Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y el presente

Aurora Gallardo Cabello y Eduardo Basurto Hidalgo

Resumen: Este artículo muestra los procesos cognitivos de resolutores de problemas históricos análogos a los exhibidos por estudiantes actuales situados en la transición de la aritmética al álgebra. El hallazgo principal de la investigación es el surgimiento de formas semánticas equivalentes vinculadas con niveles de negatividad en la resolución de problemas.

Palabras clave: procesos cognitivos, problemas históricos, formas semánticas.

Equivalent semantic forms in problems of the past and the future
Abstract: Word problems from ancient and present times are solved by authors of historical text and student's transition from arithmetic to algebra. The main achievement of this research is the appearance of equivalent semantic forms linked of negativity different levels.

Keywords: cognitive problems, historic problems, semantic forms.

ANTECEDENTES

Nuestra investigación está centrada en la resolución de problemas aditivos propuestos a estudiantes de secundaria. Nos basamos en la categorización de problemas de Bruno y Martinón (1997) que muestra la existencia de *formas semánticas equivalentes*, cuya identificación por parte del resolutor permite enunciar los problemas en términos de números positivos y negativos.

Asimismo, hemos identificado en textos históricos de los siglos XV y XVI problemas que expresan en su resolución formas de *negatividad* en lenguaje vernáculo muy similares a las formas semánticas utilizadas por estudiantes actuales.

Fecha de recepción: 4 de noviembre de 2008.

En nuestra indagación, retomamos la categoría de la *negatividad* acuñada por Lizcano (1993), quien hace referencia a los antecedentes históricos de los números negativos, aclarando que éstos no pueden considerarse aún como los enteros de hoy. Este autor señala que es necesario mantener voluntariamente impreciso el término de negatividad para que pueda ampliar paulatinamente su campo de referencia y puedan ser aceptadas sus diversas construcciones en las distintas culturas.

A continuación, mencionamos estudios previos a la investigación mostrada en este artículo y que la fundamentan históricamente.

Piaget (1960) plantea tres métodos complementarios para utilizar en epistemología genética: el análisis formalizante (problemas de estructura formal de los conocimientos y validez de estos sistemas); el análisis psicogenético (problemas de hecho y no de validez formal, referidos a la caracterización de los estados de conocimiento en distintos niveles sucesivos y a los mecanismos de transmisión entre uno y otro); el método histórico crítico (reconstrucción de la historia de la ciencia en cuanto análisis de los procesos conducentes de un nivel de conocimiento a otro).

Basados en el trabajo de Piaget, Filloy y Rojano (1984) recurrieron al método histórico-crítico como un componente teórico metodológico para analizar los problemas de enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental. Este enfoque del método histórico-crítico en la matemática educativa se caracteriza por movimientos recurrentes de ida y vuelta entre el análisis de textos clásicos de la historia de las matemáticas y el trabajo empírico dentro de los sistemas educativos. El análisis histórico-crítico posibilita, por ejemplo, la construcción de secuencias de enseñanza aprendizaje que reflejan los avances de la investigación teórica y pueden ser puestas a prueba en situaciones vivas en las que están involucrados los estudiantes y los profesores, para después regresar a la historia de las ideas enriquecidos con los resultados del análisis empírico. Este movimiento de ida y vuelta es lo que sitúa estos trabajos en el terreno de la matemática educativa y no en el de la historia o en el de la epistemología de las matemáticas.

Apoyándose en el método histórico-crítico, como lo utilizaron Filloy y Rojano (1984), Gallardo (1994) realizó una investigación documental que puso de manifiesto una larga trayectoria de formas de *negatividad* en el contexto de las ecuaciones algebraicas. La historia se inicia en la Antigüedad y termina en la segunda mitad del siglo XIX, cuando la controversia sobre los números negativos se resuelve de manera definitiva en el ámbito matemático. Es importante aclarar que fue indispensable una revisión bibliográfica a través de los siglos, ya que la problemática de los negativos no se encuentra ubicada localmente en una determinada etapa histórica. Esta revisión nos mostró que los términos sustractivos, las leyes de los signos, así como elementos necesarios para la operatividad con números negativos, aparecen desde épocas remotas en el contexto de la resolución de ecuaciones algebraicas. Los conceptos opuestos de ganancia y pérdida, propiedad y deuda, venta y compra constituyeron interpretaciones adecuadas para los positivos y los negativos. La aceptación de soluciones negativas de ecuaciones fue tardía, surgió en el siglo XV. La principal dificultad que enfrentaron los matemáticos medievales en la resolución de problemas de enunciado verbal fue precisamente la interpretación de soluciones negativas.

Uno de los hallazgos más relevantes de este recorrido por la historia de las ideas fue la identificación de distintos *niveles conceptuales de negatividad,* inmersos en los procesos de solución de problemas encontrados en textos matemáticos de distintas culturas. La diversificación de estos niveles, irreducibles entre sí, abrió un abanico de posibilidades y logró definir y enriquecer la categoría de la *negatividad* acuñada por Lizcano, originariamente imprecisa. Estos niveles se designan e interpretan a continuación.

- *Número sustractivo*. Donde la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades $a - b$, siempre b será menor que a, donde a, b son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene un carácter binario en el nivel de la operación de sustracción.
- *Número signado*. Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos. Surge la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural).
- *Número relativo*. Se hace presente cuando se puede concebir la idea de opuestos en situaciones discretas, así como la idea de simetría en situaciones continuas.
- *Número aislado*. Surge cuando se acepta un número negativo como la solución de una operación, un problema o una ecuación.

Paralelamente al estudio de textos matemáticos de tiempos remotos y siguiendo los lineamientos del método histórico-crítico, se realizó un análisis empírico con estudiantes de 12 a 13 años de edad, en el que se observaron también los niveles conceptuales de los negativos en la resolución de tareas aritmético-algebraicas (Gallardo, 2002).

PROBLEMAS DEL PASADO QUE CONDUCEN A SOLUCIONES NEGATIVAS

En este artículo hemos retomado de nuevo el análisis histórico a la luz de una perspectiva teórica reciente sobre el estudio de problemas aditivos (Bruno y Martinón, 1997). Examinaremos ahora el *Ars Magna* de Cardano (1545) y la *Triparty en la science des nombres* de Chuquet (1484). Elegimos estas obras porque corresponden, en cuanto a sus contenidos matemáticos, a los temas planteados en el currículo de estudiantes durante la transición de la aritmética al álgebra.

El análisis de algunos de los problemas de estas obras del pasado nos permitió inferir que sus autores utilizaron un lenguaje vernáculo para dar una explicación adicional que justificara *la negatividad* de las soluciones, con oraciones muy similares a las propuestas en Bruno y Martinón (1997) y definidas por estos investigadores como *formas semánticas equivalentes*.

El interés en analizar estas formas del lenguaje se debe al hecho de que pueden contribuir a la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros en las tareas planteadas a estudiantes. Este hecho se hará evidente en los siguientes apartados de este escrito.

ARS MAGNA DE CARDANO (1545)

A continuación, se bosquejan las reglas de postulación de soluciones negativas en problemas correspondientes al capítulo XXXVII del *Ars Magna* de Cardano (1545). Este autor estudia las propiedades generales de las ecuaciones como las relaciones entre los coeficientes y las raíces. A lo largo de su obra utiliza lenguaje retórico, por ejemplo: "*cubus et res aequales numero*" (x^3 y x son iguales a un número) y basa la mayoría de sus demostraciones en argumentos geométricos, emulando el razonamiento euclidiano. La solución geométrica de Euclides de la ecuación de segundo grado consistió en la construcción de cuadrados y, por consiguiente, el acercamiento a la solución de la ecuación cúbica, pensó Cardano, tendría que ser vía la construcción de cubos. Debe recalcarse que el *Ars Magna* muestra limitaciones en su nivel de desarrollo simbólico, pues el autor complica demasiado su notación ya que basa sus demostraciones en argumentos geométricos.

Como contraparte, los problemas comerciales de la sociedad italiana del siglo XVI condujeron a Cardano a resolver ecuaciones en las que las incógnitas representaban cantidades de dinero, pudiendo suceder que la solución fuera un número negativo. Resulta muy notable que, en el capítulo XXXVII del *Ars Magna,* este autor postule una regla sobre raíces falsas o ficticias (negativas) liberadas de ataduras geométricas. Utiliza $\bar{p}$ para designar el signo más y $\overline{m}$ para el signo menos que agrega al número considerado por él, siempre una magnitud o cantidad positiva. Se presentará aquí esta sorprendente regla recurriendo al simbolismo moderno. Está basada en las reglas de transformación de una ecuación cuadrática con una solución "verdadera" (positiva) por otra con la misma solución, pero negativa (*i.e., con signo contrario a la anterior*) y que Cardano expone en el capítulo I de su obra.

Regla I. Postulación de soluciones negativas. Esta regla se ramifica de la siguiente manera: o bien, se asume un negativo, o bien, se busca una raíz cuadrática negativa; o se busca una que no lo es. Ejemplo, las ecuaciones $x^2 = 4x + 32$, $x^2 = x + 20$ tienen la misma solución negativa ($x = -4$) y diferentes soluciones positivas, $x = 8$ y $x = 5$, respectivamente. A continuación, transforma las ecuaciones anteriores en: $x^2 + 4x = 32$ y $x^2 + x = 20$ que tienen una misma raíz positiva $x = 4$.

El siguiente problema es una aplicación de esta regla y se expone en el lenguaje algebraico actual.

Problema de la dote

> *Problema 1 del capítulo XXXVII. La dote de la esposa de Francis es de 100 oros más que los que ya poseía Francis y el cuadrado de la dote es de 400 más que el cuadrado de su propio capital.*

Cardano afirma que el problema no se puede resolver a menos que el capital de Francis se considere *una deuda* ($-x$) que en vez de sumarla se sustrae. Así, la dote debe ser $100 - x$. Al elevar al cuadrado ambas partes resultan respectivamente, $(-x)^2 = x^2$ y $(100 - x)^2 = 10\ 000 + x^2 - 200x$. La diferencia es de 400 oros. Esto es, $x^2 = 10\ 000 + x^2 - 200x - 400$.

Por lo tanto, $x^2 + 400 + 200x = 10\ 000 + x^2$.

Al sustraer términos comunes, se obtiene, $9\ 600 = 200x$; donde $x = 48$ que es lo que Francis *tiene en lo negativo,* es decir, *lo que carece o debe,* y la dote será el residuo de 100, esto es, 52 oros. Así, Francis *posee menos 48* oros y la dote de su esposa es de 52. De esta manera afirma Cardano, se pueden resolver los más complicados problemas.

El planteamiento de Cardano consistió en una *suposición a priori* que le permite reemplazar el concepto original de *posesión* atribuido a la incógnita por el concepto opuesto de *deuda*, el cual, en vez de sumarse, se sustrae en la ecuación que modela el problema. Observamos el tránsito del número relativo $(-x)$ al número sustractivo: $100 - x$.

En este proceso, se llega en términos estrictos a una solución positiva o verdadera y es en una interpretación *a posteriori* que le asigna el carácter de déficit, pérdida o carencia: $\overline{m}48$ (número signado y número aislado a la vez). De esta manera, Cardano llega al número aislado, pero no mediante el lenguaje simbólico, sino verbalmente, auxiliándose de una forma semántica equivalente.

Triparty en la science des nombres de Chuquet (1484)

Las matemáticas desarrolladas en la época de Chuquet correspondieron a las necesidades de un mundo comercial. Los *merchants* del Renacimiento no estaban tan interesados en el redescubrimiento de las matemáticas clásicas, sino más bien en textos que explicaran las técnicas aritméticas utilizadas en el intercambio de mercancías.

En el apéndice de su obra, Nicolas Chuquet (1484) presenta nueve problemas con soluciones negativas. En la *Triparty*, las incógnitas no representan sólo cantidades, sino también números naturales en abstracto. En la tercera parte de su obra, dedicada al álgebra, introduce un lenguaje sincopado avanzado donde la generalidad de su notación y terminología apuntan a la simbolización del álgebra. Decididamente, se inclina por abandonar las nomenclaturas predominantes para designar el orden de las raíces y el de las potencias de la incógnita y propone una forma unificadora que facilita las operaciones. Abandona cualquier referente geométrico asociado a la idea de radical y de potencia. Éste era un obstáculo que debía superarse para poder establecer una nueva sintaxis que propiciara manejar de manera general los conceptos aritméticos y algebraicos. Su propuesta de una simbolización unificadora es la siguiente:

Cada número es una cantidad estricta y, para indicarlo, se puede añadir un cero en la parte superior del número, como por ejemplo 12^0, 13^0. Pero cada número puede ser considerado número primero de una cantidad continua que, de otra manera se llama número lineal, y se indica: 12^1, 13^1, ... y así sucesivamente hasta los órdenes que se quiera (12^0 significa 12, 12^1 quiere decir $12x$; 12^2 , es $12x^2$, etcétera).

Así también, $\sqrt{12x}$ la representa como $R_x^2 12^1$ y $\sqrt[4]{13x^5}$ como $R_x^4 13^5$, aclarando el autor que cualquiera de las expresiones anteriores es positiva y, si es necesario considerarla negativa, se debe añadir la palabra "menos" de la siguiente manera:

$$\overline{m}12^0 \text{ o } \overline{m}12^1 \text{ o } \overline{m}R_x^2 12^3.$$

Afirma Chuquet:

> Los antiguos han dicho cosas a lo que yo denomino primero, y la figura utilizada ha sido **ρ**. A los segundos los han denominado cuadrados (*champs*), designados con el signo **π**. Los terceros son llamados cubos, distinguidos con □. Y a los cuartos los llamaban cuadrado – cuadrado (*champ de champ*) con el carácter **π π** [...] estas denominaciones no son suficientes para considerar todas las clases de números diferentes, que son innumerables (Marre, 1881, pp. 737).

Bajo estas consideraciones, define los monomios y la *Regla de los primeros*, enunciándola como sigue: "La *Regla de los primeros* contempla la formación y manejo operativo de los monomios que constituyen la base en la que se construyeron los diversos tipos de ecuaciones..."

Además de este avance hacia la simbolización algebraica, enuncia una regla para operar con lo que hoy denominamos números signados: colocar primero el número del cual se va a sustraer, tal como es, con su correspondiente más o menos. Después poner el número que se va a sustraer cambiando su más a menos y su menos a más. Luego, simplificar si es posible. Para usar esta regla es necesario conocer primero el siguiente hecho notable:

más y más, menos y menos, sustraer.
más y menos, sumar.

Chuquet agrega el ejemplo:

Si más 12 se quita de más 9, quedará $\overline{m}3$. Si menos 12 se quita de $\overline{m}9$, quedará $\overline{p}3$.

En el siguiente cuadro se escribe como Chuquet transforma una expresión con radicales en una ecuación de segundo grado. Comparamos su prosa algebraica con el lenguaje algebraico actual:

Lenguaje sincopado	Lenguaje algebraico
$R_x^2\,\underline{12\overline{m}1^2}\,\overline{p}1$ igual a $R_x^2\,\underline{36\overline{m}1^2}$	$\sqrt{12x-x^2}+1=\sqrt{36-x^2}$
$12^1\,\overline{m}1^2\,\overline{p}R_x^2\,\underline{48\overline{m}4^2}\,\overline{p}1$ igual a $361^2\,\overline{m}1^2$	$12x-x^2+\sqrt{48x-4x^2}+1=36-x^2$
$12^1\,\overline{p}R_x^2\,\underline{48^1\,\overline{m}4^2}\,\overline{p}1$ igual a 36	$12x+\sqrt{48x-4x^2}+1=36$
$12^1\,\overline{p}R_x^2\,\underline{48^1\,\overline{m}4^2}$ igual a 35	$12x+\sqrt{48x-4x^2}=35$
$R_x^2\,48^1\,\overline{m}4^2$ igual a $35\overline{m}12^1$	$\sqrt{48x-4x^2}=35-12x$
$48^1\,\overline{m}4^2$ igual a $1225\overline{m}840^1\,\overline{p}144^2$	$48x-4x^2=1225-840x+144x^2$
48^1 igual a $1225\overline{m}840^1\,\overline{p}148^2$	$48x=1225-840x+148x^2$
888^1 igual a $1225\overline{p}148^2$	$888x=1225+148x^2$

Nótese que no posee una notación simbólica para el signo igual.

La mayor parte de los problemas resueltos por Chuquet no son originales. Mientras que en los manuscritos medievales se resuelven por tanteo, por regla de tres o por la regla de la falsa posición, las soluciones de Chuquet se presentan en lenguaje sincopado y se resuelven por la *Regla de los primeros*. Esto le condujo a encontrar soluciones a algunos problemas que sus contemporáneos consideraban insolubles. Para Chuquet, si el método conducía a un número negativo, este número era la respuesta y debía ser interpretado en el proceso en el que estaba involucrado.

Se presenta, a continuación, la interpretación atribuida a la solución negativa en dos problemas de compra y venta de mercancía.

Problema de las piezas de ropa

Un comerciante compró 15 piezas de ropa por la suma de 160 escudos. Algunas las pagó a 11 escudos cada una y las restantes a 13 escudos la pieza. Determinar cuántas prendas compró de cada clase.

En terminología moderna el problema se plantea mediante el sistema de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 15$$

$$11x_1 + 13x_2 = 160$$

Chuquet explica:

Considerando $x_1 = x$, como la incógnita se tiene $x_2 = 15 - x$ y la segunda ecuación se transforma en la siguiente: $11x + 13(15 - x) = 160$, donde $x = 17\frac{1}{2}$. Al realizar las operaciones "1^1 por 11 escudos" más "15 menos 1^1, por 13 escudos" se obtiene "195 menos 2^1", que corresponde a "160 escudos". Enseguida se igualan las partes. Ahora bien, 2^1 es el número que divide y 35 el número que se va a dividir. Dividiendo 35 por 2 resultan $17\frac{1}{2}$ piezas por el precio de 11 escudos. Al sustraer $17\frac{1}{2}$ de 15 quedan menos $2\frac{1}{2}$ piezas al precio de 13 escudos cada una. Después de verificar la ecuación, Chuquet observa que estos problemas son imposibles: es decir, el resultado es negativo. En este caso, la imposibilidad se debe a que $\frac{160}{15}$, que es igual a $10\ \frac{2}{3}$, no es un valor entre los precios dados 11 y 13. Propone la interpretación siguiente:

> El comerciante compró $17\frac{1}{2}$ piezas a 11 escudos cada una con dinero en efectivo, pagando $192\frac{1}{2}$ escudos. También adquirió $2\frac{1}{2}$ piezas a 13 escudos cada una para pagar a crédito la cantidad de $32\frac{1}{2}$ escudos. De esta manera contrajo una deuda de $32\frac{1}{2}$ que, al restarla de $192\frac{1}{2}$ se obtiene 160. Siguiendo el mismo razonamiento, Chuquet considera que las $2\frac{1}{2}$ piezas adquiridas a crédito deben sustraerse de las $17\frac{1}{2}$ piezas compradas y el comerciante tiene únicamente 15 piezas que realmente son de él (Appendice, núm. XXXV, pp. 424/fol. 156^v–157^r).

Problema de las manzanas

Un comerciante ha comprado cierto número de manzanas a un precio tal que, si vende 3 por un denario, gana 15 denarios; y si vende 4 por un denario, gana 14 denarios. Se debe encontrar la cantidad de manzanas y el precio que pagó por ellas. El sistema es:

$$\frac{1}{3}x_1 - x_2 = 15$$

$$\frac{1}{4}x_1 - x_2 = 14$$

Eligiendo $x = x_1$ para el número de manzanas e igualando $\frac{1}{3}x - 15$ con $\frac{1}{4}x - 14$, Chuquet obtiene x = 12. Afirma:

> ...vendiendo 3 manzanas por 1 denario, obtiene 4 denarios. Debe tomar 15 y quedan menos 11 denarios, por lo tanto las manzanas le han costado cero menos 11 denarios.
>
> De nuevo, vendiéndolas a 4 por un denario, obtiene 3 denarios; debe tomar 14 denarios que ha ganado y quedan menos 11 denarios, como antes. Se concluye que, de cualquier modo, las manzanas costaron cero menos 11 denarios (Appendice, núm. XLIII, pp. 427/fol. 159^{r-v}).

En el proceso de resolución de estos problemas, Chuquet da cabida al negativo como *sustractivo, signado, relativo y aislado*. Por consiguiente, puede afirmarse que Chuquet aceptaba y representaba simbólicamente soluciones negativas de ecuaciones y problemas. Una vez verificada la solución por el método de sustitución en las ecuaciones correspondientes, el número aislado recibía una interpretación adicional vía el contexto en el caso de problemas de enunciado verbal. Es importante remarcar que la verificación del resultado, es decir, el hecho de que el número aislado satisface las ecuaciones, no es suficiente para aceptar la validez teórica del valor negativo. Es necesaria la interpretación de este valor en el contexto del problema, ya que en la época de Chuquet el lenguaje sincopado no estaba aún consolidado.

PROBLEMAS RESUELTOS POR ESTUDIANTES DEL PRESENTE

Perspectiva teórica

La resolución de problemas aditivos ocupa un lugar destacado en la investigación en educación matemática. Algunos autores han dado lugar a varias clasificaciones, como son la de Vergnaud (1982), Nesher (1983), Carpenter y Moser (1982), Castro (1992), Fuson (1992), y Bruno y Martinón (1997).

Puesto que la investigación presentada se ubica en la tarea de resolver problemas aditivos de números positivos y negativos, la clasificación que se tomó como base para la elaboración y selección de dichos problemas fue la de Bruno y Martinón (1997), la cual se fundamenta en la distinción entre la estructura funcional y la forma semántica. La estructura funcional se refiere a los tipos de funciones que están implicados en un problema aditivo: estados, variaciones y comparaciones y la forma semántica al modo de expresar, vía el lenguaje natural, estas situaciones numéricas.

La clasificación contiene 11 categorías de problemas caracterizados esencialmente por:

- *La estructura funcional* que, como ya se mencionó, se refiere a los tipos de funciones que están implicados en los diferentes problemas.
- *La posición de la incógnita*; en los problemas de suma y resta en los que intervienen tres elementos, la incógnita se podrá colocar en el lugar de cualquiera de los tres elementos. Para el caso del estudio realizado, sólo se consideró la posición final de la incógnita, es decir, la localizada en el segundo miembro de la ecuación que resuelve la situación planteada. Los autores no analizan los casos en los que lo desconocido se ubica en el primer miembro de la ecuación.
- *El contexto,* el cual se reconoce como el entorno de la realidad en el que se ubica un problema, esto, en el caso de problemas que incluyen números positivos y negativos, comúnmente son situaciones en las que se observa la existencia de opuestos.

Dentro del lenguaje natural, sea escrito o verbal, existen distintas maneras de expresar la misma situación, es decir, pagar o abonar a una deuda podrían ser equivalentes a restar o disminuir parte de mi deuda, de esta manera estas dos frases son *formas semánticas equivalentes,* es decir, son formas verbales que tienen el mismo significado.

Estas formas semánticas equivalentes se pueden observar en los siguientes enunciados, que son distintas formas de expresar "Juan tenía 3 más que Marcos":

Marcos tenía 3 menos que Juan
Juan tenía –3 menos que Marcos
Marcos tenía –3 más que Juan

Las formas anteriores son irreales en el uso cotidiano, ya que nadie expresaría oralmente "Marcos tenía –3 más que Juan", pero específicamente en la resolución de problemas de variación de comparaciones, se vuelven muy útiles, como se comprobará más adelante en este escrito.

Antes de mostrar la clasificación de problemas, debemos aclarar los términos utilizados en ella.

Estado. Cuando un número se refiera a la representación de estado deberá involucrar tres aspectos: un sujeto, una magnitud y una unidad de medida; por ejemplo: "La temperatura en Durango es de –2°C", se observa claramente que el sujeto corresponde a la ciudad de Durango, la magnitud en cuestión es la temperatura y la unidad de medida son grados centígrados. Comúnmente, al referirse a un estado, la referencia del tiempo es el instante en el que se expresa $e(t)$.

Comparación. Se establece como la diferencia existente entre dos estados que se refieren a la misma magnitud en un instante determinado, por ejemplo, "La temperatura en Acapulco es 10 grados mayor que en Querétaro", ($C_{ed}(t) = d(t) - e(t)$).

Variación. La variación de un estado se refiere a la comparación de una misma función estado en momentos diferentes ($v_e(t,s) = e(s) - e(t)$). Como ejemplo de éstos, podría ser "Sergio tiene diez pesos por la mañana; en el transcurso del día recibe cincuenta pesos, por consiguiente por la noche tiene sesenta pesos".

El cuadro 1 muestra la estructura funcional y la forma semántica de la clasificación de Bruno y Martinón, así como algunos ejemplos de problemas resueltos junto con su forma sintáctica.

Obsérvese que las formas sintácticas propuestas con números signados en esta perspectiva teórica son equivalentes a expresiones con números naturales. Por ejemplo, $(+70) + (-38) = 70 - 38$.

La riqueza de la forma sintáctica $(+70) + (-38)$ se debe a que corresponde a la forma semántica: combinación de estados. Si se utiliza $70 - 38$, se pierde el significado del planteamiento del problema.

Cuadro 1

Estructura funcional	Forma semántica	Problema	Forma Sintáctica
$a(t) + b(t) = u(t)$	Combinación de estados	Karla compró 70 boletos de lotería de los cuales 38 no tienen premio. ¿Cuántos de los boletos sí tuvieron premio?	(+70) + (–38) = +32
$e(i) + v = e(f)$	Variación de un estado	El ascensor de un edificio se encuentra en el piso 2 del sótano. Si sube 18 pisos, ¿en qué piso se encuentra?	(–2) + (+18) = +16
$e + c = d$	Comparación de estados	Carlos tiene \$15. Juan tiene \$4 menos que Carlos. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	(+15) + (–4) = +11
$v(i,m) + v(m,f) = v(i, f)$	Combinación de variaciones sucesivas	La primera semana del mes realicé una compra de \$40 con mi tarjeta de crédito. La tercera semana realicé un pago de \$30 de capital a ésta. ¿Cuál es mi situación a fin de mes?	(–40) + (+30) = –10
$V_a(i,f) + V_b(i,f) = V_e(i,f)$	Combinación de variaciones	A Pedro le dieron \$7 de domingo, en casa de su abuelos, más tarde en casa de sus tíos perdió \$5 en volados con su primo Luis. ¿Cómo quedó la cantidad de dinero de Pedro?	(+7) – (+5) = +2
$V_e(i, f) + c = V_d(i', f')$	Comparación de variaciones	Ayer, de la madrugada al medio día, la temperatura aumentó 10º y hoy aumentó 3º menos que ayer. ¿Cuánto aumentó hoy?	(+10) + (–3) = +7
$V(i, f) + v = v(i', f')$	Variación de variaciones	El miércoles, Diana perdió \$5. El jueves, Diana perdió \$8 menos que el miércoles. ¿Cuánto perdió o ganó Diana?	(–5) – (–8) = (+3)

Cuadro 1 *(continuación)*

Estructura funcional	Forma semántica	Problema	Forma Sintáctica
$C_{ed} + C_{dg} = C_{eg}$	Combinación de comparaciones adyacentes	Alejandro tiene 3 canicas menos que María. Diana tiene 7 más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Diana que María?	(–3) + (+7) = (+4)
$C_{ag} + C_{bh} = C_{ed}$	Combinación de comparaciones	Rafael subió 3 pisos menos que Laura por las escaleras, pero subió 8 pisos más que Laura por el elevador. ¿Cuántos pisos en total subió más Rafael que Laura?	(–3) + (+8) = (+5)
$C(i) + v = C(f)$	Variación de una comparación	El lunes, Juan tenía \$3 más que Marcos, el martes Marcos ganó \$5 más que Juan. ¿Cuánto más tiene el martes Marcos que Juan?	(–3) + (+5) = (+2)
$C_{ed} + C = C_{gh}$	Comparación de comparaciones	Daniel tiene \$2 menos que Ernesto. Lo que Héctor tiene más que Gabriel es \$5 más de lo que tiene Ernesto que Daniel. ¿Cuánto dinero tiene Héctor más que Gabriel?	(2) + (+5) = (+7)

Estudio empírico

Para el análisis de estos problemas aditivos en estudiantes de secundaria, tenemos en cuenta los niveles conceptuales de *negatividad* descritos en el apartado "Antecedentes" de este artículo (Gallardo, 2002).

Además, hemos tenido muy presente que la sintaxis del álgebra identifica como equivalentes las operaciones de adición y sustracción de positivos y negativos. Así:

$$a + (-b) = a - (+b) \text{ con } a, b \in \mathrm{N}$$

$$a - (-b) = a + (+b) \text{ con } a,\ b \in \mathbb{N}$$

Obsérvese que estas equivalencias sintácticas permiten el tránsito del número sustractivo a los números relativo y aislado. Así, en $a - b = a - (+b)$, el primer miembro de la expresión contiene al sustractivo b. En el segundo miembro se encuentra el signado $+b$ con $a,\ b \in \mathbb{N}$.

En $a - a - c = -c$, el primer miembro comprende los números sustractivos: a, c. El segundo miembro contiene el número aislado: $-c$.

El tránsito de niveles de negatividad en una misma expresión es posible debido a la equivalencia sintáctica, tránsito que no es percibido por los alumnos principiantes en el estudio del álgebra elemental.

Bruno y Martinón (1997) afirman:

> La clasificación que damos y la distinción entre los aspectos funcionales y semánticos puede servir de reflexión a parte del profesorado de los niveles de primaria y secundaria sobre el tipo de situaciones que surgen en problemas aditivos y los conceptos que están en juego (estados, comparaciones, variaciones y las relaciones entre ellos).

Con el propósito de reflexionar y conocer la pertinencia de los problemas aditivos que proponen estos autores y retomando su afirmación anterior, analizamos el desempeño de 20 alumnos de 12 a 13 años, de una secundaria pública urbana. Estos alumnos habían recibido enseñanza sobre los contenidos referidos a números con signo, es decir, conocían las operaciones de suma y resta con estos números, así como la resolución de problemas aditivos que involucran números naturales (Vergnaud, 1982). Se supo, por medio de una charla con su profesor y la revisión de los apuntes de los estudiantes, que dichos contenidos fueron enseñados sin mayor profundidad o extensión, sólo fueron introducidos como lo marcan los programas oficiales de estudio, es decir, mediante contextos como temperaturas, dinero y similares. Cabe mencionar que los problemas propuestos en el cuadro 1 eran desconocidos para los estudiantes, ya que no habían recibido una instrucción formal sobre el conjunto de los números enteros. La ruta metodológica de la investigación consistió en aplicar un cuestionario piloto a una población con las mismas características que la población definitiva, incluso provenientes del mismo docente, a fin de liberar de ambigüedades los ítems que se presentarían en el cuestionario definitivo con la población principal del estudio. Dicho cuestionario contiene problemas equivalentes a los presentados en el cuadro 1, así como operaciones de números con signo, planteamiento e invención de problemas. A partir de los resultados de los cuestionarios, se pudo constatar que la mayoría de los estudiantes tenían muchas dificultades para representar las diversas situaciones por medio de número con signo y recurrían generalmente al dominio de los números naturales. (Basurto, 2007).

A partir de los cuestionarios, seleccionamos tres estudiantes que participaron en entrevistas individuales videograbadas en las que se abordaron situaciones aditivas en lenguaje natural, adiciones y sustracciones con números negativos, y también resolvieron e inventaron problemas pertenecientes a las 11 categorías de Bruno y Martinón mostradas en el cuadro 1. Estos tres estudiantes fueron seleccionados porque representaban claramente las reglas sintácticas adquiridas y, sobre todo, porque en sus registros, eran muy explícitos en sus procedimientos.

En este artículo, se analiza solamente a uno de los estudiantes, elegido entre los tres mencionados, a saber, el de mejor desempeño académico. Esta elección es válida, ya que lo que define la entrevista (Piaget, 1960) es el estudio en profundidad y en extensión de un caso. El "caso elegido" en todas sus variables evoca la situación inversa de la del método experimental, donde se intenta explorar las modificaciones de una sola variable en multitud de situaciones que constituyen ya sea la totalidad de un universo o una muestra representativa de éste. La entrevista, en cambio, trata de registrar la observación del mayor número posible de variables en un solo individuo. Se caracteriza, entonces, por centrar la investigación sobre comportamientos relatados por el sujeto, reacciones observables en el curso de la relación establecida con él y otras específicamente provocadas en condiciones sistémicas constantes, a fin de comprenderlas y explicarlas en sus particularidades. Podemos afirmar que, vía la entrevista, no entrevistamos sólo a un individuo, sino que nos acercamos a otros parecidos a él.

A continuación se muestran algunos de los diálogos de la entrevista que ponen al descubierto los hechos más relevantes del tema en cuestión. Los renglones del diálogo de cada fragmento se denotan por R1, R2, ..., R12, el entrevistador se identifica por la letra E y el estudiante por la letra A.

Fragmento 1: Se solicita al estudiante resolver la adición $(+5) + (-3) =$

Cuestiones observadas:

- Presencia de la equivalencia sintáctica $(+5) + (-3) = 5 - 3$
- Aparición del negativo como número sustractivo y como signado.

R1 E: Resolver: (+5) + (–3) =
R2 A: *[Escribe:]* +5 + – 3 = *[Dice:]* multiplicaría más por menos y sería menos... *[escribe:]* 5 – 3 = 2
R3 E: ¿El dos es positivo o negativo?
R4 A: Es positivo, porque se pone el signo del mayor y el cinco era mayor.

En este fragmento, la posibilidad que tiene el estudiante de utilizar la equivalencia sintáctica le permite regresar a los naturales. Por otra parte, el uso de una regla multiplicativa derivada de la enseñanza le ayuda a justificar su resultado (R2). Se observa un reconocimiento del número signado en lenguaje verbal (R4).

Fragmento 2: Se solicita al estudiante resolver la sustracción (+5) – (–3)=
Cuestiones observadas:

- Equivalencia sintáctica (+5) – (–3) = 5 + 3
- Aparición del negativo como número sustractivo y como signado.
- Aparición de formas semánticas equivalentes al realizar una operación.

R1 E: Resolver: (+5) – (–3) =
R2 A: *[Escribe:]* (+5) – (–3) = *+5 + 3 =* 8

R3 E: ¿Qué diferencia ves entre este menos (+5) – (–3) y éste (+5) – (–3)?
R4 A: El primero es el que va a restar y el segundo le va a dar valor al tres de negativo.
R5 E: ¿Entonces hay dos signos menos o es el mismo?
R6 A: Hay dos, uno para el número y otro para la operación.
R7 E: Si yo te pongo 0 – (–1) =
R8 A: Esto quiere decir que al cero se le está restando un número negativo o sea que se sumaría.
R9 E: ¿Por qué?
R10 A: Porque es como si debieras algo pero te quitas esa deuda. Es como algo que debo y lo pago para no deber. *[Interpretación generada en forma espontánea por el estudiante.]*

En este fragmento, la equivalencia sintáctica una vez más le permite al estudiante regresar a su zona de confort para la operatoria que son los naturales.

A pesar de su interpretación en cuanto a los signos, pone de manifiesto que reconoce la existencia de los números signados, así como la dualidad del signo menos (R6). De hecho, en R8 puede explicar correctamente la equivalencia sintáctica $0 - (-1) = 0 + 1$. Inmediatamente aplica una forma semántica equivalente basada en la equivalencia sintáctica. En R10 muestra de manera espontánea la forma semántica equivalente, ubicándola en el contexto de deudas y pagos. Esta interpretación surge en el sujeto de modo independiente al discurso del docente en la enseñanza sobre el tema.

Fragmento 3: Se solicita al estudiante que invente un problema que se resuelva con la operación $(-5) - (-2)=$

Cuestiones observadas:

- Equivalencia sintáctica $(-5) - (-2) = -5 + 2$
- Aparición del negativo como número sustractivo y como signado.
- Aparición de formas semánticas equivalentes en la invención de un problema.
- Redacción de un problema de forma semántica *variación de un estado*.

R1 E: Inventa un problema que corresponda a la expresión: $(-5) - (-2) =$
R2 A: *[El estudiante anota:]* "Juan debe $5.00 pesos, si paga $2.00, ¿cuánto deberá ahora?" *[Explica:]* Porque si debe $5.00 se está quitando una deuda de $2.00, ahora ya deberá menos, es decir, se quita lo que debía.
R3 E: Entonces quitar una deuda es equivalente a...
R4 A: A pagar.
R5 E: Tú crees que si tú le dices a un compañero tuyo "Juan debe $5.00 pesos, si paga $2.00, ¿cuánto deberá ahora?", ¿escribiría la operación $(-5) - (-2) =$?
R6 A: No.
R7 E: ¿Tú qué crees que anotaría tu compañero si tú le pones este problema?
R8 A: $-5 + 2 =$
R9 E: Entonces, ¿qué cambiarías del problema para que pudiera escribir la operación $(-5) - (-2) =$?
R10 A: Diría, "Juan debe $5.00 pesos, si se quita una deuda de $2.00, ¿cuánto deberá ahora?"

R11 E: De esa manera, ¿sí crees que escribiría la operación (–5) – (–2) =?
R12 A: Sí.

En este fragmento, el primer problema que redacta el estudiante en R2 muestra que antes de inventar el problema analizó o resolvió la operación y avistó la posibilidad de recurrir a la equivalencia sintáctica, con lo que se vuelve más sencillo y cotidiano al lenguaje natural. Además, justifica, vía una forma semántica equivalente en R3 y R4, el porqué de su redacción. Más adelante, es capaz de redactar un problema totalmente correspondiente a la operación planteada (R10), con lo que es capaz de transitar del lenguaje natural al simbólico.

Fragmento 4: Solicita al estudiante redactar una situación en la que involucre el número –9

Cuestiones observadas:

- Aparición del negativo como número sustractivo.
- Redacción de una situación en términos de la forma semántica *variación de un estado*.

R1 E: Escribe una situación en la que aparezca el número –9.
R2 A: Tenía 12 lápices y me robaron nueve. ¿Cuántos me quedan?
R3 E: Entonces, para ti, robar, quitar, y qué otra palabra sería de signo negativo.
R4 A: Restar

En este fragmento, el problema que redacta el estudiante muestra la forma semántica *variación de un estado*, en la que se pone de manifiesto el negativo como número sustractivo: R3, R4.

Fragmento 5: Se solicita al estudiante que invente un problema que se resuelva con la operación (–4) + (–3) =

Cuestiones observadas:

- Aparición del negativo como número sustractivo, signado y aislado.
- Redacción de un problema de forma semántica *combinación de variaciones*.

R1 E: Inventa un problema que corresponda a la operación: $(-4) + (-3) =$
R2 A: Mi papá me pidió 4 pesos y mi hermano otros tres. Si tenía 8 pesos, ¿cuánto me quedó?
R3 E: ¿Cómo resolverías tu problema?
R4 A: *[Anota:]* $(-4) + (-3)= -7$
R5 E: Entonces, si tenía 8 pesos, ¿cuánto dinero me quedó?, ¿te quedaron menos siete pesos?
R6 A: No, esto es en total lo que presté. *[Anota:]* $(+8) - (-7) =$ *[el estudiante no puede contestar]*.
R7 E: A ver, concéntrate en la operación planteada.
R8 A: *[El estudiante anota:]* Mi papá me pidió 4 pesos y mi hermano otros tres. ¿Cuánto me pidieron en total?
R9 E: ¿Cómo resolverías el problema?
R10 A: *[Anota:]* $(-4) + (-3) = -7$

En este fragmento, el primer problema que redacta el estudiante en R2 trata de conservar la forma semántica de *variación de un estado* en la parte “Si tenía 8 pesos, ¿cuánto me quedó?” Al llevar al estudiante a la operación planteada, surgió un problema con una forma semántica distinta y menos común (R8), además de la presencia del negativo como número aislado (R10).

Fragmento 6: Este caso se refiere a la resolución de un problema de la forma semántica comparación de variaciones *(R1)*

Cuestiones observadas:

- Equivalencia sintáctica $(+10) - (+3) = (+10) + (-3)$
- Aparición del negativo como número sustractivo y como signado.

R1 E: Resolver: ayer, de la madrugada al medio día, la temperatura aumentó 10° y hoy aumentó 3° menos que ayer. ¿Cuánto aumentó hoy?
R2 A: *[El estudiante anota:]* $(+10) - (+3) = 7$
R3 E: En lo que anotaste ¿el +10 se refiere a que de la madrugada al medio día la temperatura aumentó 10°?
R4 A: Sí.
R5 E: El menos entre más diez y más tres a qué se refiere.
R6 A: Sería el de hoy aumentó, pero tendría que ser con signo de más.

R7 E: A ver, entonces, ¿cómo se escribiría?
R8 A: *[El estudiante anota:]* (+10) + (–3) = 7.

En este fragmento, el problema que resuelve el estudiante lo conduce a una equivalencia sintáctica R2, R8 que, al confrontarla con el lenguaje natural del enunciado, pone en evidencia que no son semánticamente equivalentes.

Fragmento 7: Se refiere a la resolución de un problema de la forma semántica variación de variaciones *(R1)*

Cuestiones observadas:

- Aparición del negativo como número sustractivo y como signado.
- Aparición de formas semánticas equivalentes en la invención de un problema.

R1 E: Resolver: el miércoles Diana perdió \$5. El jueves Diana perdió \$8 menos que el miércoles. ¿Cuánto perdió o ganó Diana?
R2 A: El estudiante anota: (–5) – (–8) = 3

R3 E: Bien, ¿y este menos (–5) – (–8) = 3 de qué es?
R4 A: De lo que perdió.

R5 E: ¿Y éste? (–5) – (–8) = 3.
R6 A: De que perdió ocho menos que el miércoles.
R7 E: Entonces ¿el primer menos es de que perdió y el segundo es de que perdió menos que el miércoles?
R9 A: Sí.
R10 E: Como perdió menos de lo que había perdido, ¿eso quiere decir qué?
R11 A: Que ganó.

En este fragmento, el problema lleva al estudiante al uso del negativo como número signado y como número sustractivo (R3 a R5), además de poder interpretar correctamente, vía formas semánticas equivalentes, la situación planteada: R10, R11.

Fragmento 8: Este caso se refiere a la resolución de un problema de la forma semántica variación de una comparación *(R1)*

Cuestiones observadas:

- Determinación espontánea de las funciones estado del problema.
- Aparición del negativo como número sustractivo y como signado.

R1 E: Resolver: el lunes Juan tenía \$3 más que Marcos, el martes Marcos ganó \$5 más que Juan. ¿Cuánto más tiene el martes Marcos que Juan?
R2 A: *[El estudiante dice y anota:]* Si, por ejemplo, el lunes Juan tenía 8 pesos y Marcos 5, pero el martes, Marcos ganó 5 pesos más que Juan, entonces, le sumaría 5 pesos a los 5 que tenía Marcos ¿y a Juan?

En el renglón anterior se ve como el estudiante trata de entender las relaciones entre los datos del problema, determinando las funciones estado de Juan y Marcos el día lunes mediante una suposición numérica.

R3 E: No se le suma nada, ¿o sí?
R4 A: *[El estudiante no contesta.]*
R5 E: Por ejemplo, si el martes Marcos ganó 6 pesos, Juan ganaría 1 peso.
R6 A: Sí, es cierto.
[El estudiante parece terminar de comprender las relaciones del problema.]
R7 E: Bueno, entonces ¿Cuánto más tiene el martes Marcos que Juan?
R8 A: Dos.

Esta respuesta es correcta si retomamos la suposición que el estudiante realizó en un inicio en la que, si el lunes Juan tenía \$8 y Marcos \$5, pero el martes, Marcos ganó \$5 más que Juan, si se le suma estos \$5 más los \$5 que tenía Marcos, por lo que tendría \$10 y Juan seguiría con \$8, ya que no ganó nada en el caso de esta suposición. Por lo que Marcos tiene \$2 más que Juan el martes.

R9 E: Bien ¿cómo lo resolverías con una operación?
R10 A: Ganó 5 pesos más que Juan *[el estudiante anota:]* (+5) – *[luego anota:]* (+3) *[y dice:]* son los que Juan tenía más que Marcos *[después anota:]* = 2 *[y dice:]* porque Marcos ganó \$5 más que Juan, que ya tenía \$3 antes.
R11 E: Bueno.

En este fragmento, el problema se refiere a una de las formas semánticas más complejas, de la clasificación de Bruno y Martinón (1997), la *variación de una comparación,* provocando en el estudiante una estrategia que no había mostrado anteriormente que lo lleva a suponer los valores de las funciones estado, a fin de poder dar el resultado correcto como se muestra en R8. Cabe mencionar que esta estrategia pudo ser llevada a buen término, ya que el entrevistador retoma el tren de pensamiento del estudiante en R5, con lo que éste continúa con su estrategia de suposición hasta entender y resolver la situación planteada. En R10, el estudiante no puede alcanzar la expresión sintáctica correcta del problema, a pesar de que, en los renglones anteriores, le fue posible llegar a la semántica de éste. El entrevistador considera correcto lo anotado por el estudiante, gracias a la equivalencia sintáctica entre la expresión propuesta $(+3) - (+5) = +2$ y la dada en la clasificación de Bruno y Martinón $(-3) + (+5) = +2$, R11.

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Basados en los resultados obtenidos en el estudio empírico, podemos afirmar que existe una relación entre los niveles conceptuales del número negativo, la forma semántica y el contexto de los problemas. Ahora bien, puesto que esta interrelación es compleja, el sujeto puede avanzar conceptualmente en una tarea, pero no necesariamente en la siguiente.

Así, cuando el estudiante realiza adiciones y sustracciones con números positivos y negativos, escribe una expresión sintáctica equivalente, obtenida por la aplicación de la ley multiplicativa de los signos (fragmento 1, R2). Nos referimos a la equivalencia $(+5) + (-3) = 5 - 3$. Este hecho le permite el retorno a los números naturales que le son familiares y abandona los números signados. Cabe aclarar que el docente de este alumno no había trabajado las reglas de simplificación de la escritura de los enteros y el isomorfismo entre los naturales y los enteros positivos. La aceptación del negativo se limita, entonces, al reconocimiento de éste como número sustractivo, ya que los problemas más frecuentes presentados por el profesor son los de variación en el contexto de deudas y ganancias. Como consecuencia de ello, el estudiante inventa problemas que corresponden a la estructura más simple de Bruno y Martinón, la de *variación de un estado* (fragmento 4, R2).

Los problemas de *variación de un estado* con el negativo como número sustractivo no permiten que otros niveles del número emerjan en un inicio (fragmento 5, R2). En este mismo fragmento, más adelante (fragmento 5, R8), observamos que la necesidad de inventar un problema correspondiente a la operación planteada provocó en el estudiante la invención de una forma semántica distinta, es decir, una estructura de problema diferente correspondiente a la forma *combinación de variaciones sucesivas*, en la que el sujeto acepta distintos niveles del negativo, a saber, como número sustractivo, número relativo, número signado y número aislado (fragmento 5, R10).

El surgimiento de las formas semánticas equivalentes que, aunque irreales en el lenguaje cotidiano, en la situación escolar provocan la aparición con significado de los positivos y negativos, se pudo observar en el fragmento 2 en R10, en el fragmento 3 en R3, R4 y R10, así como en el fragmento 7 en R9 y R10.

Además, diversificar el contexto en los problemas propuestos por Bruno y Martinón (1997) genera nuevas formas semánticas. De esta manera, el estudiante logrará inventar problemas que lo conduzcan a situaciones distintas a las del muy familiar contexto monetario, dotando de nuevos significados a la negatividad que surge en él. Mencionan estos autores que no todas las categorías de problemas son adecuadas para la educación secundaria. Aquí, se optó por incluirlas con el propósito de llevar al estudiante a reflexionar sobre el tema. Esto provocó el surgimiento de acciones espontáneas por parte del sujeto, quien asignó valores arbitrarios a ciertos estados, lo cual es un procedimiento más primitivo con cierta similitud al del tanteo (fragmento 8, R2). Esta situación parece deberse a que el estudiante se enfrentó a una forma semántica más compleja como es la *variación de una comparación*, en la que se desconocen los valores de las funciones estado de los sujetos que intervienen en el problema. El hecho de que el estudiante trabaje con comparaciones involucra mayor incertidumbre en sus estrategias, por lo que las suposiciones son una manera de aclarar dicha incertidumbre y poder operar con mayor confianza.

