Juan Prior Martínez, Germán Torregrosa Gironés

RAZONAMIENTO CONFIGURAL Y PROCEDIMIENTOS DE VERIFICACIÓN EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

Configural reasoning and verification procedures in geometric context

RESUMEN

El objetivo de este estudio es caracterizar los procesos involucrados en la demostración matemática, en el contexto geométrico y desde una perspectiva cognitiva. En particular, el estudio se centra en la caracterización de la interacción entre los procesos de razonamiento y los procedimientos de verificación que utilizan alumnos de secundaria en la resolución de problemas de geometría en contexto de lápiz y papel. Los resultados muestran que la utilización de los distintos procedimientos de verificación para establecer la verdad de una proposición se relaciona con los distintos desenlaces del razonamiento en los problemas que demandan una demostración.

PALABRAS CLAVE:

- *Razonamiento*
- *Demostración*
- *Resolución de problemas*

ABSTRACT

The goal of this study is to characterize the processes involved in mathematical proof, in the context of geometry, from a cognitive perspective. In particular, the focus of this study is the characterization of the interaction between reasoning processes and verification procedures that secondary students use when solving geometry problems in a pencil-and-paper environment. The results show that the different ways of using alternative verification procedures to validate a proposition are related to the different outcomes of the reasoning in problems that require a proof.

KEY WORDS:

- *Reasoning*
- *Mathematical proof*
- *Problem solving*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2013) *16* (3): 339-368.
Recepción: Marzo 28, 2012 / Aceptación: Noviembre 8, 2012. DOI: 10.12802/relime.13.1633

RESUMO

O objetivo deste estudo é caracterizar os processos envolvidos na demonstração matemática, no contexto geométrico e a partir de uma perspectiva cognitiva. Em particular, o estudo se centra na caracterização da interação entre os processos de raciocínio e os procedimentos de verificação que os alunos do Ensino Fundamental utilizam na resolução de problemas de geometria em contexto de lápis e papel. Os resultados mostram que a utilização dos diferentes procedimentos de verificação para estabelecer a verdade de uma proposição se relaciona com os diferentes desenlaces do raciocínio nos problemas que exigem uma demonstração.

PALAVRAS CHAVE:
- *Raciocínio*
- *Demonstração*
- *Resolução de problemas*

RÉSUMÉ

Le but de cette étude est de caractériser les processus impliqués dans la preuve mathématique dans le contexte géométrique et dans une perspective cognitive. En particulier, l'étude se concentre sur la caractérisation de l'interaction entre les processus de raisonnement et des procédures de vérification utilisées par les élèves du secondaire dans la résolution des problèmes de géométrie dans le contexte du stylo et du papier. Les résultats montrent que l'utilisation de procédures d'essai différentes pour valider une proposition est liée aux résultats différents des problèmes de raisonnement qui nécessitent une démonstration.

MOTS CLÉS:
- *Raisonnement*
- *Preuve mathématique*
- *Résolution de problèmes*

1. Introducción

Tras las reformas educativas de los años cincuenta y sesenta del pasado siglo, la prueba fue prácticamente relegada a la heurística (Hanna & Jahnke, 1996). Sin embargo, hoy en día las orientaciones curriculares de distintos países, entre ellos España, y las recomendaciones de organizaciones como el *National Council of Teachers of Mathematics* en Estados Unidos destacan como un objetivo fundamental de la educación matemática el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático y, más en particular, de la capacidad de efectuar demostraciones matemáticas (NCTM, 2000). Lograr este objetivo es un asunto complejo que se enfrenta con dificultades; hay investigaciones que han documentado que los alumnos no sienten la necesidad de la demostración deductiva (Hanna & Jahnke, 1996) y no distinguen entre diferentes formas de razonamiento matemático (explicación, argumentación, verificación y demostración) (Dreyfus, 1999).

