

Roberto TORRETTI, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1978, xiii, 459 pp.

Este libro, como nos dice su autor, es una exposición crítica y selectiva de la moderna filosofía de la geometría durante su período seminal, desde la concepción generalizada del espacio de Riemann de 1850 hasta la axiomática de Hilbert y el convencionalismo de Poincaré.

Por su amplitud de perspectiva y por su estructura, esta obra recuerda a uno de los primeros estudios detallados sobre el tema: *An Essay on the Foundations of Geometry*<sup>1</sup> de Bertrand Russell, con el que vale la pena establecer un detenido parangón.<sup>2</sup> Como la obra de Russell, la de Torretti nos ofrece un triple enfoque, histórico, sistemático y filosófico de las diversas cuestiones, que son sujetas a un tratamiento ambicioso y completo. El compromiso filosófico y sistemático es, sin embargo, con todas las ventajas e inconvenientes que ello implique, más acusado en la obra de Russell, en la que puede detectarse una marcada influen-

<sup>1</sup> Cambridge University Press, 1897. Hay traducción española no demasiado buena, de Julio Porcel, en B. RUSSELL, *Obras completas*, Tomo II: *Ciencia y Filosofía 1897-1919*, Madrid Aguilar, 1973.

<sup>2</sup> La obra de Russell se estructura en cuatro capítulos. En el primero se presenta la historia de la geometría a partir del descubrimiento de las geometrías no euclídeas, distinguiendo en ella tres períodos: 1) el descubrimiento de las geometrías no euclídeas, donde domina el afán de demostrar la independencia del axioma de las paralelas (Gauss, Bolyai, Lobachewski); 2) el intento, inspirado en la teoría de curvas de Gauss y la filosofía de Herbart, de clasificar el concepto del espacio como un caso particular del concepto de variedad y demostrar el carácter empírico de los axiomas geométricos (Riemann, Helmholtz, etc); 3) el desarrollo de la geometría proyectiva (Cayley, Klein, etc), que se caracteriza por un abandono de la cantidad como concepto geométrico esencial. En un segundo capítulo, Russell pasa revista a las concepciones filosóficas de Kant, Riemann, Helmholtz, Erdmann, Lotza, Delboeuf, etc; en un tercer capítulo establece los axiomas de la geometría proyectiva y métrica sin preocuparse de demostrar si sus axiomas caracterizan o no a dichas geometrías; y finalmente, en un cuarto capítulo, intenta demostrar que los axiomas presentados son *a priori* y necesarios para que podamos distinguir las cosas, siendo consecuencia de la existencia de una *forma de exterioridad*.

cia de Kant (para quien la geometría tiene certeza apodíctica y es *a priori*), aunque ponga el énfasis en la postura empirista, que considera a la geometría como una ciencia natural del rango de la mecánica.

Considerando que el origen de los problemas filosóficos de la geometría es Grecia, Torretti comienza su libro con unos interesantes comentarios sobre la geometría griega (desajuste entre la teoría de la ciencia de Aristóteles y la subyacente en los *Elementos* de Euclides, la influencia de Platón en la inexistencia de una física matemática en Grecia,...) y también sobre el concepto del espacio absoluto, inexistente como tal en Grecia y Roma, imaginado por los escolásticos y en pleno vigor en la Edad Moderna.

El segundo capítulo guarda analogía con el primero de la obra de Russell (véase nota 2), aunque lo mejora sustancialmente. En él expone Torretti el origen y antecedentes de la geometría no euclídea; refuta, presentando la concepción filosófica de Bolyai y Lobachewski, el tópico de que las geometrías no euclídeas han nacido *en contra* de Euclides, cuando lo que pretendían sus creadores era incorporar la geometría de Euclides en una geometría más general: la *geometría absoluta*; interpreta por medio de la teoría de variedades diferenciales el, para Russell, oscuro concepto de variedad en Riemann; establece el problema central de la geometría según Riemann: ¿cuáles son los hechos más simples que determinan las relaciones métricas del espacio?; resalta la naturaleza anti-intuitiva de la geometría proyectiva que ha sido pasada por alto por casi todos los filósofos; analiza certeramente las distintas métricas proyectivas y los modelos de Beltrami-Klein, y formula el importante problema de las formas espaciales de Clifford-Klein: ¿cuáles son los tipos de variedades riemannianas de curvatura cero globalmente no homeomórficas?

El tercer capítulo se dedica a presentar la consideración de una serie de investigaciones, pasadas por alto u olvidadas totalmente por Russell, relativas, por una parte, a la justificación de los principios geométricos y, por otra, a la axiomatización de la geometría. Respecto a las primeras, olvidándose de trabajos anteriores, discute el problema del espacio de Helmholtz: ¿qué propo-

siciones geométricas expresan verdades de importancia factuales y cuáles no?, así como la solución imperfecta de Helmholtz; el espacio es una variedad diferencial (hecho analítico) de 3 dimensiones (característica universal de la experiencia humana) en la que existen cuerpos rígidos (hecho experimental), y la formulación y la solución de la matematización del problema de Helmholtz realizadas por Lie usando los grupos continuos. Respecto a la axiomatización, después de presentar una serie de ideas generales (admiración por Euclides, la nula influencia de la geometría no euclídea y la influencia total de la proyectiva en la axiomatización, el carácter abstracto de la geometría, etc.) pasa revista a las opiniones sobre axiomática de Stewart, Grassmann, Plücker, etc., para terminar presentando los resultados de Legendre, Bolzano, Staudt, Pasch, Peano, Hilbert y otros, relativos a la elección de axiomas y conceptos primitivos y al perfeccionamiento de la axiomatización de la geometría.

