

Aplicación del teorema de Leray – Schauder a un problema de borde

Application of Leray–Schauder’s theorem a boundary problem

Pedro Pablo Cárdenas Álzate, Luz María Rojas Duque¹, José Gerardo Cardona Toro

Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira – Colombia

ppablo@utp.edu.co

lmrojas@funandi.edu.co

lmrojasd@utp.edu.co

gerardo7@utp.edu.co

Resumen - En el presente artículo¹ se muestra una aplicación de existencia de solución para un problema de contorno usando el teorema de Leray-Schauder. Bajo condiciones apropiadas, se prueba la existencia y unicidad de un problema no lineal de segundo orden.

Palabras clave - Contorno, punto fijo, Leray-Schauder.

Abstract- This article it show an application of the existence of solution for a boundary problem using the Leray-Schauder theorem. Under proper conditions, we prove the existence and uniqueness for a non-linear second order.

Key Word- Boundary, fixed point, Leray - Schauder.

I. INTRODUCCIÓN

Se considera el siguiente problema periódico

$$\begin{cases} u'' = f(t, u) \\ u(0) = u_0, u(1) = u_1 \end{cases} \quad (1.1)$$

donde por simplicidad se supone que f es continua y de clase C^1 respecto a la variable u , y f acotada y continua.

Para ello se usarán resultados del teorema de punto fijo de Schauder en la búsqueda de existencia de solución. Además se tratará el caso semilineal.

II. TEOREMA DE LERAY – SCHAUDER

Teorema 2.1 (Leray-Schauder). Sea E un espacio de Banach y sea $T: E \times [0,1] \rightarrow E$ una aplicación compacta tal que $T(x, 0) = 0, \forall x \in E$. Si $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in E$ que verifique $T(x, \alpha) = x$ para algún $\alpha \in [0,1]$ se tiene que $\|x\| < M$, entonces $\exists x \in E$ tal que $T(x, 1) = x$.

Para ver los detalles de la demostración de este teorema, se invita al lector ver [1].

Es importante recordar que el teorema de punto fijo de Schauder es la generalización del teorema de punto fijo de Brouwer en dimensión infinita; por ello se recuerda dicho teorema importante de la topología. Recordemos entonces dicho teorema:

Teorema 2.1. (Brouwer). Considérese un espacio H Hilbert de dimensión finita, $C \subset H$ un conjunto compacto, convexo no vacío. Si $f: C \rightarrow C$ es una función continua, entonces la función tiene un punto fijo. [1]

Teorema 2.2. (Schauder). Sea C un subconjunto convexo y compacto en E , espacio de Banach. Si $T: C \rightarrow C$ es continuo, entonces T tiene un punto fijo. [1].

Ahora, se hace mención de un corolario del teorema de Leray-Schauder que será de gran importancia para lo que se pretende hacer.

¹ Departamento de Ciencias Básicas, Fundación Universitaria del Área Andina, Pereira – Colombia, Departamento de Matemáticas – Universidad Tecnológica de Pereira

Fecha de Recepción: 26 de Enero de 2012

Fecha de Aceptación: 18 de Abril de 2012

Corolario 2.1. Sean E un espacio de Banach y $K: E \rightarrow E$ una aplicación compacta. Si $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in E$ que cumpla $x = \sigma Kx$ para algún $\sigma \in [0,1]$ se tiene que $\|x\| < M$, entonces K tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Tomando $T: E \times [0,1]$ como $T(x, t) = tKx$, T cumple las hipótesis del teorema, luego

$$\exists x \in E: x = T(x, 1) = Kx$$

Para otra demostración sin usar el teorema anterior, se invita al lector ver [1].

III. MÉTODO DE SUPER Y SUB-SOLUCIÓN

Una *Sub-solución* es cualquier función α que cumpla

$$\begin{cases} \alpha'' \geq f(t, \alpha) \\ \alpha(0) \leq A, \alpha(T) \leq B \end{cases}$$

Una *Super-solución* es cualquier función β que cumpla

$$\begin{cases} \beta'' \leq f(t, \beta) \\ \beta(0) \geq A, \beta(T) \geq B \end{cases}$$

Sean α y β super y sub-solución del problema (1.1) de manera que $\alpha \leq \beta$. Defínase además el conjunto

$$\{u \in C([0,1]): \alpha \leq u \leq \beta\}$$

Para la existencia de solución del problema en cuestión se usará la función de truncamiento

$$P: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida como:

$$P(t, u) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{si } \alpha(t) > u \\ u, & \text{si } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t) \\ \beta(t), & \text{si } \beta(t) < u \end{cases}$$

IV. RESULTADOS DE EXISTENCIA DE SOLUCIÓN

Se quiere probar la existencia de al menos una solución de

$$\begin{cases} u'' = f(t, u) \\ u(0) = u_0, \quad u(T) = u_1 \end{cases}$$

donde por simplicidad se supone que f es continua y de clase C^1 respecto a la variable u .