Una de las agendas de investigación sobre la resolución de problemas geométricos se centra en caracterizar el desarrollo de los procesos cognitivos que ponen de manifiesto los estudiantes cuando resuelven problemas de geometría (Bishop, 1983; Fischbein, 1987; Hershkowitz, Parzysz y van Dermolen, 1996; Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996; Duval, 1998). Se han planteado una amplia variedad de modelos teóricos que han servido para avanzar en el estudio de estos procesos (Bishop, 1983, 1989; Gutiérrez, 1996; Fischbein, 1993; Presmeg, 1986). Houdement y Kuzniak (2006) identifican tres paradigmas geométricos, entendidos como formas de utilizar el conocimiento geométrico en una comunidad escolar, que coexisten en la enseñanza de la geometría. Estos paradigmas se diferencian por la definición de los objetos con que trabajan y por los procesos de razonamiento que utilizan. A partir de los procesos de visualización desarrollados en Duval (1998), Torregrosa y Quesada (2007, 2010) desarrollan un modelo que explica la coordinación de los procesos de visualización que tienen lugar cuando los alumnos resuelven problemas de geometría en un contexto de lápiz y papel. Esta coordinación de procesos de visualización desemboca a su vez en un proceso de razonamiento que denominan *razonamiento configural*. Se generan entonces cuestiones sobre las causas por las que algunos estudiantes no consiguen realizar tal coordinación. Mesquita (1989), Padilla (1990) y Duval (1998) describen en sus investigaciones factores que influyen en la manera en que es identificada la configuración relevante para la resolución de un problema geométrico. Algunos de estos factores son: convexidad de la subconfiguración relevante, complementariedad de las subconfiguraciones constituyentes y la existencia de subconfiguraciones visualmente predominantes. Otra causa tiene origen epistemológico: mientras que en otros campos como la botánica, o la historia, entre otras, la verdad de una proposición se obtiene a partir de datos procedentes de la percepción, de mediciones con algún aparato técnico o de testimonios, en matemáticas la verdad de una proposición se obtiene siempre que ésta se puede situar deductivamente en una serie de otras proposiciones, donde las proposiciones anteriores tienen valor de verdad (Duval, 2007). En palabras de Balacheff (1988), en el seno de una comunidad matemática sólo pueden aceptarse como pruebas aquellas explicaciones que toman una forma particular como secuencias de enunciados organizados según reglas determinadas, que se deducen a partir de otros que les preceden. Esta diferencia entre la práctica epistemológica común y la de la comunidad de matemáticos llevaron a Harel y Sowder (1998) a estudiar las concepciones de los alumnos en relación con la validación de proposiciones. Es muy conocida su clasificación de los "esquemas de prueba" de los estudiantes que definen como: *"A person's proof scheme consist of what constitutes ascertaining and persuading for that person",* es decir, sus métodos de verificación de afirmaciones en matemáticas (Harel, 2007; Harel y Sowder, 2007). Estos esquemas de prueba los clasifican en esquemas de convicción externa, empíricos y analíticos. A partir de este concepto definimos *procedimiento de verificación* como el esquema de prueba utilizado por el alumno para verificar, desde su punto de vista, una afirmación matemática que forma parte de su solución al problema geométrico planteado. Este concepto nos permitirá analizar la relación entre las situaciones en que desemboca el razonamiento configural, descritas en Torregrosa y Quesada (2007, 2010) y los procedimientos que utilizan los alumnos para verificar las afirmaciones que usan en sus demostraciones cuando resuelven problemas geométricos.

2. Marco conceptual

Describimos en esta sección un marco para el estudio de los procesos empleados en la resolución de problemas en los que se pide demostrar una propiedad geométrica. Detallamos también los diferentes procedimientos de verificación que utilizan los alumnos para establecer la verdad de una proposición matemática.

2.1. *Procesos de visualización*

Entendemos por visualización "la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra" (Hershkowitz, Parzysz y van Dermolen, 1996, p.163).

Por transferencia entendemos la asociación realizada por un sujeto, como respuesta a un estímulo (objeto, fenómeno, concepto,…), cuyo significado depende del sujeto. Por ejemplo, durante un paseo por la playa, la asociación del olor a mar puede variar de un sujeto a otro, según sea un marinero profesional o un simple turista. Al primero puede evocarle los días de tormenta en altamar y al segundo los plácidos momentos pasados en la orilla mientras pescaba con caña.

Sin embargo, aunque el ejemplo anterior explica con claridad el significado que damos al concepto de transferencia, nosotros estamos interesados en las transferencias realizadas por los alumnos cuando resuelven problemas de geometría. En este sentido, debemos especificar también el término configuración de puntos o simplemente configuración. Llamamos configuración de puntos a cualquier representación plana de los objetos geométricos, que consideraremos conjuntos de puntos. Teniendo en cuenta la distinción habitual entre dibujo y figura y la necesidad de no confundir ambos conceptos, usaremos también el término dibujo para referirnos a configuraciones de puntos.

Finalmente, el resultado de la transferencia realizada produce un efecto en el sujeto que la realiza. A este efecto lo llamamos aprehensión. Según el diccionario de la RAE (2001), aprehensión es la captación y aceptación subjetiva de un contenido de consciencia.

