

REVISTA DE LIBROS

DOU, Alberto. Fundamentos de la matemática. Ed. Labor, Nueva Colección, Barcelona, 1970, 139 págs.

"Las páginas que siguen arrojarán luz... en particular sobre la noción de verdad matemática" (pg. 11) nos dice A. Dou en la Introducción a esta pequeña obra. Bajo el rótulo "fundamentos de la matemática" se halla una referencia equívoca. Aquí se la entiende esencialmente como investigación de la verdad matemática. Y esa investigación se realiza en torno a las relaciones entre Lógica, Matemática y Realidad (o más bien "una realidad") en las tres corrientes logicista, formalista e intuicionista.

Es ésta la primera obra de un autor español sobre la temática de los fundamentos. Está orientada a estudiantes de graduación universitaria. Su finalidad, por tanto, es exponer de modo accesible las cuestiones de mayor interés en el contexto arriba mentado. La selección de aquéllas viene condicionada más por lo formal que por lo filosófico, y ello debe verse, en cierto modo, motivado por las fuentes principales de información de Dou: las obras de Mendelson¹, Kleene² y Kneebone³. En este sentido, son de destacar sus tratamientos del teorema de incomplitud de Gödel y de la lógica intuicionista de Heyting-Kleene.

El logicismo, "doctrina sobre los fundamentos de la matemática que considera la lógica como más fundamental que la matemática y efectúa la reducción de los conceptos y métodos de inferencia matemática a los correspondientes de la lógica, concluyendo consiguientemente que la matemática no es más que una rama de la lógica" (pg. 59), es presentado, principalmente, según los Principia Mathematica de Russell-Whitehead, con lo que, aunque ligeramente descuidados (cosa realmente inevitable en obras reducidas como la presente) los hallazgos de Peano-Frege, se suministra al lector una base suficiente para comprender lo que supone sacar a la luz un concepto como el de predicatividad y montar sobre él el edificio de la teoría de los tipos como medio de evitar las paradojas, por haberse descubierto en la mayor parte de las mismas procesos de carácter impredicativo. Quizás impedida su visión por prejuicios antilogicistas, Dou, sin embargo, no se muestra a la misma altura aquí que en páginas posteriores.

De las tres corrientes es, a mi parecer, la formalista la mejor tratada. La distinción clara y sencilla que establece entre axiomáticas materiales o genéticas (en que se "engendran" los axiomas, teniendo sentido y contenido) y axiomáticas formales (en que los elementos primitivos carecen de sentido esencial y su manejo o único sentido formal viene definido implícitamente por los axiomas y reglas de inferencia) es el medio de mostrar idoneamente en qué difiere una axiomática como la russelliana de la axiomática de Hilbert. Mención especial, como ya hemos dicho, merece su tratamiento del teorema de incompletitud de Gödel, cuya exposición informal, pero suficientemente precisa, permitirá al lector formarse una idea clara de en qué consiste aquél.⁴

En el capítulo del intuicionismo; "la matemática propiamente tal es construida por la intuición en nuestra conciencia al contacto con la forma interna de nuestra sensibilidad, es decir, gracias a un apriorismo temporal" (pg. 132), expone Dou - tras referirse a la oscura noción de construcción y a las relaciones entre matemática clásica y matemática intuicionista - una lógica intuicionista, según el modelo de Heyting⁵ - Kleene, novedosa en textos de este alcance. Su examen del sentido del conector intuicionista de negación a través del principio de contradicción y de tercio excluso está entre las páginas de mayor valor pedagógico, a mi parecer, de la obra entera.

Así, llevado el lector de la mano por Dou, atraviesa las fases de tiranía de la matemática por la lógica en el logicismo, de tiranía de la lógica por la matemática⁶ en el intuicionismo y de independencia y libre convivencia de una y otra en el formalismo, y respecto de la verdad matemática se ve forzado a concluir con el autor de la obra: "lo intencional de nuestro conocimiento matemático tiene que ser isomorfo con una realidad que para el logicismo o matemático clásico se encuentra en el mundo; para el intuicionismo dicha realidad fundamental está en nuestra conciencia; para el formalista en una posición intermedia que podemos caracterizar diciendo que está en el papel, o mejor, en el esquema trascendental del entendimiento humano" (pg. 137).

De todo lo dicho pueden desprenderse fácilmente los méritos que esta obra presenta. En el capítulo de críticas sólo queremos hacer constar la siguiente. La finalidad de la obra, repetimos, es arrojar luz sobre la noción de verdad matemática. Tal noción, en la vetiente lógica intersecada con la matemática, la creemos encontrar expuesta por primera vez con rigor en la teoría de modelos de A. Tarski. Es, pues, curioso el poco espacio que la noción semántica de modelo ocupa en el escrito de Dou y que conlleva, en el plano sintáctico, un tratamiento no suficiente de la noción de conjunto.

1. Mendelson, E. Introduction to mathematical logic. Nueva York: Van Nostrand, 1964.
2. Kleene, S. C. Introduction to metamathematics. Nueva York: Van Nostrand, 1952.
3. Kneebone, G. T. Mathematical logic and the foundations of mathematics. Londres: Van Nostrand, 1963.
4. Véase: A. Dou, "El teorema de incomplitud de Gödel", en Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, nº 10, Zaragoza, 1969.
5. Heyting, A. Intuitionism. An Introduction. Amsterdam: North-Holland, 1956.
6. La lógica intuicionista es el fruto de una especulación de cariz matemático sobre la matemática misma o sobre su expresión oral o escrita.