■ **Teorema 3.1.** Supóngase que existen α y β sub-solución y super-solución respectivamente tales que $\alpha \leq \beta$. Entonces existe al menos una solución u de (1.1) con la condición de que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Demostración. Sea el conjunto (Banach)

$$C[0, T] = \{u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continua}\}$$

con

$$\|u\| = \sup_{0 \leq t \leq T} |u(t)|$$

Considérese además el conjunto

$$E = \{u \in C[0, T]: \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \forall t\}$$

Defínase el operador

$$T: E \rightarrow C[0, T]$$

compacto y puede verse que $T(E) \subset E$ (acá, E cerrado, convexo y acotado).

Siendo $\lambda \geq 0$, resulta que si

$$\begin{cases} u'' - \lambda u \geq 0 \\ u(0), u(T) \leq 0 \end{cases}$$

entonces, $u \leq 0$ en $[0, T]$. Esto puede justificarse de la siguiente manera:

Para $\lambda > 0$, si existe un t_0 tal que $u(t_0) > 0$, puede suponerse que $u(t_0)$ es máximo y entonces

$$u''(t_0) \geq \lambda u(t_0) > 0$$

lo cual es un absurdo.

Ahora, si $\lambda = 0$, entonces $u'' \geq 0$ y el resultado es trivial.

Elijase $\lambda < 0$ tal que $\varphi(u) = f(t, u) - \lambda u$ (t fijo) sea decreciente en u para $\alpha(t) \leq u \leq \beta(t)$.

Se resuelve para $v > 0$ (fijo) el siguiente problema:

$$\begin{cases} u'' - \lambda u = f(t, v) - \lambda v \\ u(0) = A, \quad u(T) = B \end{cases} \quad (3.1)$$

El operador $T: E \rightarrow C[0, T]$ es compacto (se requiere que sea compacto porque es una de las hipótesis del teorema de Schauder; debe recordarse que esto significa que para cualquier acotado C , la clausura de $T(C)$ es compacta), y además $T(C) \subset E$, pues si $\alpha \leq v \leq \beta$, entonces:

$$u'' - \lambda u = f(t, v) - \lambda v \leq f(t, \alpha) - \lambda \alpha \leq \alpha'' - \lambda \alpha$$

luego,

$$(u - \alpha)'' - \lambda(u - \alpha) \leq 0$$

y

$$(u - \alpha)(0), \quad (u - \alpha)(T) \geq 0$$

así, $(u - \alpha) \geq 0$.

Del mismo modo $(u - \beta) \leq 0$, entonces $\alpha \leq u \leq \beta$, luego por el teorema de Schauder, T tiene un punto fijo (que en este caso se obtiene dentro de E) que es solución de (3.1).

Se analiza a continuación la ecuación:

$$u'' - f(t, u, u') = 0 \quad (4.2)$$

con las condiciones de borde

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1$$

donde $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Supóngase entonces que $\alpha \leq \beta$ son funciones suaves que satisfacen las condiciones:

$$\alpha'' \geq f(t, \alpha, \alpha')$$

Y

$$\beta'' \leq f(t, \beta, \beta')$$

con

$$\alpha(0) \leq u_0 \leq \beta(0), \quad \alpha(1) \leq u_1 \leq \beta(1)$$

A continuación se trabaja con el espacio $C^1([0, 1])$, con la norma definida por

$$\|u\|_{C^1} = \max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\},$$

En consecuencia, si se desea aplicar el teorema de Schauder en este espacio se debe encontrar una región invariante que además de ser conexa y cerrada, esta debe ser acotada. Esto requiere obtener estimaciones a priori de la derivada. Más precisamente, lo que se hace es encontrar una solución del problema en la región

$$C = \{u \in C^1([0, 1]): \alpha \leq u \leq \beta, \|u'\|_\infty \leq R\},$$

para cierto R apropiado. De forma similar a la solución del problema (1.1), se buscará una solución del problema truncado: dado $\lambda > 0$, se plantea:

V. PROBLEMA SEMILINEAL

$$u'' - \lambda u = f(t, P(t, u), Q(u')) - \lambda P(t, u)$$

con condiciones $u(0) = u_0, u(1) = u_1$, donde

$$P(t, u) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{si } \alpha(t) > u \\ u, & \text{si } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t) \\ \beta(t), & \text{si } \beta(t) < u \end{cases}$$

y

$$Q(v) = \begin{cases} v, & |v| \leq R \\ R, & \text{si } v > R \\ -R, & \text{si } v < -R \end{cases}$$

Acá, de nuevo el término de la derecha está acotado y el teorema de Schauder (ahora en $C^1([0,1])$) garantiza que existe al menos una solución. Se demuestra que bajo ciertas condiciones sobre la función f puede asegurarse que en realidad u es solución del problema original.

Supongamos que $u - \beta$ alcanza un valor máximo positivo en cierto $t_0 \in (0,1)$, entonces,

$$P(t_0, u(t_0)) = \beta(t_0)$$

Para aplicar la definición de super-solución se tendría que garantizar que

$$Q(u'(t_0)) = \beta'(t_0)$$

Pero nótese que t_0 es un punto crítico de $u - \beta$, de modo que $u'(t_0) = \beta'(t_0)$. Entonces basta pedir que

$$R \geq \max\{\|\alpha'\|_\infty, \|\beta'\|_\infty\}$$

para asegurar que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Se necesita luego probar que $\|u'\|_\infty \leq R$. Para esto se impone a la función f la condición de Nagumo.

Se va a pedir que en el conjunto

$$E = \{(t, u, v): t \in [0,1], \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), |v| < R\} \quad (4.3)$$

se cumpla :

$$|f(t, u, v)| \leq \varphi(|v|) \quad (4.4)$$

donde φ es una función que se llamará *conveniente*. Se trata probar que la solución u del problema anterior verifica que $|u'(t)| \leq R$ para todo t ; si esto no sucede y se tuviera por ejemplo que $u'(t) > R$ para algunos valores de t , entonces sería útil saber que entre ciertos $t_0 < t_1$ se tiene que $u'(t) < R$, donde $r > 0$ es una constante que no depende de u . Ahora bien, el único valor que se puede asegurar que la función u' alcanza efectivamente el valor que proporciona el teorema del valor medio:

$$u(1) - u(0) = u'(\xi)$$

para algún ξ . Entonces basta elegir

$$r = |u(1) - u(0)|$$

e imponer la condición que R sea estrictamente mayor que r .

Para terminar de deducir la condición de Nagumo, obsérvese ahora que:

$$\int_r^R \frac{ds}{\psi} = \left| \int_{t_0}^{t_1} \frac{u''(t)}{\psi(u'(t))} dt \right| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \frac{f(t, u, u')}{\psi(u'(t))} dt \right|$$

y como $\alpha \leq u \leq \beta$ y para todo $t \in (t_0, t_1)$ se cumple también

$$r < u'(t) < R$$

entonces:

$$\int_r^R \frac{ds}{\psi(s)} \leq \int_{t_0}^{t_1} \frac{\psi(u'(t))}{\psi(u'(t))} dt = t_1 - t_0 \leq 1$$

Un razonamiento análogo se puede hacer en el caso $u'(t) < -R$, de forma que la condición apropiada es la que se expresa en la siguiente proposición denominada *proposición de Nagumo*.

Sean $r = |u_1 - u_0|$ y $R \geq \max\{\|\alpha'\|_\infty, \|\beta'\|_\infty, r\}$ y asúmase que f cumple la condición (4.4) sobre el conjunto E definido en (4.3) para cierta ψ tal que:

$$\int_r^R \frac{ds}{\psi(s)} > 1$$

así, toda solución u del problema

$$u'' = f(t, u, Q(u')), \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1$$

con $\alpha \leq u \leq \beta$ verifica que:

$$\|u'\|_\infty < R$$

En particular, el problema (4.2) tiene solución.

Un resultado análogo se cumple para el problema periódico (que queda como problema abierto); en este caso α y β son funciones periódicas y en la condición de *Nagumo* se considera $r = 0$.

VI. CONCLUSIONES

Dentro de los métodos topológicos, los teoremas de punto fijo se han aplicado a la resolución de diversas ecuaciones no lineales [2], [3]. En este artículo se demostró utilizando el teorema de Schauder, la existencia de solución (bajo ciertas condiciones) de un problema periódico no lineal.

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario (2.1), se probó que el operador T definido para el problema (3.1) tenía un punto fijo, el cual dio solución a (1.1). Además se mostró que el problema (4.2) tiene solución aplicando el teorema de Schauder utilizando la condición (4.4).

Queda como problema abierto el caso periódico con condición de Nagumo $r = 0$.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo y las sugerencias recibidas por el Doctor Pablo Amster de la Universidad de Buenos Aires (Argentina) para la realización de este artículo.

REFERENCIAS

- [1] CÁRDENAS, P.P. Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira – Universidad de Buenos Aires (Argentina). 2004
- [2] AMSTER, P.G. Resolution of Semilinear Equations by Fixed Point Methods. Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin.
- [3] AMSTER, P, Pinnau, R., Large Convergent Iterative Schemes for a Nonisotropic Hydrodynamic Model for Semiconductors. ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik) Vol 82-8 (2002) 559-566.
- [4] CONWAY J. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985.