De acuerdo con las características de la acción realizada por el sujeto sobre una configuración, es decir, de los distintos tipos de transferencia realizados, se pueden distinguir tres tipos de aprehensión (Duval, 1998) que caracterizamos como sigue:

2.1.1. *Aprehensión Perceptiva*

La aprehensión perceptiva se caracteriza por la identificación simple de una configuración, es decir, que capta las formas de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar (RAE, 2001). Es la primera en ser usada a lo largo de toda la etapa educativa y también es la primera en aparecer en el desarrollo cognitivo del alumno (Duval, 1998). Por ejemplo, (Figura 1)

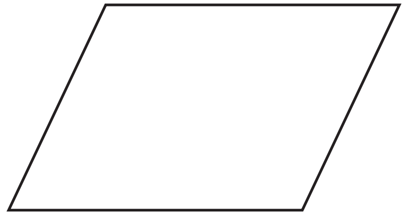


Figura 1

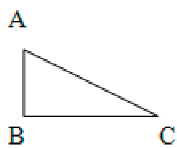
La configuración anterior puede ser vista como el tejado de una casa, como la parte superior de una mesa, como cuatro rayas dibujadas en el papel, como la representación (el dibujo) de una figura geométrica (objeto mental).

2.1.2. *Aprehensión Discursiva*

La aprehensión discursiva es la acción que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas,...). Dicha asociación puede realizarse de dos maneras según el sentido de la transferencia realizada. Los dos sentidos de la transferencia implican lo que se llama cambio de anclaje:

a) Del anclaje visual → al anclaje discursivo

Al dibujo de la Figura 2 se le pueden asociar distintas afirmaciones matemáticas:



→ "ABC es un triángulo"

"ABC es un triángulo rectángulo"

Figura 2

El observador debe haber identificado en la configuración de la figura 2 lo que caracteriza a cada una de las afirmaciones.

b) Del anclaje discursivo → al anclaje visual

Ante la afirmación "ABCD es un paralelogramo", el observador es capaz de realizar una configuración que refleja alguna de las características de los paralelogramos. Ésta no tiene por qué ser la misma para todos los observadores. De igual modo, las afirmaciones matemáticas que podemos asociar a las distintas configuraciones no han de coincidir necesariamente (como se da en el caso de la equivalencia de caracterizaciones-definiciones). Por ejemplo, (Figura 3)

Sea ABCD un paralelogramo →

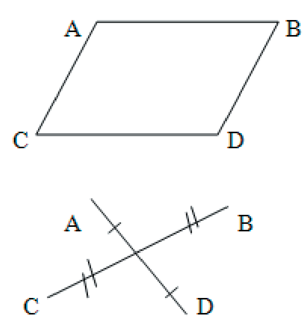


Figura 3

2.1.3. *Aprehensión Operativa*

La aprehensión operativa se produce cuando, para resolver un problema geométrico, el resolutor realiza alguna modificación física o mental de la configuración inicial. Dependiendo de la modificación producida, podemos distinguir dos tipos:

- *Aprehensión operativa de cambio figural*: cuando a la configuración inicial se le añaden (o quitan) elementos geométricos (subconfiguraciones). Por ejemplo, en el dibujo de la Figura 4,

$$\overline{AD} \equiv \overline{EB} \text{ y } \overline{AB} \equiv \overline{ED}. \text{ Probar que } \hat{B} \equiv \hat{D}.$$

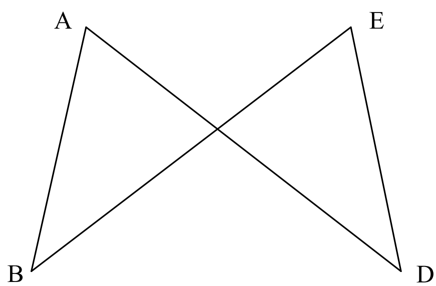


Figura 4

Una posible solución es introducir un nuevo elemento geométrico en la configuración inicial, el segmento $\overline{AE}$, (Figura 5):

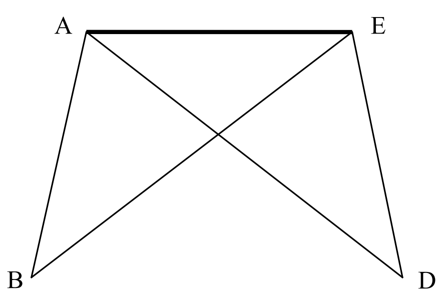


Figura 5

Al introducir el segmento $\overline{AE}$ es posible razonar utilizando el criterio de congruencia de triángulos L-L-L (sean ΔABE y ΔEDA dos triángulos que tienen los lados correspondientes congruentes, entonces ΔABE ≡ ΔEDA) y deducir de aquí la congruencia de ángulos pedida.

Al proceso de introducir un elemento, en este caso un segmento, en la configuración inicial es a lo que llamamos aprehensión operativa de cambio figural.

Igualmente, el proceso de identificar subconfiguraciones dentro de la configuración inicial, por ejemplo, el triángulo ΔABE es una aprehensión operativa de cambio figural. En este caso, lo que el observador hace es quitar mentalmente de la configuración inicial todos los elementos menos los que forman la subconfiguración identificada.

– *Aprehensión operativa de reconfiguración*: cuando las subconfiguraciones iniciales se mueven como si fueran piezas de un rompecabezas.

A continuación, en la Figura 6, mostramos una prueba del Teorema de Pitágoras realizada por Bhaskara (s.XII), donde se ponen de manifiesto la aprehensión operativa de cambio figural y la aprehensión operativa de reconfiguración. En esta prueba aparecen las siguientes configuraciones:

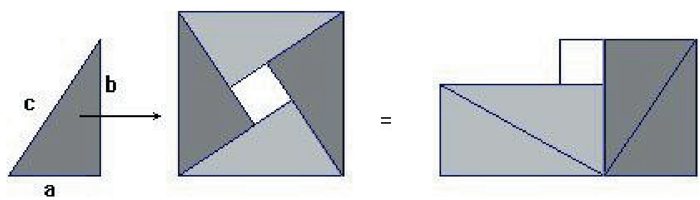


Figura 6. Bhaskara siglo XII, obtenida del libro *Proofs Without Word* (Nelson, 1993, p.4)

En primer lugar podemos observar una *aprehensión operativa de cambio figural*. En este caso el triángulo inicial se incluye en una configuración más amplia, un cuadrado de lado c. Una vez identificadas las subconfiguraciones formadas por los triángulos, sus correspondientes lados y el cuadrado situado entre ellos, a continuación modificamos la configuración moviendo las subconfiguraciones como si fueran piezas de un rompecabezas para obtener otra configuración. A este proceso lo denominamos *aprehensión operativa de reconfiguración*.

2.2. *Razonamiento configural: coordinación de la aprehensión discursiva y operativa*

Entendemos el razonamiento configural como el desarrollo de la acción coordinada (aprehensión discursiva/aprehensión operativa) realizada por el estudiante, asociando afirmaciones matemáticas y/o realizando modificaciones en la configuración inicial cuando está resolviendo un problema de geometría (Torregrosa & Quesada, 2007, 2010).

Este razonamiento configural puede desembocar en dos situaciones:

1. La coordinación da una solución al problema. En este caso podemos distinguir dos procesos:

- *Truncamiento*, que se produce cuando la coordinación proporciona la idea para resolver deductivamente el problema. En este momento el estudiante deja la manipulación de la configuración y se centra en desarrollar procesos deductivos escribiendo los distintos pasos.
- *Conjetura sin demostración*, cuando la coordinación permite resolver el problema aceptando alguna conjetura mediante percepción simple.

2. La coordinación no consigue ninguna solución. En este caso denominamos a este proceso "bucle":

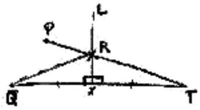
- Un *bucle* se define como el proceso configural en el que se ha llegado a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución, y por tanto, a un estancamiento del razonamiento producido.

Ejemplo de truncamiento

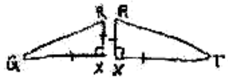
A continuación tenemos un ejemplo en el que se analiza el proceso configural seguido en la resolución del siguiente problema y que permite identificar la característica específica del truncamiento:

Problema 1.- En un plano, la recta L es mediatriz de . Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R. Probar que m$\overline{PT}$ = m$\overline{PR}$ + m$\overline{RQ}$.

---

1) 

2) La mediatriz L es perpendicular a $\overline{QT}$ (forma ángulos rectos).
3) Hay que demostrar que la distancia $\overline{RQ}$ es la misma que la de RT.
4) Determino los triángulos ΔQRX y ΔTRX y tengo:



5) Congruencia LAL.
6) Lado $\overline{RX} \equiv \overline{XR}$ (lado común).

7) Ángulo $R\hat{X}Q \equiv R\hat{X}T$ (la mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $R\hat{X}Q = 90^{\circ} = R\hat{X}T$).
8) Lado $\overline{QX} \equiv \overline{TX}$ (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio).
9) La distancia de $\overline{RQ} \equiv \overline{RT}$.

Figura 7. Fragmento de la trascripción de la solución

Observamos que en el punto 1) hay un cambio de representación del texto discursivo hacia una configuración inicial (aprehensión discursiva que muestra un cambio de anclaje de discursivo a visual). El texto en el punto 2) denota otra aprehensión discursiva (el estudiante asocia la definición de mediatriz a la configuración y añade las marcas de ángulo recto, es decir, modifica la configuración inicial). En 3) el estudiante identifica la igualdad a demostrar (aprehensión discursiva que proporciona la idea que lleva a la solución) y en el punto 4) extrae de la configuración inicial los dos triángulos ΔQRX y ΔTRX (aprehensión operativa de reconfiguración). Conjetura que puede aplicarse la congruencia lado-ángulo-lado (LAL) en 5) aparentemente una aprehensión discursiva y en 6), 7) y 8) verifica las hipótesis de esta congruencia obteniendo la tesis de la afirmación en 9), realizando un discurso teórico.

Ejemplo de conjetura sin demostración

Problema 2. - Sea el cuadrado ACDF que tiene como área 1 m^2. B y E son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{FD}$ respectivamente. Calcula el área del paralelogramo BCEF.

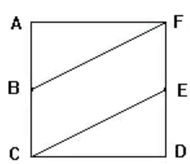


Figura 8

Solución:

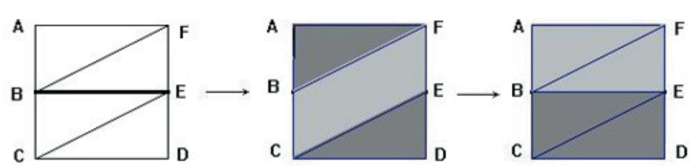


Figura 9

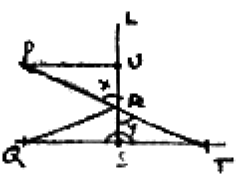
Este problema puede resolverse perceptivamente mediante una aprehensión operativa de cambio figural, es decir, añadiendo a la configuración inicial algún elemento geométrico (en este caso el segmento $\overline{BE}$ de la configuración de la izquierda) y manipulando la configuración central como piezas de un rompecabezas (aprehensión operativa de reconfiguración) para obtener una configuración (a la derecha) en donde se percibe que el área del paralelogramo es la mitad del área del cuadrado. En este caso, las distintas conjeturas (como por ejemplo considerar que los cuatros triángulos son semejantes) no son probadas, sino admitidas visualmente, es decir, admitidas mediante la percepción simple de la configuración.

Ejemplo de "bucle"

Utilizando el mismo Problema 1, mostramos en la Figura 10 la trascripción completa de la solución dada por otro estudiante.

---

1) Demostrar mPT = mPR + mPQ

2) 

3) $\overline{QS} \equiv \overline{ST}$. Ya que al estar cortada por la mediana, la corta en dos partes iguales.
4) Por lo tanto deducimos que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$.
5) Para demostrar $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$? $\Delta PRU \equiv \Delta RST$.
6) 1) $\overline{RU} \equiv \overline{RS}$
7) 2) $\overline{ST} \equiv \overline{PU}$ x lados opuestos a ángulos congruentes.
8) 3) $P\hat{X}U \equiv T\hat{Y}S$
9) LAL por lo que $\Delta PRU \equiv \Delta RST$? $\overline{\overline{PR}} \equiv \overline{RT}$
10) Por lo que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$
11) $\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RT}$

Figura 10

En el punto 1) el resolutor identifica la tesis que debe demostrarse cometiendo un error. En el punto 2) construye la representación de la situación geométrica planteada en el enunciado. En la configuración inicial introduce algunos elementos geométricos "nuevos" tales como los segmentos $\overline{QR}$ y $\overline{PU}$ además de los ángulos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ (aprehensión operativa de cambio figural). En 3) usa la definición de mediatriz (aunque el resolutor la nombra como mediana), es decir, realiza una aprehensión discursiva, para deducir impropiamente en 4) que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$. En los puntos anteriores, dejando aparte las inexactitudes o los errores existentes, observamos una coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa (lo que hemos llamado proceso configural). