REVISTA DE LIBROS

A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, con la colaboración de D. Van Dalen, *Foundations of set theory*. Segunda edición revisada. Amsterdam y Londres: North-Holland, 1973, X-404 pp.

Un sistema axiomático puede ser considerado de dos modos: o bien desde el punto de vista matemático, que se orienta hacia la deducción formal y abstracta de teoremas a partir de axiomas; o bien desde un punto de vista, por así decirlo, "filosófico", consistente en la meditación informal sobre la estructura y razón de ser de los axiomas y sobre el alcance y la utilidad de los resultados obtenidos.

A este segundo punto de vista responde el amplio estudio sobre los problemas de fundamentación de la teoría de conjuntos, *Foundations of set theory,* originalmente publicado por Fraenkel y Bar-Hillel en 1958. La nueva edición, revisada y puesta al día con ayuda de Levy y Van Dalen, incluye los desarrollos y resultados obtenidos por la investigación en los últimos años sobre tales problemas. Las cuestiones recientes no son abordadas, ciertamente, con el mismo grado de penetración que las clásicas. Pero en general se mantienen, ahora actualizadas, la claridad de concepto, la documentación histórica y la información bibliográfica que caracterizaban a la primera edición. El libro es casi único en su género e interesa por igual a lógicos, matemáticos y filósofos.

La revisión ha afectado profundamente a varios capítulos (en especial II y IV) y secciones, pero no a la arquitectura general de la obra. Un primer capítulo introductorio considera las antinomias lógicas (Russell, Cantor, Burali Forti) y semánticas (Richard, Grelling, paradoja del mentiroso) que determinaron la crisis finisecular del cantorismo y la elaboración de una teoría "no ingenua" de conjuntos, efectuada con el aparato formal de la lógica y el método axiomático. El grueso del libro se dedica por entero al desarrollo de dicha teoría a lo largo de tres líneas diferentes: 1) la línea que suele ser denominada "axiomática" sin más, cuya sola base es la lógica elemental (capítulo II); 2) la línea logicista, que prefiere tomar por base la lógica superior y la teoría de tipos (capítulo III); y 3) la línea iconoclasta y finitista del intuicionismo (capítulo IV). Finalmente (capítulo V) son discutidos los principales tópicos de la metamatemática y la teoría de sistemas formales.

La revisión del capítulo II presenta importantes innovaciones. La línea estrictamente axiomática, con mínimo basamento lógico, se ha plasmado en dos sistemas principales: el sistema Zermelo-Fraenkel (sistema ZF) y el sistema Von Neumann-Bernays (sistema VNB). La exposición del sistema ZF, que es el más tradicional y el más comúnmente aceptado por los matemáticos, como testimonia, p. e., Bourbaki, es una de las partes mejor logradas del libro. En ella encuentra el lector no versado en simbolismos una explicación informal y sustanciosa, directamente suministrada por el continuador de la línea de Zermelo, de los axiomas clásicos de teoría de conjuntos: extensionalidad, comprehension, pares, unión, conjunto potencia, subconjuntos (separación), infinito y reemplazo. Dos excursus sobre el axioma de elección y la hipótesis del continuo incorporan en esta nueva edición las decisivas aportaciones de Cohen 1963 sobre la independencia de ambos y dan noticia, excesivamente escueta, de más recientes innovaciones sobre la cuestión, p. e. Scott 1967. El sistema Von Neumann-Bernays, que se distingue esencialmente del sistema ZF por añadir al concepto básico de "conjunto" un concepto más amplio de "clase", es analizado en las secciones finales del capítulo.

Otro modo (capítulo III) de construir axiomáticamente la teoría de conjuntos consiste en tomar como plataforma la lógica superior y la teoría de tipos, aparato más potente que la lógica elemental y capaz de resolver el problema de las antinomias a un nivel puramente lógico, anterior al matemático, al cual sería posible reducir este último. Tal es el programa logicista, paradigmáticamente representado por los *Principia Mathematica* de Whitehead-Russell y desarrollado hoy de un modo muy original y brillante por Quine en sus dos sistemas de *New Foundations* (sistema NF) y *Mathematical Logic* (sistema ML). Las secciones correspondientes a estos dos sistemas han sido revisadas. Uno y otro se caracterizan por la elegancia de la base axiomática, y también, como todo sistema logicista, por la complejidad y sutileza de los mecanismos lógicos necesarios para la extracción de consecuencias matemáticas (La "teoría virtual de clases" del último Quine es apenas aludida en el capítulo anterior). Correlativamente al cálculo ramificado de tipos, se trata también en este capítulo el sistema de Wang, el sistema operacionista de Lorenzen y sistemas no canónicos tales como la ontología de Lesniewski y los sistemas de Chwistek y Fitch.

Las consideraciones sobre el intuicionismo (capítulo IV) han sido también ampliamente revisadas (con la ayuda de Van Dalen, que continuó en este empeño tras la muerte de Fraenkel en 1966). No es frecuente que un defensor de la teoría clásica de conjuntos otorgue tanto espacio y cuidado a la exposición de doctrinas adversas. Las tesis básicas del intuicionismo: la crítica de la idea de infinito, la insistencia en el carácter constructivo de la matemática, la identificación de construcción y existencia, la crítica del principio de tercio excluso, la formalización por Heyting 1930 de la lógica intuicionista, los sucedáneos brouwerianos de las nociones de continuo y conjunto aparecían tratados ya en la primera edición con claridad y agudeza y con el aditamento de una interesante documentación histórica y filosófica. La puesta al día de la segunda edición incluye información sobre más recientes aportaciones al intuicionismo, tales como la nueva interpretación de la lógica de Heyting, la semántica de Kripke, la noción de realizabilidad de Kleene, la formalización, ideada por Kreisel, del "sujeto creativo" brouweriano, o el ultra-intuicionismo de Esenin-Volpin.

El capítulo V, apenas retocado, es una exposición, clara y meticulosa, de los tópicos normalmente desarrollados en los manuales de lógica y metamatemática (sistemas formales, propiedades de consistencia, completud y decibilidad, teoremas de limitación de Gödel, Tarski y Church). Se advierte aquí, en todo caso, la falta de un tratamiento más satisfactorio de la noción de modelo.

La obra termina con una sección consagrada a reflexiones filosóficas. La teoría de conjuntos es, en cierto modo, la teoría de los universales. Al realismo, al conceptualismo y al nominalismo de ayer corresponden hoy el platonismo (Russell-Whitehead, Bernays, Gödel), el intuicionismo (Brouwer, Heyting) y el individualismo neo-nominalista (Goodman, Henkin) posturas estas a las que, según los autores del libro, puede añadirse el pragmatismo formalista y anti-ontológico de Carnap, Lorenzen o Curry. Al empirismo de Stuart Mill, que borra las fronteras entre matemática y física, entre ciencias formales y ciencias reales, respondería hoy la actitud neo-empirista de Mostowski o, en cierto sentido, el naturalismo de Quine.

La actual situación de conflicto entre las diferentes teorías de conjuntos no es confortable para un matemático que quisiera "fundar" sus juicios acerca del análisis y del sistema de números reales en cimientos seguros. Lorenzen ha comentado, con su característico sarcasmo, que la "teoría de conjuntos" (en alemán: *Mengenlehre*) es "teoría del cuento" (en alemán: *Märchenlehre*). Sin llegar a semejante extremo, resulta difícil ahuyentar del ánimo el pensamiento de que los valores de belleza de tan hermosa teoría sobrepujan a sus valores de verdad.

¿Hay una unidad básica que sea común a las diversas teorías de conjuntos? ¿Tiene sentido al menos creer que la hay? La respuesta, sensatamente pragmática, de los autores es una apelación, envuelta en reticencias, a la tolerancia y al pluralismo: "hasta el presente no vemos razón alguna que nos fuerce a creer que hay una solución única a los problemas fundacionales de la teoría de conjuntos que induzca a todos los matemáticos a aceptar una tal teoría como *la* Teoría de Conjuntos... La existencia de múltiples teorías de conjuntos que compiten entre sí, y en la medida, al menos, en que no introduzcan graves alteraciones en el trabajo cotidiano del matemático y del físico, no parece ser lo suficientemente nociva como para justificar uno u otro *credo* en tal respecto. Mientras la creencia en la realidad objetiva (cualquiera que sea lo que esto signifique) y en la consiguiente unicidad de la noción de conjunto y de su teoría no pase de ser una especie de tranquilizante y no incite a la refutación dogmática de teorías rivales —y adviértase que incluso Mostowski declara en términos nada ambiguos que 'no hay criterios que indiquen cómo elegir adecuadamente entre todas estas numerosas [teorías de conjuntos]'— dicha creencia será un acto metafísico de fe, inocuo y, en cierto sentido, incluso útil" (pág. 344).

M. Garrido

J. DE LORENZO, *Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos.* Madrid: E. Tecnos, 1972, 150 pp.

Nos dice J. de Lorenzo en la obra que reseñamos: "(La teoría de conjuntos) sólo ha llegado a generalizarse como vocabulario o gramática de base, en todos los niveles, en las dos últimas décadas", período, como es obvio, referido a nuestro país. Con él nos lamentamos de que la generalización se haya dado únicamente a este nivel. Pues la teoría de conjuntos es algo más que un mero lenguaje. Me parece que sólo empieza a tener interés como auténtica teoría de conjuntos con la demostración de que hay dos conjuntos trasfinitos que no son equivalentes.

Dicho de otro modo, es algo incuestionable que la notación conjuntista ha invadido gran parte de terrenos científicos y filosóficos, incluso como alternativa (?) del lenguaje lógico. Pero, desgraciadamente, su contenido ha quedado, si no en el olvido, sí por lo menos reducido a esa extensión en la que otras teorías pueden disputarle la aplicación: a la parte finita, en la que la teoría de números, por ejemplo, parece ser una alternativa que no deja de presentar incluso más atractivos que la propia teoría de conjuntos.