales puras de *Betula alba* en Galicia.

Una vez localizadas las masas de interés se procedió a instalar las parcelas de inventario. Se comenzó por su replanteo, siendo de forma rectangular y con dimensiones entre los 200 y los 1.000 m² según fuera su densidad de forma que incluyeran un mínimo de 30 árboles por parcela. A continuación se midió el diámetro normal de todos los pies superiores a 5 cm en direcciones perpendiculares, empleando una forcípula de brazo móvil graduada en mm. La edad se estableció mediante conteo de anillos en el tocón después del apeo de dos árboles tipo dominantes en las proximidades de cada parcela. En la tabla 1 se muestran los estadísticos que definen las variables de masa más representativas de las 125 parcelas utilizadas en el estudio.

Dada la gran diversidad en cuanto al origen, grado de evolución y selvicultura realizada en las masas, se ha considerado oportuno realizar una exploración previa de los datos disponibles, para valorar la posibilidad de tratarlos conjuntamente o dividirlos según provengan de masas más homogéneas. Finalmente los datos se clasificaron en dos grupos atendiendo a las anotaciones de campo: masas procedentes de regeneración natural (83 parcelas, lo que supone un 66% del total) y plantaciones (42 parcelas, lo que supone un 34% del total). Dado el temperamento heliófilo de la especie la mayoría de las masas resultaron ser regulares, aunque también se encontró un pequeño porcentaje con estructura característica de las masas irregulares.

Ajuste de los parámetros de la función

La forma general de la función de densidad Beta es la siguiente:

$$f(x) = c \cdot (x - L)^{\alpha} \cdot (U - x)^{\gamma} \quad L \leq x \leq U \quad [1]$$

$x = 0$ en otro caso

siendo $f(x)$ el valor de la frecuencia relativa para un valor x de la variable aleatoria que se corres-

Variable	Media	Máximo	Mínimo	Desv. tip.
d_g (cm)	14,1	23,2	7,4	3,5
\bar{d} (cm)	13,5	22,5	7,1	3,5
d_{min} (cm)	6,4	14,0	5,0	2,0
d_{max} (cm)	23,9	48,2	11,9	6,9
N (pies/ha)	1.793,3	6.000,0	390,0	1.134,3
t (años, de 2 árboles tipo apeados)	30,1	60,0	12,0	9,4
H_0 (m)	15,0	23,8	7,2	3,6
G (m ² .ha ⁻¹)	24,6	66,5	3,3	10,7
$I.H.$	19,3	59,2	8,3	8,7

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de las principales variables dasométricas de las 125 parcelas inventariadas (año de inventario: 1998/99). d_g : diámetro medio cuadrático; \bar{d} : diámetro medio; d_{min} : diámetro mínimo; d_{max} : diámetro máximo; N : densidad; t : edad; H_0 : altura dominante; G : área basimétrica; $I.H.$: Índice de Hart-Becking; Desv. tip.: desviación típica

ponde con el centro de clases diamétricas de tamaño igual a 1 cm, U es el límite superior de la distribución Beta, L es el límite inferior de la distribución, α es el primer exponente de la función, γ es el segundo exponente de la función y c es el factor de escala. Los parámetros α , γ y c primero han sido estimados mediante el ajuste a las 125 distribuciones diamétricas. Para ello se han fijado los extremos de la distribución igual al diámetro máximo y al diámetro mínimo inventariados (ZÖHRER, 1970). Los ajustes de la función se han realizado mediante dos procedimientos: regresión no lineal y método de los momentos.

En el método de regresión no lineal la estimación de los parámetros se ha llevado a cabo por mínimos cuadrados con el procedimiento NLIN en SAS/STAT™.

El método de los momentos (LOESTCH et al., 1973; MALTAMO et al., 1995) consiste en estimar los parámetros α y γ de la función a partir del primer y del segundo momento de la distribución, es decir, del diámetro medio (\bar{d}) y de la varianza (σ^2). Los parámetros de la función se obtienen mediante las siguientes ecuaciones:

$$\gamma = \frac{Z}{\sigma_{rel}^2 \cdot (Z+1)^2} - 1 \quad [3]; \quad \alpha = Z \cdot (\gamma + 1) - 1 \quad [4]$$

donde:

$$Z = \frac{x_{rel}}{1 - x_{rel}} \quad [5]; \quad x_{rel} = \frac{\bar{d} - L}{U - L} \quad [6];$$

$$\sigma_{rel}^2 = \frac{\sigma^2}{(U - L)^2} \quad [7]$$

El parámetro de escala c se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$c = \frac{1}{(-L + U)^{1+\gamma} \cdot \Gamma(1+\alpha) \cdot \Gamma(1+\gamma)} \quad [8];$$

$$\left(\frac{1}{-L + U} \right)^\alpha \cdot \Gamma(2+\alpha + \gamma)$$

donde $\Gamma(i)$ es la función Gamma en el punto i .

