

## El uso de software dinámico en el estudio de problemas geométricos de variación

Armando Sepúlveda López y Lorena García García

**Resumen:** En este trabajo se abordan dos problemas geométricos de variación de notable importancia histórica: el Problema de Fagnano, relacionado con el perímetro de un triángulo inscrito en un triángulo acutángulo dado; y el Problema del punto de Fermat, relacionado con la suma de distancias de un punto interior a los vértices de un triángulo. Ambos involucran nociones fundamentales del currículum escolar y un proceso de variación. Mediante una regla graduada o un software dinámico, como el Cabri géomètre, se puede visualizar que, si varían los puntos de referencia, cambian el perímetro del triángulo inscrito y la suma de distancias a los vértices, la existencia de valores mínimos para esas variables corresponde a la solución de los problemas. Aquí se analiza el proceso de solución con distintos acercamientos y aplicaciones heurísticas, se destaca la potencia del uso del software dinámico y se da la argumentación geométrica que justifica la solución.

*Palabras clave:* resolución de problemas, variación, optimización, heurística, simetría.

### The use of dynamic software in the study of geometric problems of variance

**Abstract:** The present paper discusses two problems of geometric variation of remarkable historical importance: Fagnano's Problem, that relates to the perimeter of a triangle inscribed in a given acute triangle; and the Fermat's point Problem, that's relates the sum of distances from inner point to three vertex of a given acute triangle. Both problems involve fundamentals notions of the school curriculum and a variation process. Using a ruler or a dynamic software such as Cabri Geometry, you can see that if multiple reference points, the perimeter of the inscribed triangle and the sum of distances to the vertices change, the existence of minimum values for these variables corresponds to the solution of problems. Here we analyze the process of solution with different heuristic

Fecha de recepción: 14 de febrero de 2011.

approaches and applications, highlighting the potential use of dynamic software and giving the geometric argument that justifies the solution.

*Keywords:* problem solving, variation, optimization, heuristic, symmetry.

## INTRODUCCIÓN

Las matemáticas ocupan una parte importante del currículum escolar en los diferentes sistemas educativos. La mayoría de las personas que acudieron a la escuela, hayan terminado o no una carrera profesional, tuvieron la necesidad de estudiar varios temas de matemáticas en las distintas materias o asignaturas que aparecen, prácticamente, en todos los grados escolares de los niveles básicos y medio superior; en el nivel superior sólo unas cuantas carreras las excluyen de su plan de estudios. Entre las asignaturas de las matemáticas básicas se encuentra la geometría, la cual empieza a estudiarse desde la primaria y contribuye con varios de los contenidos fundamentales del currículum escolar: figuras geométricas y sus propiedades, proporcionalidad, semejanza, entre otros; éstos aparecen explícita o implícitamente en los programas de estudio de diferentes asignaturas. Es decir, en el ámbito educativo se reconoce la importancia del carácter formativo que proporciona el estudio de la geometría.

La noción de variación, una de las más importantes en el currículum escolar, por lo regular aparece asociada con diversos contenidos matemáticos desde los estudios elementales, por ejemplo, en el estudio de las funciones; en las sucesiones numéricas; su inclusión en el cálculo conforma lo que se llama la matemática del cambio. En geometría también existen problemas geométricos de variación que pueden tener distintas formas de solución, pero el acercamiento geométrico es poderoso y, en ocasiones, simple.

Algunas de las preguntas que guían el desarrollo del presente trabajo son: ¿Qué aspectos del quehacer matemático intervienen en la resolución de determinado tipo de problemas? ¿Cómo contribuye el uso del software dinámico en el entendimiento y solución de problemas geométricos de variación? Aquí se analizan dos problemas geométricos de variación de gran importancia histórica que suelen estudiarse en cursos de Geometría Moderna en las escuelas de ciencias, los cuales pueden ser catalogados como *no rutinarios*: el *Problema de Fagnano* y el *Problema del punto de Fermat* (Coxeter, 1971, pp. 44-45). Cuando los estudiantes abordan por primera vez este tipo de problemas, es común observar dificultades para su entendimiento y cómo atacarlos. Por ello, aquí se analizan posibles

formas de solución y se destacan la aplicación de estrategias heurísticas y el uso de recursos matemáticos para su solución; además, se incorpora el software dinámico como un medio que puede ayudar a los estudiantes para el entendimiento y la solución. Esperamos que la manera en que presentamos estos problemas sea de utilidad para los lectores.

## CONSIDERACIONES TEÓRICAS

La función formativa de la geometría ha sido esencial en el desarrollo personal de profesores, profesionales de la educación matemática, estudiantes y, en general, de toda persona educada, pues presenta valores insustituibles que Thom (1973) resume en tres puntos: 1) La geometría proporciona distintos puntos de vista en todas las áreas de las matemáticas y otras ciencias. 2) Las interpretaciones geométricas proporcionan visiones directoras del entendimiento intuitivo y permiten avanzar en la mayoría de las áreas de las matemáticas. 3) Las técnicas geométricas proporcionan herramientas eficaces para resolver problemas en casi todas las áreas de las matemáticas.

Además, existe el reconocimiento de que la formación matemática de los estudiantes se robustece cada vez que éstos se involucran en procesos de resolución de problemas (Polya, 1945; NCTM, 2000; Santos, 2007). La resolución de problemas es la línea de trabajo que mayor progreso ha traído a la educación matemática y, si bien es cierto que el desarrollo de las matemáticas se debe, en buena medida, a la resolución de los problemas que matemáticos y otros científicos se han planteado a lo largo de la historia, no es sino hasta los trabajos de George Polya, en 1945, con su método para resolver problemas, que esta actividad comienza a considerarse importante en la educación matemática.

Apenas en la década de 1970 empezó a reconocerse ampliamente el trabajo de Polya, quien argumenta que en la resolución de problemas intervienen los procesos heurísticos, el monitoreo y control que se desarrolla como consecuencia de la reflexión y el uso de recursos matemáticos. Las acciones físicas o mentales que contribuyen a encontrar pistas o ideas que ayudan a resolver los problemas fueron identificadas por Polya como heurísticas; algunas veces son trazos, toma de valores extremos, aplicación de resultados conocidos, comparaciones, visualizaciones, descarte de posibilidades, etcétera.

El NCTM (2000, pp. 18-19) destaca la importancia de considerar la resolución de problemas como el eje central de enseñanza de las matemáticas y se pro-

mueve el desarrollo de estudios e investigaciones relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se afirma que la resolución de problemas es una actividad fundamental que los estudiantes deben realizar de manera individual y colectiva, pues propicia un ambiente para lograr un aprendizaje significativo que implica la intervención de otros procesos de pensamiento, como son la búsqueda de conexiones, el empleo de distintas representaciones, la necesidad de justificar los pasos dados en la solución de un problema y comunicar los resultados obtenidos.

Schoenfeld (1992) identifica las características propias del pensamiento matemático con las acciones típicas que realiza un matemático cuando se encuentra resolviendo problemas, las cuales son: tomar casos particulares, descubrir patrones y relaciones, plantear conjeturas, hacer generalizaciones y justificar resultados. Así, para este investigador, el reto en la instrucción matemática es generar condiciones de aprendizaje en las que los estudiantes tengan oportunidad de realizar este tipo de prácticas (p. 345).

Diversas propuestas curriculares (NCTM, 2000; SEP, 2006) plantean como aspiración central que los estudiantes desarrollen los distintos tipos de razonamiento matemático a lo largo del currículum escolar; entre ellos, el razonamiento geométrico. La geometría está inmersa en el mundo físico, el sujeto empieza a aprenderla, incluso, antes de la educación escolar, sus nociones se desarrollan inicialmente a través de los sentidos (el tacto, la vista) que le permiten distinguir formas, hacer clasificaciones y, posteriormente, con la aparición del lenguaje, hacer descripciones y deducciones de objetos y proposiciones matemáticas, aspectos que forman parte de los elementos básicos del razonamiento geométrico. La geometría es “el lugar” del currículo donde los estudiantes pueden aprender e iniciarse en la estructura axiomática de las matemáticas.

Además, el uso de la tecnología resulta cada vez más relevante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en particular de problemas de variación. La incorporación de la computadora, con software dinámico (Cabri géomètre, por ejemplo) como herramienta de estudio, permite que la atención del estudiante se centre en los procesos de razonamiento, de reflexión y de resolución de problemas, donde pueden aflorar ciertos modos de pensar que de otra manera sería difícil observar (Santos, 2007). En la actualidad, se considera que el uso de la tecnología puede ayudar a entender los problemas de variación.

Finalmente, un aspecto central en el estudio y aprendizaje de las matemáticas es el desarrollo de la visualización, proceso asociado a la “formación” de imágenes y a su uso para el entendimiento y descubrimiento matemático. Esta

formación de imágenes puede ser producida por un acto mental (imaginarla), o mediante el uso de lápiz y papel, o con tecnología. En este sentido, Presmeg (2006, pp. 205-235) realiza investigaciones sobre la visualización e imaginación espacial y aborda el papel de la mediación de los procesos visuales en matemáticas de la escuela secundaria; hace una revisión histórica sobre el uso y evolución de este tema y sugiere que la construcción de imágenes mentales en los estudiantes puede tomar más tiempo que el requerido en los aspectos analíticos.

## PRESENTACIÓN DE LOS PROBLEMAS Y FORMAS DE SOLUCIÓN

### INTRODUCCIÓN

El matemático italiano Toshi di Fagnano (1715-1797) planteó un problema geométrico que involucra la noción de variación, conocido como *Problema de Fagnano*. Su solución depende, básicamente, de una de las estrategias heurísticas más utilizadas en la resolución de problemas geométricos, la simetría; y de la aplicación del teorema de la desigualdad del triángulo.

### PROBLEMA DE FAGNANO

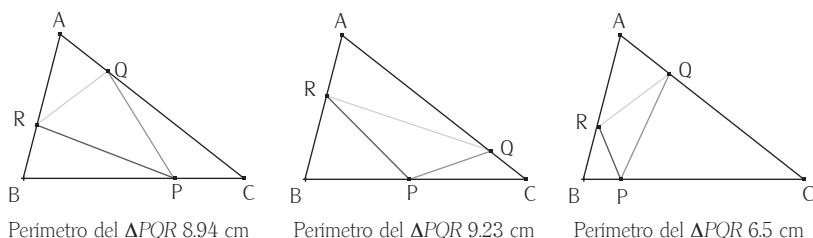
*Dado un triángulo acutángulo ABC, inscribir un triángulo PQR cuyo perímetro sea el más pequeño posible (Coxeter, 1971, p. 44).*

#### *Acercamiento por ensayo y error*

Para el triángulo acutángulo  $ABC$ , inscribamos un  $\Delta PQR$  en el  $\Delta ABC$ . Con ayuda de algún software como el Cabri géomètre, podemos medir el perímetro del  $\Delta PQR$ . La figura 1 muestra valores del perímetro para triángulos particulares, incluido el de menor perímetro posible.

Los casos anteriores nos conducen a entender que, en efecto, se trata de un problema de variación y que, para diferentes posiciones de  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , en la mayoría de los casos tendremos perímetros distintos. Sin embargo, este acercamiento puede resultar demasiado laborioso para llegar a la solución, pues tendríamos que considerarse tres casos: *i)* mantener fijos  $Q$  y  $R$  para localizar la posición

**Figura 1.** Perímetro del triángulo inscrito para casos particulares



de  $P$  donde haya un valor mínimo; *ii*) luego mantener fijos el  $P$  encontrado y  $Q$  para localizar  $R$  que dé el valor mínimo; y *iii*) mantener fijos los dos puntos encontrados  $P$  y  $R$  para localizar  $Q$  donde el valor sea mínimo. Nuevamente, la perseverancia y paciencia serán claves para aproximarse a la solución. Así, la exploración con lápiz y papel pronto nos parecerá cansada y tediosa; el uso del software dinámico nos ayudará a visualizar un mayor número de casos y, entre ellos, encontrar el triángulo de perímetro mínimo.

Hasta aquí, la estrategia heurística utilizada fue tomar casos particulares; y el uso de recursos matemáticos consistió en medir y sumar distancias entre dos puntos.

### Solución geométrica

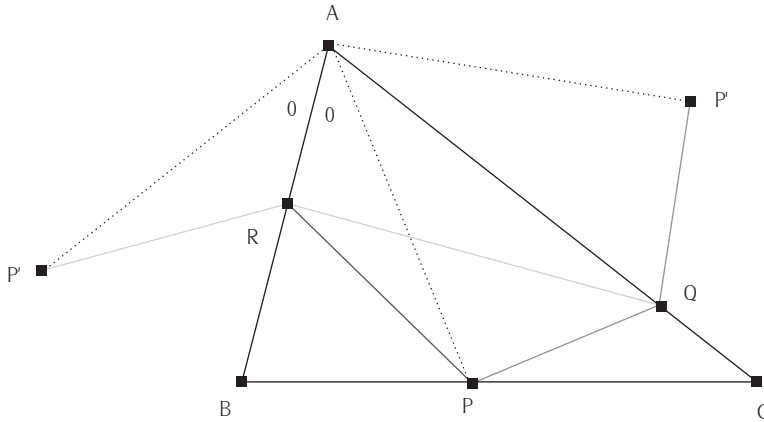
Veamos de manera general cómo encontrar el triángulo de perímetro mínimo, inscrito en un triángulo acutángulo.

Sea el  $\Delta ABC$  es el triángulo acutángulo dado, inscribamos cualquier  $\Delta PQR$ . Utilicemos la simetría de un punto respecto a una recta; sean  $P'$  y  $P''$  los simétricos de  $P$  respecto a  $AC$  y  $AB$ , respectivamente. Unimos  $P'$  con  $Q$  y  $P''$  con  $R$ , como en la figura 3.

Por ser  $P$  y  $P'$  simétricos respecto a  $AC$  (figura 3), entonces:

$$\begin{array}{l}
 PQ = P'Q, \text{ y también } AP = AP', \\
 \text{por la misma razón: } RP = RP'', \text{ y también } AP = AP'', \\
 \text{Entonces: } PQ + QR + RP = P'Q + QR + RP'', \\
 \text{y también: } AP' = AP''.
 \end{array}$$

**Figura 2.** Perímetro de  $\Delta PQR$ :  $P'R + RQ + QP'$ .  $P''$  y  $P'$  simétricos respecto a  $AB$  y  $AC$



Por lo que  $P'Q + QR + RP''$  es el perímetro del  $\Delta PQR$ . Teniendo en cuenta que  $P'Q + QR + RP''$  es una manera de ir de  $P'$  a  $P''$ , dicha longitud es mínima cuando  $P'P''$  es un segmento (figura 3). Por lo que, de todos los triángulos inscritos posibles, el triángulo de menor perímetro lo obtenemos cuando  $R$  y  $Q$  están sobre la línea recta  $P'P''$ .

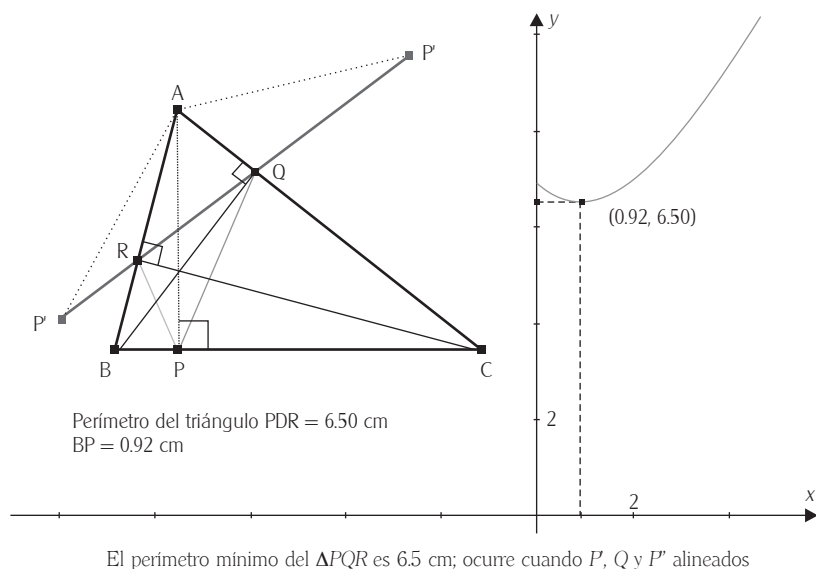
Aún más, de la figura 2 tenemos que  $\angle P''AP' = 2\angle BAC$ ; es decir,  $\angle P''AP'$  es constante. Entonces la base del triángulo isósceles  $P''AP'$  es mínima cuando los lados  $P''A$  y  $AP'$  sean mínimos, esto pasa cuando  $AP$  tiene longitud mínima, lo cual ocurre cuando  $AP$  es perpendicular a  $BC$ ; es decir, cuando  $AP$  es la altura del  $\Delta ABC$ .

Pero bien pudimos haber empezado con  $B$  o  $C$ , en vez de con  $A$ ; en esos casos, hubiésemos obtenido que  $BQ$  y  $CR$  son alturas del  $\Delta ABC$  desde  $B$  y  $C$ , respectivamente (figura 3). Este triángulo inscrito, que tiene por vértices los pies de las alturas, se llama triángulo órtico o triángulo pedal.

### Visualización con el software dinámico

Con ayuda de Cabri, se puede construir la gráfica del perímetro del  $\Delta PQR$  en función de la distancia  $BP$ , por ejemplo. La figura 3 muestra la variación del perímetro del  $\Delta PQR$  al mover los vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . El punto mínimo de la curva corresponde al valor mínimo posible para el perímetro del  $\Delta PQR$  inscrito en el triángulo acutángulo  $\Delta ABC$ .

**Figura 3.** El triángulo pedal es el de menor perímetro; gráfica obtenida con Cabri



## PROBLEMA DEL PUNTO DE FERMAT

### Introducción

Se dice que en cierta ocasión Fermat (1601-1665), *Príncipe de los aficionados*, retó al matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileo, con el siguiente problema: “Dadas tres ciudades representadas por los puntos  $A, B$  y  $C$ , unir las por una red de carreteras de modo que sea de longitud mínima”. El punto  $P$  del que parte la red mínima hacia  $A, B$  y  $C$  se conoce como Punto de Fermat. El estudio de este problema incluye el desarrollo de importantes ideas matemáticas y temas de geometría.

Con una simple regla graduada, se puede ver que, si varía  $P$ , la suma de distancias de  $P$  a  $A, B$  y  $C$  también varía; un acercamiento formal permite ubicar cotas para la suma inferior y superior; posteriormente, se demuestra la existencia del punto  $P$  que minimiza la suma.



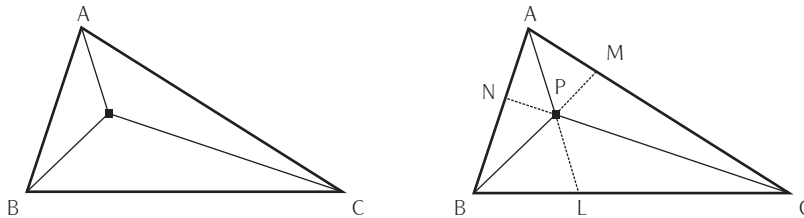
### Problema del punto de Fermat

Dado un triángulo acutángulo  $ABC$ , localizar el punto interior  $P$  cuya suma de distancias a los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  sea la más pequeña posible (Coxeter, 1971, p. 45).

### Acercamiento por toma de casos particulares

Dado el triángulo acutángulo  $ABC$ , consideremos un punto interior arbitrario  $P$ , tracemos los segmentos  $AP$ ,  $BP$  y  $CP$  (figura 4). Con ayuda de Cabri géomètre, podemos obtener el valor de la suma  $d = AP + BP + CP$  y ver que, si variamos  $P$ , el resultado de la suma  $d$  también varía. Podemos plantearnos las siguientes preguntas: ¿realmente existe  $d$  mínima?; si existe, ¿dónde se ubica  $BP$ ?; ¿cuánto vale  $\angle BPC$  en  $d$  mínima?; etcétera.

Figura 4. Problema del punto de Fermat; y trazos para acotar superiormente la suma



### Acotamiento de la suma de distancias

Es posible acotar  $d$  y concluir que, para cualquier punto  $P$ ,  $d$  está entre el semi-perímetro y el perímetro del triángulo  $ABC$ ; es decir:

$$\frac{AB+BC+CA}{2} < AP+BP+CP < AB+BC+CA$$

La primera desigualdad es inmediata; se obtiene al aplicar el teorema de la desigualdad del triángulo a los triángulos:  $ABP$ ,  $BCP$  y  $CAP$  (figura 4, izquierda), lo que nos da

$AB < AP + BP$ ,  $BC < BP + CP$ ,  $CA < CP + AP$ , sumando

$$\left( \frac{AB + BC + CA}{2} \right) < AP + BP + CP.$$

Para probar la segunda desigualdad, realizamos los siguientes trazos: prolonguemos  $AP$ ,  $BP$  y  $CP$  hasta cortar los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  en los puntos  $L$ ,  $M$  y  $N$  (figura 4, derecha).

En  $\triangle ABL$  y  $\triangle LCP$  tenemos:  $AP + PL < AB + BL$  y  $CP < PL + LC$ ;  
sumando y simplificando  
tenemos  $AP + CP < AB + BC.$  (A)

En  $\triangle BCM$  y  $\triangle MAP$  tenemos:  $BP + PM < BC + CM$  y  $AP < PM + MA$ ;  
sumando y simplificando  
tenemos  $BP + AP < BC + CA.$  (B)

En  $\triangle CAN$  y  $\triangle NBP$  tenemos:  $CP + PN < CA + AN$  y  $BP < PN + NB$ ;  
sumando y simplificando  
tenemos  $CP + BP < CA + AB$  (C)

De manera que, al sumar (A), (B) y (C), se obtiene la segunda desigualdad:

$$AP + BP + CP < AB + BC + CA.$$

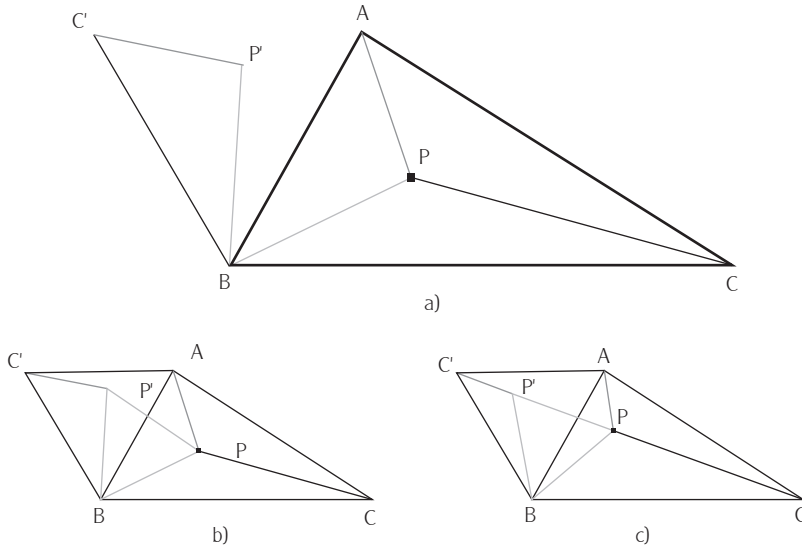
Veamos ahora cómo es que se obtiene el punto  $P$  que minimiza la suma  $AP + BP + CP$ .

### Solución geométrica

Considerando los triángulos  $APB$ ,  $BPC$  y  $APC$  (figura 5a), la rotación de uno de estos triángulos constituye la estrategia heurística (poco usual) para resolver el problema. Rotamos el  $\triangle APB$  un ángulo de  $60^\circ$  alrededor de  $B$  y obtenemos el  $\triangle C'P'B$  (figura 5b); los triángulos  $ABC'$  y  $PBP'$  son equiláteros).

Tenemos que:  $AP + BP + CP = C'P' + P'P + PC$

Figura 5. Heurística y trazos que resuelven el problema



El segundo miembro de esta igualdad es una manera de ir de  $C'$  a  $C$  (puntos fijos), la cual es mínima cuando  $C'$ ,  $P'$  y  $C$  están alineados (figura 5c). En este caso:

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle BPP' = 120^\circ, \text{ y } \angle APB = \angle C'P'B = 180^\circ - \angle PP'B = 120^\circ,$$

por lo que:

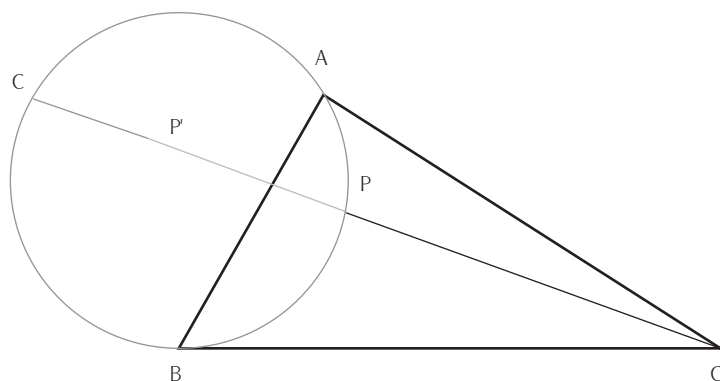
$$\angle APC = 120^\circ, \text{ ya que } \angle APC = 360^\circ - 240^\circ.$$

Así, el punto deseado  $P$ , para el cual  $AP + BP + CP$  es mínima, es el punto desde el cual cada uno de los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  subtenden un ángulo de  $120^\circ$ .

Es fácil ver que este punto es la intersección de la línea  $CC'$  y el circuncírculo del triángulo  $ABC'$  (figura 6), ya que si llamamos  $X$  a dicho punto de intersección y trazamos las cuerdas  $AX$  y  $BC$ , como  $C'X$  y  $AB$  son diagonales del cuadrilátero  $AXBC'$ , entonces:

$$\angle AXC' = \angle ABC' = 60^\circ; \angle AXC' = \angle ABC' = 60^\circ.$$

**Figura 6.** Obtención del punto  $P$  que minimiza la suma



Por lo que el punto  $X$  debe ser el punto  $P$ , pues ya se dijo, éste debe subtender al lado  $AB$  un ángulo de  $120^\circ$ . Aquí se utilizó una de las estrategias heurísticas más difíciles de anticipar y visualizar su aplicación: la rotación.

### **Visualización con Cabri géomètre**

Con este software dinámico, podemos obtener la gráfica del lugar geométrico correspondiente a la suma, en función de  $BP$ , por ejemplo. La figura 7 muestra la gráfica proporcionada por Cabri cuando  $P$  se mueve sobre  $CC'$ . En ella debemos considerar que el software está dando los valores de la suma de distancias a los vértices del triángulo, para valores positivos y negativos de  $BP$ , de ahí la duplicación de imágenes en la gráfica.

### **Otra forma geométrica de obtener $P$**

Además del triángulo equilátero  $ABC'$ , construido sobre  $AB$ , podemos trazar los triángulos equiláteros  $BCA'$  sobre  $BC$  y  $CAB'$  sobre  $CA$  (figura 9) y luego dibujar los segmentos  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$ . Se puede probar fácilmente, mediante la aplicación del criterio de congruencia de triángulos  $LAL$ , que estos tres segmentos son iguales y concurren en  $P$ , aplicando la argumentación dada en la estrategia heurística de la rotación de  $60^\circ$ .

Figura 7. Lugar geométrico obtenido con Cabri cuando  $P$  se mueve sobre  $C'C$

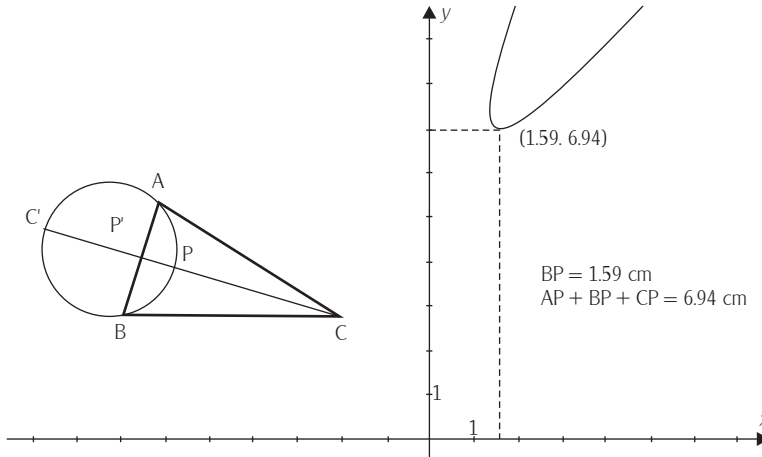
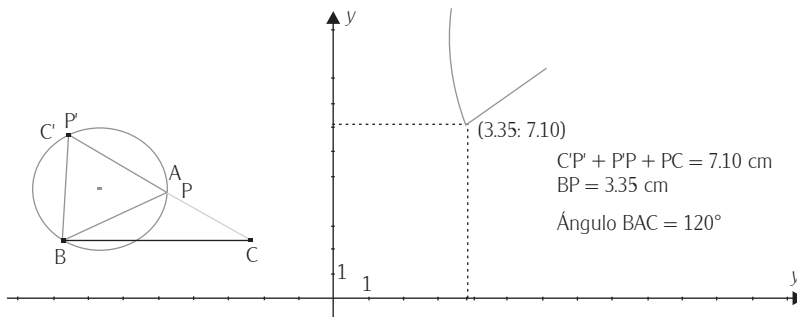
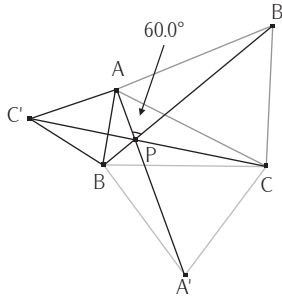


Figura 8. Lugar geométrico cuando el ángulo obtuso ( $BAC$ ) es de  $120^\circ$



Este problema ya había sido abordado por el matemático Pedoe (1957, citado por Coxeter, 1971, p. 45), quien encontró que el  $\triangle ABC$  puede no asumirse como acutángulo. La figura 8 muestra la gráfica, hecha con Cabri, de  $AP + BP + CP$  en función de  $BP$ , cuando el ángulo en  $A$  es de  $120^\circ$ . Si  $\triangle ABC$  posee un ángulo de medida mayor o igual que  $120^\circ$ , la solución es más elaborada, pero puede demostrarse que  $P$  coincide con el vértice del ángulo mayor; Cabri permite visualizar que, efectivamente, así es (figura 10). Analicemos esta situación.

Figura 9. Forma alternativa de obtener  $P$



*Proposición.* Si se tiene un triángulo con un ángulo de medida mayor o igual que  $120^\circ$ , entonces el punto  $P$ , que hace mínima la suma de distancias de  $P$  a los vértices del triángulo, coincide con el vértice del ángulo mayor.

*Demostración.* Dados el  $\triangle ABC$  con  $\angle ABC = \gamma \geq 120^\circ$  y un punto  $P$  en el plano, queremos probar que:  $AB + BC < AP + BP + CP$ .

Llamemos  $\alpha = \angle ABP$  y  $\beta = \angle CBP$ .

Tenemos tres casos: 1)  $P$  está en el interior de  $\angle ABC = \gamma$ . 2)  $P$  está en el interior del ángulo adyacente a  $\gamma$ . 3)  $P$  está en el interior del ángulo opuesto a  $\gamma$ .

*Caso 1.*  $P$  está en el interior del ángulo  $\angle ABC = \gamma$  (figura 10).

Tenemos que  $\angle ABP + \angle CBP = \alpha + \beta = \gamma$ . Se Trazan las perpendiculares desde  $P$  hasta  $AB$  y  $BC$ , siendo  $F$  y  $G$  sus intersecciones respectivas. Entonces

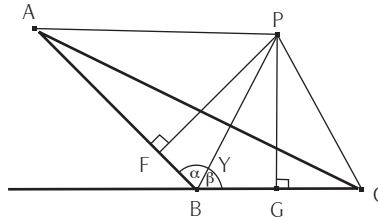
$$\left. \begin{aligned} FB = x = BP \cos \alpha \\ BG = y = BP \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{Como: } \left. \begin{aligned} AB = AF + x \\ BC = GC + y \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB + BC = AF + GC + x + y \quad (2)$$

De las relaciones (1):

$$x + y = BP \cos \alpha + BP \cos \beta (\cos \alpha + \cos \beta)$$

Figura 10.  $P$  está en el interior de  $\angle ABC = \gamma$



$$\begin{aligned}
 &= 2BP \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\
 &\leq 2BP \cos 60^\circ \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = BP \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \leq BP
 \end{aligned}$$

ya que  $120^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$ ,  $\alpha + \beta = \gamma$ ; como  $60^\circ \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \leq 90^\circ$ , entonces  $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ . Además,  $-1 \leq \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$ .

Sustituyendo en (2) la relación  $x + y < BP$ .

$$AB + BC = AF + GC + x + y \leq AF + GC + BP$$

Finalmente, como los triángulos  $AFP$  y  $CGP$  son rectángulos, los catetos  $AF$  y  $GC$  son menores que las hipotenusas  $AP$  y  $CP$ , respectivamente. De ahí se tiene que:

$$AB + BC < AP + BP + CP$$

De manera similar se procede en los casos 2 y 3.

## COMENTARIOS FINALES

Aunque estos problemas corresponden a la Geometría Moderna y suelen considerarse como de difícil acceso para los estudiantes, su solución depende de

nociones y teoremas básicos de la Geometría Euclideana, los cuales están contemplados en el currículum de los niveles medio superior y superior.

Es claro que este tipo de problemas permiten resaltar la importancia del estudio de la geometría en la formación de las personas, descrita por Thom (1973) y el uso de estrategias heurísticas de Polya (1945). Además, el software dinámico puede contribuir a que el estudiante entienda el problema, desde ver que, efectivamente, se trata de un problema de variación, hasta situarse en una posición en la que tenga acceso a la solución, fomentando así el desarrollo de la visualización (Presmeg, 2006). También permite ilustrar el desarrollo de la comprensión matemática de los estudiantes al interactuar con los problemas. Es decir, permite realizar prácticas consistentes con el quehacer matemático (Schoenfeld, 1992), lo que posibilita que los estudiantes construyan su propio conocimiento.

Así, en el primer problema, el propósito principal es que el estudiante pueda proporcionar los argumentos geométricos que permiten afirmar que el triángulo pedal es la solución. Como una extensión en el proceso de aprendizaje de la geometría, que puede quedar para el lector, es ¿qué ocurre cuando tenemos un triángulo  $ABC$  obtusángulo? En el *Problema del punto de Fermat* también pueden plantearse extensiones además de la ya planteada, cuando el triángulo dado no es agudo, ¿qué ocurre si en lugar de tener tres ciudades (un triángulo) se tienen cuatro o más ciudades?

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Coxeter, H. S. M. (1971), *Fundamentos de Geometría*, México, Limusa-Wiley.
- National Council of Mathematics Teachers (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM.
- Polya, G. (1945), *How to solve it*, Princeton, Princeton University Press.
- Presmeg, N. (2006), "Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics", en *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, Springer Verlag, pp. 205-235.
- Santos, M. (2007), *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, México, Trillas (Biblioteca de la ANPM).
- Schoenfeld, A. (1992), "Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics", en D. A. Grouwns (ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, pp. 334-370.



Secretaría de Educación Pública (2006), *Reforma de los Planes y Programas de Estudio de Educación Secundaria*, México, SEP.

Thom, R. (1973), "Matemáticas de hoy y matemáticas de siempre", en J. Hernández (ed.), *La enseñanza de la matemática moderna*, Madrid, Alianza Editorial.

## DATOS DE LOS AUTORES

### **Armando Sepúlveda López**

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,  
Morelia, Michoacán, México  
asepulve@live.com.mx

### **Lorena García García**

CECYTEM y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,  
Morelia, Michoacán, México  
brillaraelsol@yahoo.com.mx