casi exhaustiva, de la gran cantidad de ejercicios importantes que contiene.

En general, el libro logra cumplir el propósito del autor en la mayoría de sus partes; y su edición en castellano nos parece acertadísima ya que llena un hueco en el escaso campo bibliográfico sobre la materia.

Julia Blasco

J. BARKLEY ROSSER: *Simplified Independence Proofs.* Boolean valued models of set theory. New York and London: Academic Press, 1969, xi + 217 pp.

J. Barkley Rosser es, sin duda, uno de los grandes lógicos de nuestro tiempo. Su labor ha estado íntimamente ligada a la teoría de modelos, donde su poderosa imaginación creadora, aunada a su perfecto dominio del instrumental lógico y matemático, le ha conducido a obtener notables resultados. Baste recordar a este respecto los contenidos en sus diversos trabajos sobre las "New Foundations" de W. V. O. Quine. [1]

La presente obra constituye el primer intento de sistematización en la teoría de modelos de valores booleanos (boolean valued model). Antes de ella sólo había trabajos, debidos principalmente a Solovay y D. Scott, a los que, dado su carácter inédito, era sumamente difícil acceder. Por otra parte en ellos el objeto de atención era más el modelo que sus posibles aplicaciones, en particular la referente a una prueba de la independencia del Axioma de Elección (abreviado en lo sucesivo por AE) y de la Hipótesis Generalizada del Continuo (abreviado en lo sucesivo por HGC) que complementase la labor de K. Gödel, 1940. [2]

Ya existía ciertamente una prueba de independencia tal, la de Cohen; [3] pero el método por él empleado —el "forcing" (forzamiento)— iba revestido de una carga de complejidad que dificultaba

[1] Roser, J. B. "On the consistency of Quine's New Foundation for mathematical logic", JSL, vol. 4 (1939), págs. 15-24.
——— "The Burali-Forti paradox", JSL, vol. 7 (1947), págs. 1-17.
——— "The axiom of infinity in Quine's New Foundations", JSL, vol. 17 (1952), págs. 238-242.
——— Wang, H. "Non-standard models for formal logics", JSL, vol. 15 (1950), págs. 115-129.

[2] Gödel, K. *The consistency of the axiom of choice*... Princeton Univ. Press, 1940.

[3] Cohen, P. J. *Set theory and the continuum hypothesis.* New York: W. A. Benjamin Inc., 1966.

en gran medida su manejo. La idea de Rosser es, precisamente, aplicar el método de modelos de valores booleanos a una prueba de independencia alternativa de la de Cohen, pero *muy simplificada.*

Para comprender el alcance de esta prueba, conviene hacer un poco de historia. Gödel había demostrado que ZF (= Teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel) + AE, así como ZF + HGC eran *relativamente interpretables* en un modelo interno $\triangle$, i. e. un modelo tal que su universo, L, es idéntico al universo de ZF, V, de modo que V = L (fórmula del llamado axioma de constructibilidad). Para aclarar lo dicho considero que basta con atender a lo que sigue. Sea *A* un enunciado [4] cualquiera (de ZF + AE + HGC, por conveniencia) y sea *P* un predicado (definible en ZF); se dice que *A* está relativizado a *P* si todo cuantificador de *A* se restringe a conjuntos que satisfagan *P*. Generalizando el proceso, podemos hablar de relativización de una teoría a otra. [5] Obviamente, este proceso de relativización no es otra cosa que un proceso de *interpretación.* De ahí la expresión "relativamente interpretable" arriba usada. La idea de Gödel será conseguir la interpretación relativa de ZF + AE + HGC de modo que los conjuntos del universo L del modelo sean los conjuntos del universo V de ZF que satisfagan el predicado, definible en ZF, "ser constructible". En último extremo, pues, ZF + AE + HGC resulta ser relativamente interpretable en ZF, de modo que si ZF es consistente debe seguir siéndolo tras la adición de AE y HGC.

¿Se puede probar con el mismo método que ZF + $\neg$ AE y ZF + $\neg$ HGC con consistentes (si ZF lo es); dicho de otro modo: que AE y HGC son independientes? Shepherdson [6] responde negativamente. Para ello es preciso que algunos conjuntos de V no sean constructibles, i. e. miembros de L. Aquí incide la labor de Cohen. Su idea, de acuerdo con lo dicho, será probar primero que V $\neq$ L. Por Gödel, el modelo $\triangle$ satisface ZF + V = L; por Löwenheim-Skolem, deberá haber un modelo *numerable* entonces que satisfaga ZF + V = L. Llamemos M_0 a un modelo tal. La labor de Cohen consistirá, entonces, en construir (con los números ordinales de M_0) un modelo N, tal que contenga un conjunto, *a,* que se halle incluido impropiamente en ω, pertenezca a N y no pertenezca a M_0. Del hecho de que *a* no sea constructible —pues *a* ya no es un

[4] Un enunciado es una fórmula que no tiene libre ninguna variable.

[5] No debe tenerse escrúpulo alguno en considerar un modelo, en nuestro contexto, como una teoría.

[6] Shepherdson, J. C. "Inner models for set theory. I", JSL, vol. 16 (1951), II, JSL, vol. 17 (1952); III, JSL, vol. 18 (1953).

elemento de M_0— se seguirá que N es un modelo de $ZF + V \neq L$. El problema consiste en hallar *a*. Como M_0 es numerable, hay infinitos *a* que satisfagan las condiciones requeridas. Pero no todos sirven para la finalidad propuesta. [7] El criterio de Cohen para seleccionar el *a* adecuado es que todo enunciado enunciado sobre *a* se halle determinado por un *beat de información*. A ese *beat* se le llama "condición de forzamiento" y a *a* el "conjunto genérico". Una extensión del método permite probar a Cohen que $ZF + \neg AE$ y $ZF + \neg HGC$ son consistentes (si ZF lo es).

La complejidad del método de forzamiento motiva diversos replanteamientos de la prueba de Cohen. El que aquí nos interesa parece hallar su origen en la obra de Solovay, aunque es D. Scott quien lo desarrolla. En esencia, consiste en aplicar al Cálculo Restringido de Predicados la idea de la lógica polivalente, generalmente constreñida al Cálculo de Enunciados. Un predicado, *P*, ya no se ve como "determinador" de un conjunto, sino como una función cuyo dominio está integrado por los conjuntos que satisfacen *P*. Dando como rango de esas funciones un álgebra booleana, Scott accede a la idea de modelos (por lo dicho, denominados) "de valores booleanos".

La obra de J. Barkley Rosser pretende, como ya dijimos, aplicar este método de modelos de valores booleanos a la consecución de una prueba de la independencia de AE y de HGC cuya simplicidad sea el factor esencial. Consta de diez capítulos y dos apéndices. Tras unas observaciones generales (Capítulo 1), entre las que destaca la comparación entre la famosa prueba de independencia del postulado de las paralelas de Euclides y las pruebas de independencia a hacer en el libro, aborda Rosser la construcción de su modelo (Capítulos 2 y 3). Podemos caracterizar a éste como una estructura:

$$(V, \in, =, f)$$

tal que:

1. $V \neq \emptyset$
2. $\in$ e $=$ sean los predicados especiales
3. $f(A) \in V^{B^{N}}$, donde A es un predicado n-ádico y $B^{V^{N}}$ es el conjunto de las imágenes de V en un álgebra booleana, B.

[7] Puesto que en algunos de ellos M_0 puede reaparecer de alguna forma.

Todo ello no ofrece problemas a la luz de lo arriba dicho en torno a Scott.

La idea clave de las pruebas de independencia (de $V = L$ en el Capítulo 4; de AE en el Capítulo 6; de HC en el Capítulo 7; y de HGC en el Capítulo 8) que mediante este modelo presenta Rosser radica en último extremo en la noción de un filtro de subgrupos de automorfismos [8] de su álgebra booleana. En particular, respecto de AE, ese filtro tiene como misión la de eliminar del universo del modelo cualquier clase que permita su buena ordenación; pues, ya que hay una coimplicación entre el Teorema de Buena Ordenación y el Axioma de Elección, la negación de aquél debe conducir a una negación de éste.