Los dos métodos de ajuste se han aplicado por separado a las parcelas procedentes de regeneración natural, a las procedentes de plantación y a todos los datos en conjunto.

Determinación de la bondad de los ajustes

La bondad de los ajustes ha sido evaluada con el sesgo, el error medio absoluto (EMA) y el error medio cuadrático (EMC), calculados con las siguientes expresiones:

$$Sesgo = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i - \hat{Y}_i}{N} \quad [9]; \quad EMA = \frac{\sum_{i=1}^N |Y_i - \hat{Y}_i|}{N} \quad [10];$$

$$EMC = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N} \quad [11]$$

donde Y_i es el valor observado, \hat{Y}_i es el valor teórico predicho por el modelo y N es el número total de datos. Estos estadísticos han sido calculados para cada ajuste como promedio de frecuencias de árboles, en tanto por uno, para todas las clases diamétricas y todas las parcelas.

Cada ajuste también ha sido testado con el test de Kolmogoroff-Smirnoff (KS). Para realizar dicho test se ha calculado el estadístico D_n ,

que representa la máxima discrepancia entre la distribución real acumulada y la teórica:

$D_n = \text{máximo } |F(x_i) - F_0(x_i)| \quad \forall 0 \leq i \leq n$ [12], estableciéndose un nivel de significación del 5%.

Modelización de los parámetros de la función

La modelización de los parámetros de la función Beta se realizó mediante el método de los momentos. Con este método el diámetro medio (\bar{d}) y la varianza (σ^2) deben ser conocidos (momentos de primer y de segundo orden de la distribución, respectivamente). La varianza ha sido estimada con la siguiente expresión: $\sigma^2 = d_g^2 - \bar{d}^2$ [13]. El diámetro medio (\bar{d}) ha sido relacionado con el diámetro medio cuadrático y con variables de masa utilizando un modelo en el que el diámetro medio estimado es siempre menor que el diámetro medio cuadrático (FRAZIER, 1981).

Para la modelización de los extremos superior (U) e inferior (L) de la distribución se han probado diferentes modelos lineales que relacionan el diámetro mínimo y el diámetro máximo de las distribuciones con variables de masa fácilmente obtenibles de las tablas de producción para el abedul en Galicia (ROJO et al., 2005), como son el diámetro medio cuadrático (d_g), la altura dominante (H_0), el área basimétrica (G), la edad (t), la densidad (N) y el Índice de Hart-Becking (IH). Para la inclusión de variables explicativas significativas en los modelos lineales que predicen L y U se ha realizado una regresión paso a paso considerando siempre que no hubiera multicolinealidad entre ellas, para lo que se ha tenido en cuenta que el factor de influencia de la varianza FIV sea inferior a 10 (RYAN, 1997).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La tabla 2 recoge los valores promedio del sesgo, del error medio absoluto (EMA) y del

error medio cuadrático (EMC), expresados en frecuencias relativas del número de pies en tanto por uno, y el número de parcelas excluidas por el test de Kolmogoroff-Smirnoff en los dos métodos de ajuste y para distintos orígenes de las masas.

Los resultados son prácticamente iguales en términos de EMC con los dos métodos de ajuste, pero el número de rechazos por el test de KS es algo menor con el método de los momentos, que sólo excluye a una parcela frente a las tres parcelas excluidas en el caso de la regresión no lineal. Los valores del EMA y del sesgo también son muy parecidos, pero los resultados son algo favorables al método de los momentos. En cuanto al origen de la masa, se obtienen resultados más precisos en el ajuste de las distribuciones de masas procedentes de regeneración natural, que como ya se ha indicado suponen un 66% del total.

La figura 1 (a y b) muestra la evolución del EMC para la regresión no lineal y para el método de los momentos en cada clase diamétrica y para las masas procedentes de regeneración natural, de plantaciones y para el conjunto de los datos. En las figuras se observa que para los dos métodos de ajuste las mayores diferencias se encuentran en las clases diamétricas centrales (entre 13 y 25 cm de diámetro), que son las que tienen un mayor número de pies. Mediante la observación de los histogramas de frecuencias de las parcelas se ha constatado que pocas masas procedentes de regeneración natural tienen el patrón típico de “J invertida”, posiblemente debido al temperamento heliófilo de la especie y a los tratamientos selvícolas aplicados, generalmente claras por lo bajo en las que se han eliminado los pies de las clases diamétricas inferiores. En otras se ha encontrado un número de pies muy similar o algo superior en la segunda clase diamétrica al de la primera, para luego decrecer en las clases diamétricas siguientes. Por tanto, no existe una explicación clara a las diferencias que se han

	Regresión no lineal				Método de los momentos			
	Sesgo	EMA	EMC	KS	Sesgo	EMA	EMC	KS
Plantaciones	-0,00059	0,02088	0,00094	1	-0,00009	0,02149	0,00093	0
Regeneración natural	-0,00098	0,01304	0,00039	2	0,00044	0,01289	0,00039	1
Total casos	-0,00091	0,01384	0,00047	3	0,00046	0,01372	0,00047	1

Tabla 2. Valores promedio del sesgo, del error medio absoluto (EMA), del error medio cuadrático (EMC) y n° de parcelas excluidas por el test de Kolmogoroff-Smirnoff (KS) con $\alpha=5\%$ obtenidos en el ajuste de la función Beta

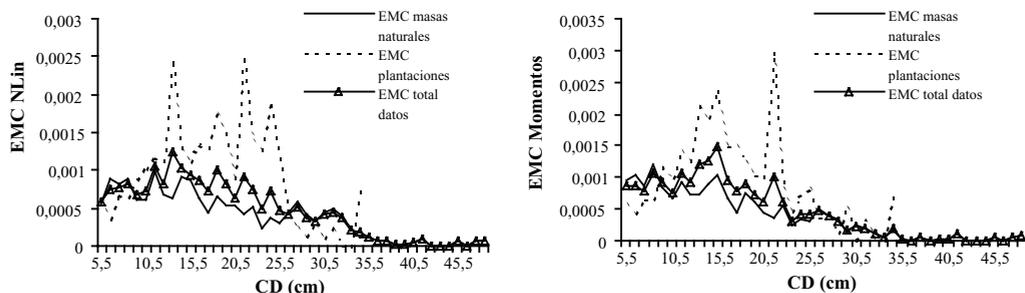


Figura 1 (a y b). Evolución del error medio cuadrático (EMC) en el ajuste por el método de regresión no lineal (izquierda) y por el método de los momentos (derecha) en cada clase diamétrica para las masas procedentes de regeneración natural, de plantaciones y para el conjunto de los datos

Sesgo	EMA	EMC	KS
0,00216	0,01527	0,00065	21

Tabla 3.- Valores promedio del sesgo, del error medio absoluto (EMA), del error medio cuadrático (EMC) y nº de parcelas excluidas por el test de Kolmogoroff-Smirnoff (KS) con $\alpha=5\%$ obtenidos en la modelización de la función Beta

encontrado en los ajustes a las masas naturales y plantaciones, por lo que tal vez debiera comprobarse el origen de las masas en próximas remediciones que se realizarán para la elaboración de modelos dinámicos para la especie en la región.

Para la modelización del diámetro medio se ha ajustado un modelo que permite obtenerlo en función del diámetro medio cuadrático d_g , de la altura dominante H_0 y de la edad t , no resultando significativa la densidad de la masa a un nivel de significación del 5%:

$$\bar{d} = d_g - e^{-2,125+0,066 \cdot H_0+0,021 \cdot t}; R^2 = 0,941$$

Una vez obtenida la varianza por la diferencia de los cuadrados del diámetro medio cuadrático y el diámetro medio, se han relacionado los extremos de las distribuciones (diámetro mínimo y diámetro máximo) con las siguientes variables de masa:

$$L = -4,153 + 0,597 \cdot d_g + 0,101 \cdot IH + 0,001 \cdot N - 0,074 \cdot G; R^2 = 0,509$$

$$U = -1,106 + 0,999 \cdot d_g + 0,170 \cdot t + 0,385 \cdot H_0; R^2 = 0,668$$

donde d_g es el diámetro medio cuadrático (cm), IH el Índice de Hart-Becking, N la densidad (pies/ha), G el área basimétrica ($m^2 \cdot ha^{-1}$), H_0 la altura dominante (m) y t la edad (años). En ambos casos se obtuvo un factor de influencia de la varianza FIV inferior a 10, por lo que

puede considerarse que no existe multicolinealidad (RYAN, 1997).

En la tabla 3 se muestran los resultados obtenidos del sesgo, error medio absoluto (EMA), error medio cuadrático (EMC) y número de rechazos por el test de Kolmogoroff –Smirnoff para el conjunto total de parcelas una vez obtenidas las distribuciones teóricas Beta al ser modelizados sus parámetros por el método de los momentos.

BIBLIOGRAFÍA

- ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, J.G.; 1997. *Análisis y caracterización de las distribuciones diamétricas de Pinus pinaster Ait. en Galicia*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid. Madrid.
- ÁLVAREZ-TABOADA, M.F. Y LÓPEZ-SÁNCHEZ, C.A.; 2001. Caracterización de las distribuciones diamétricas de Quercus robur L. en Lugo (Galicia) mediante la función de densidad Beta. En: S.E.C.F.-Junta de Andalucía (eds.), *Actas del III Congreso Forestal Español. Montes para la sociedad del nuevo milenio 2001*, III: 814-820. Coria Gráficas. Sevilla.

- BAILEY, R.L. & DELL, T.R.; 1973. Quantifying Diameter Distributions with the Weibull Function. *For. Sci.* 19(2): 97-104.
- BLISS, C.I. & REINKER, K.A.; 1964. A log-normal approach to diameter distributions in even-aged stands. *For. Sci.* 10: 350-360.
- CLUTTER, J.L. & BENNET, F.A.; 1965. Diameter distributions in old-field slash pine plantations. *Ga. For. Res. Counc. Rep.* 13: 1-19., 9 pp.
- DELIOCOURT, F.; 1898. De l'aménagement des Sapinières. *Bul. Soc. For. Franche-Compté et Belfort*: 396-409.
- DIÉGUEZ-ARANDA, U.; GRANDAS-ARIAS, J.A.; ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, J.G. & GADOW K.V.; 2006. Site quality curves for birch stands in north-western Spain. *Silva Fennica* 40(4): 631-644.
- FRAZIER, J.R.; 1981. *Compatible whole-stand and diameter distribution models for loblolly pine*. Ph. D. thesis., VPI & SU (Unpublished).
- GORGOSO, J.J.; ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, J.G.; ROJO, A. & GRANDAS-ARIAS, J.A.; 2007. Modelling diameter distributions of *Betula alba* L. stands in northwest Spain with the two-parameter Weibull function. *Inv. Agrar.; Sist. Rec. For.* 16(2): 113-123.
- JOHNSON, N.L. & KITCHEN, J.O.; 1971. Some notes on tables to facilitate fitting S_B curves. *Biometrika* 58(1): 223-226.
- LI, F.; ZHANG, L. & DAVIS, C.J.; 2002. Modeling the joint distribution of tree diameters and heights by bivariate generalized Beta distribution. *For. Sci.* 48(1): 47-58.
- LOETSCH, F.; ZÖHRER, F. & HALLER, K.E.; 1973. *Forest inventory 2*. Verlagsgesellschaft. BLV. Munich.
- MALTAMO, M.; PUUMALAINEN, J. & PÄIVINEN, R.; 1995. Comparison of Beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. *Scan. J. For. Res.* 10: 284-295.
- NELSON, T.C.; 1964. Diameter distribution and growth of loblolly pine. *For. Sci.* 10: 105-115.
- ROJO, A.; ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, J.G.; GRANDAS, J.A. Y DIÉGUEZ-ARANDA, U.; 2005. Tablas de producción de selvicultura media para el abedul (*Betula alba* L.) en Galicia. En: S.E.C.F.-Gobierno de Aragón (eds.), *Libro de resúmenes, conferencias y ponencias 4º IV Congreso Forestal Español*. CD-Rom. Imprenta Repes S.C. Zaragoza.
- RYAN, T.P.; 1997. *Modern regression methods*. Ed. Wiley., INC.
- SCHNUR, G.L.; 1934. Diameter distributions for old-field loblolly pine stands in Maryland. *J. Agric. Res.* 49: 731-743.
- WANG, M. & RENNOLLS, K.; 2005. Tree diameter distribution modelling: introducing the logit-logistic distribution. *Can. J. For. Res.* 35: 1305-1313.
- ZÖHRER, F.; 1970. The beta distribution for best fit of stem diameter distributions. In: *Third conference advisory group of forest statisticians*: 91-106. INRA. Jouy-en-Josas.