En el cuarto capítulo se nos ofrece una panorámica de las diversas teorías filosóficas sobre la geometría agrupadas bajo los epígrafes: empirismo, "griterío de beocios", apriorismo de Russell y convencionalismo de Poincaré. En este capítulo Torretti mejora el segundo de la obra de Russell tanto al incluir teorías posteriores como en la forma de tratarlas. Mientras Russell observa las diversas concepciones bajo una óptica kantiana, Torretti está libre de dicho prejuicio, lo cual le permite presentar más objetivamente las teorías empíricas de Smith y Ueberweg, que no conocieron las geometrías no euclídeas, las de Erdmann, Calinon y Lechallas, que sufrieron el impacto de dichas geometrías, y la del pionero Mach, reconociendo que el problema central de todos ellos era la inexistencia en la experiencia de los objetos geométricos, y que todos ellos recurren a conceptos tales como *idealización*, *generalización*, etc., para establecer el carácter empírico de los objetos geométricos. Bajo el epígrafe "griterío de beocios" examina las teorías de Lotze, Wundt, Renouvier y Delboeuf, que sostenían la aprioridad de la geometría euclídea como basada en los principios regulativos del entendimiento, y muestra que es característica común a todos ellos el no haber comprendido ni a las

geometrías no euclídeas, ni a Gauss, ni a Riemann.

Finalmente se alude al apriorismo de Russell y al convencionalismo de Poincaré. Respecto al primero, se describen los capítulos 3 y 4 del referido libro de Russell, se presenta una serie de dificultades a sus conceptos (*forma de exterioridad*) y a sus demostraciones, con la indicación de que es poco probable que se pueda demostrar que un sistema geométrico menos general que la teoría de conjuntos sea un presupuesto general de toda experiencia humana. En cuanto al convencionalismo de Poincaré, Torretti advierte que tiene por base la imposibilidad de que la experiencia nos diga algo sobre la estructura del espacio, por lo que la elección de una geometría para describir los fenómenos es puramente convencional. También es expuesta la teoría psicológica de la génesis del concepto de espacio de Poincaré.

El libro termina con un apéndice en el que se expone la teoría de variedades diferenciales, y al que siguen una espléndida aunque incompleta bibliografía y un índice por materias y autores.

En esta obra se echa de menos un análogo del capítulo cuarto de Russell, donde se exponga la teoría propia de Torretti, así como el estudio de las concepciones del espacio posteriores a Poincaré (en las cuales se basa el autor para criticar e interpretar las teorías tratadas, y que, según nos anuncia, constituirán la materia de un nuevo libro).

Respecto a la forma de abordar algunos temas, considero un acierto por parte del autor el no haber separado como Russell los problemas filosóficos de los puramente matemáticos en autores como Riemann, Lobachewski y Klein, así como el amplio uso (aunque algunas veces pueda parecer abusivo) que hace de los resultados matemáticos actuales.

Algunas de las erratas importantes que hemos observado son: en la pág. 35, línea 33 dice "if  $b(XOY)$ ," y debería decir: "if  $X O$  and  $b(XOY)$ ,"; en la pág. 95 la fórmula (9) debe comenzar por  $\frac{d^2x^i \cdot \gamma}{dt^2} +$  en lugar de  $\frac{d^2x^i}{dt^2} +$ ; en la pág. 96 no queda claro por qué dadas las  $\frac{n(n+1)}{2}$  funciones  $g_{ij}$ , se necesitan todavía  $\frac{n(n-1)}{2}$  cantidades para determinar la estructu-

ra métrica de la variedad; en la pág. 172, línea 30 se dice "every  $h,g$  in  $M$ " y se debe decir "every  $h,g$  in  $G$ "; en la pág. 267, línea 13 se dice "fields on  $K$ " y se debe decir "fields on  $M$ ".

José Pedro Ubeda

I. M. CROMBIE, *Análisis de las doctrinas de Platón*, Vol. I: *El hombre y la sociedad*, 406 pp.; Vol. II: *Teoría del conocimiento y de la naturaleza*, 561 pp. Madrid: Alianza Universidad, 1979.

Crombie, un gran ausente de las reseñas de las revistas filosóficas de nuestro país, puede ser ahora fácilmente conocido en la traducción de Torán-Armero cuando su obra —*An Examination of Plato's Doctrines*— ha alcanzado la tercera reimpresión en el corto espacio de diez años. El estudio al que nos vamos a referir ha sido compendiado por el propio autor en una obra publicada en 1964 bajo el expresivo título *Plato Midwife's Apprentice*. En el estudio que comentamos se asignan como intereses fundamentales el rectificar tanto "la forma cruda" en que se presenta la doctrina ontológica ("los universales son en cierto modo independientes de los particulares"), como la epistemológica ("es imposible que haya algo que merezca llamarse conocimiento de los particulares que constituyen el mundo físico"). Para ello parte del análisis de la vinculación de Platón con la escuela de Heráclito y con Sócrates, expuesta en un conocido texto de *La Metafísica* de Aristóteles que, como en otros casos, es el que sale "peor parado" de esta historia por no habernos dicho lo que, en definitiva, nosotros deseamos saber: ¿Cuál es la opinión de Platón? Reproche latente y siempre imputado, pues se supone que nadie mejor que "el discípulo brillante" para transmitir las doctrinas del maestro.

Debe resaltarse que Crombie, con un estilo claro y directo, desarrolla esta temática rechazando deliberadamente el asignarse la posición de interlocutor de los comentaristas clásicos de Platón. En diversos lugares nos indica que desea acceder "al meollo", "captar la actitud típicamente platónica" a la vez que se cuestiona, por ser "una verdad a medias", que lo que interesara a Platón