Las pruebas son ciertamente simples (desde luego, en comparación con las de Cohen) y junto a ellas Rosser abre vías de investigación realmente interesantes respecto del paralelismo entre el método de forzamiento y el de modelos de valores boolanos (Capítulo 5). ¿Hay una traducción total entre uno y otro? ¿Son sus alcances los mismos? Junto al método de A. Lévy para trasladar argumentos mediante forzamiento a argumentos mediante modelos de valores booleanos, Rosser expone de manera breve, pero lo suficientemente clara para su posterior desarrollo por los investigadores que así lo deseen, las dificultades que esa vía y su inversa presentan, junto con ciertos medios para su solución.

El libro se cierra con dos apéndices. El primero de ellos se dedica al tratamiento de la verdad, recogiendo brevemente el modelo de valores booleanos construido; ya que en su definición éste no es sino una formalización de la noción de verdad, nos hallamos ante una cierta paradoja: Tarski había demostrado que la noción de verdad en una lógica formal (en este caso, la teoría de conjuntos) no puede ser formalizada dentro de esa lógica. La resolución del problema es la ya standard desde la obra de Cohen (la noción de verdad no se halla totalmente formalizada dentro de la teoría de conjuntos; hay un pequeño residuo que queda en el campo de una lógica intuitiva externa). El segundo apéndice se refiere a la cuestión hoy palpitante de la existencia de cardinales inaccesibles, o mejor dicho, a la cuestión de si puede añadirse a los axiomas de la teoría

[8] Si J_i son automorfismos de un álgebra booleana y G es un grupo de J_i, entonces F es un filtro de subgrupos K_i de G si, y sólo si:

1. $G \varepsilon F$
2. $K_1 \varepsilon F$ y $K_2 \varepsilon F$, entonces $K_1 \wedge K_2 \varepsilon F$
3. $K_1 \varepsilon F$ y $K_1 \subseteq K_2$, entonces $K_2 \varepsilon F$.

de conjuntos un axioma fuerte que afirme la existencia de un cardinal inaccesible sin que ello conduza a inconsistencias. Dado que esta adición facilita aún más las pruebas mediante modelos de valores booleanos, así como por los resultados a que ha llevado en el Análisis, parece que este tema es uno de los que requiere una atención más urgente.

J. Sanmartín Esplugues

MICHAEL LOWY: *La teoría de la Revolución en el joven Marx*. Trad. Francisco González. Ed. Siglo XXI, Madrid 1973, 313 pp.

Recensionar un libro como el de Lowy me es particularmente grato. Demasiadas veces aquellos que han escrito acerca del joven Marx se han "contagiado" de aquel estilo tan peculiar —y tan alejado de lo que sería de desear en nuestro tiempo— que caracterizaba a los jóvenes hegelianos. No ocurre así en este libro en el que la sencillez y claridad pugnan por prevalecer constantemente.

La teoría de la Revolución en el joven Marx está estructurada en tres partes, de las que la primera y la última no constituyen en realidad más que apuntes y sugerencias. En la Introducción —primera parte— se hallan una serie de observaciones metodológicas que, si bien cobran su real sentido y dimensión en el contexto de la obra, son de tal envergadura que su ubicación desborda ampliamente aquélla, por lo que, en gran parte, deben considerarse como hipótesis y sugerencias. A destacar de ellas la tesis de Lowy de la especificidad de las ciencias sociales debida, entre otras cosas, a su carácter comprometido, que produce el que la falacia naturalista, por ejemplo, quede fuera de lugar.

La segunda parte, que constituye lo grueso y fundamental de la obra, es un análisis del desarrollo de la teoría de la Revolución de Marx, a través de las sucesivas fases de su pensamiento y actividad, hasta 1848, fecha de la aparición del Manifiesto. Y digo de su pensamiento y actividad porque Lowy tiene mucho interés en mostrar, acertadamente, cómo ambas facetas se compenetran y transforman continuamente. Lowy va haciendo hincapié poco a poco en dos ideas que, a su vez, constituyen las líneas-fuerza de la teoría de la Revolución de Marx: la unificación del proletariado, su aparición en la historia como clase e, íntimamente ligada con ésta, la de su autoemancipación. Ambas ideas sólo aparecerán claramente definidas en el Manifiesto. Es la comprensión de este núcleo, la que rige la línea de análisis de Lowy desde la época de la filosofía hege-