Si bien es cierto que la equivalencia sintáctica puede evitar la extensión de los números naturales a los enteros, como ocurrió en el fragmento 1, R2, en el fragmento 2, R2 y R3, así como también en el fragmento 6, R2 y R8, el estudiante, a través de la recuperación de la equivalencia sintáctica correcta correspondiente a la semántica del problema, puede interpretar los números negativos.

Por último, es importante señalar que la transferencia del lenguaje verbal del enunciado del problema al lenguaje simbólico de las matemáticas se ve deteriorada conforme las estructuras de los problemas se vuelven menos familiares al estudiante, como sucedió en el fragmento 8.

Una vez presentados los resultados del estudio empírico, retomamos el ámbito histórico para recuperar la perspectiva teórica de Bruno y Martinón en el análisis de los problemas del pasado.

El problema de la dote de Cardano supone *a priori* un número relativo negativo que en el proceso de resolución de la ecuación surge como un número sustractivo y se obtiene una solución positiva. Será en la interpretación de esta solución donde Cardano dotará de sentido negativo a la respuesta, vía las formas semánticas equivalentes. Veamos: él afirma "48 es lo que Francis posee en lo negativo, lo que carece. Así Francis posee menos 48 oros".

Esto es, "poseer 48 oros en lo negativo" es equivalente a "carecer de 48" y equivalente a "poseer menos 48 oros", es decir, son formas semánticas equivalentes, de las cuales "carecer de 48" es la más común en el lenguaje natural.

Ahora bien, gracias a la interpretación de la solución vía las formas semánticas equivalentes, específicamente "poseer menos 48 oros", recuperamos finalmente en Cardano el nivel de número signado. En la solución del problema se produce el tránsito del número relativo al sustractivo que, a su vez, se transforma en signado y aislado.

Los dos problemas de Chuquet están escritos en lenguaje sincopado. En los problemas de "Las piezas de ropa" y "Las manzanas" podemos interpretar en términos de las formas semánticas equivalentes la afirmación de Chuquet: "sumar una deuda equivale a restar dicha cantidad". En los procesos de resolución de estos problemas, el número negativo transita de número sustractivo a signado, relativo y aislado.

REFLEXIONES FINALES

En este artículo, hemos podido constatar la pertinencia de recurrir al estudio de las ideas aritmético-algebraicas, vía el análisis de textos históricos matemáticos concebidos como procesos de cognición pertenecientes a una episteme, de la misma manera que se analizan los procesos cognitivos de las producciones, tanto escritas como verbales, de los estudiantes actuales.

Con este telón de fondo, ha sido posible rastrear, en sujetos del pasado y del presente, formas semánticas equivalentes, necesarias para la interpretación de los números negativos en la solución de problemas y ecuaciones cuando el lenguaje algebraico aún no se encuentra firmemente consolidado.

Es importante señalar que tanto las equivalencias sintácticas como las formas semánticas permiten identificar, como una única operación, la adición y sustracción de números signados, así como también ponen al descubierto los distintos niveles conceptuales de sustractivo, signado, relativo y aislado.

Al igual que en los textos históricos de Cardano y de Chuquet, en el presente, durante la transición de la aritmética al álgebra, los estudiantes extienden su noción de número de manera gradual, transitando por los distintos niveles de negatividad y apoyándose fuertemente en el uso del lenguaje natural para validar sus interpretaciones. Podemos afirmar que el lenguaje natural, intrínseco al lenguaje matemático, permite que la negatividad se manifieste vía las formas semánticas equivalentes hasta el surgimiento del álgebra abstracta que da cabida a los números enteros y desvanece cualquier forma de negatividad.

El estudio empírico revela que un mismo sujeto avanza de manera desigual en la adquisición del concepto de número, esto es, depende del grado de complejidad semántica del enunciado del problema por resolver. Cuando la tensión semántica-sintaxis llega a su clímax, como en el caso de la *variación de una comparación,* el estudiante determina espontáneamente funciones estado mediante suposiciones numéricas, datos que no aparecen en el enunciado del problema.

Por último, recomendamos para la enseñanza en el aula: posponer las leyes de los signos propias del dominio multiplicativo hasta que se haya comprendido cabalmente la sustracción de números signados, así como promover la riqueza de contextos pertenecientes a una diversidad de formas semánticas en el planteamiento de problemas. Ambos hechos podrían contribuir a la deseada extensión numérica de los naturales a los enteros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Basurto, E. (2007), *Diferentes sintaxis de algunas calculadoras básicas en la escritura de operaciones con números enteros y la resolución de problemas aditivos,* Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Bruno, A. y A. Martinón (1997), "Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos", *Educación Matemática,* vol. 9, núm. 1, México, Editorial Iberoamérica.

Carpenter, T. y J. Moser (1982), "The development of addition and subtraction problem solving skills", en *Addition and Subtraction: A cognitive perspective,* New Jersey, Lawrence Erlbaum, pp. 9-24.

Cardano, G (1545), *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis,* ed. y trad. al inglés de T.R. Witmer, Cambridge, MIT Press (1968).

Castro, E., L. Rico y F. Gil (1992), "Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 10, núm. 3, pp. 243-253.

Filloy, E. y T. Rojano (1984), "La aparición del lenguaje aritmético-algebraico", *L'Educazione Matematica,* año V, núm. 3, pp. 278-306.

Fuson, K. (1992), "Research on whole number addition and subtraction", en *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* Nueva York, Macmillan, pp. 243-275.

Gallardo, A. (1994), *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas,* Tesis Doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

——— (2002), "The extension of natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra", *Educational Studies in Mathematics. An International Journal,* Anna Sierpinska (ed.), vol. 49, núm. 2, pp. 171-192.

Lizcano, E. (1993), *Imaginario colectivo y creación matemática,* Madrid, Universidad Autónoma de Madrid/Gedisa.

Marre, A. (1880), "Notice sur Nicolas Chuquet et son *Triparty en la science des nombres*", *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matem. e Fis,* núm. 13, pp. 555-659 y 693-814.

——— (1881), "Appendice au *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet parisien", *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matem. e Fis,* núm. 14, pp. 413-460.

Nesher, P. y J. Greno (1983), "Categorías semánticas de problemas verbales, una reconsideración", en *Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* editadas por Laboratoire IMAG, Grenoble, Francia, 13 a 18 de julio de 1981, pp. 63-68.

Piaget, J. (1960), *Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático,* Buenos Aires, Biblioteca de Psicología Evolutiva, Paidós.

Vergnaud, G. (1982), "A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems", en T. Moser Carpenter (ed.), *Addition and subtraction: A Cognitive perspective,* Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 35-39.

DATOS DE LOS AUTORES

Aurora Gallardo Cabello
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav,
Instituto Politécnico Nacional, México
agallardo@cinvestav.mx

Eduardo Basurto Hidalgo
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav,
Instituto Politécnico Nacional, México
basurtomat@hotmail.com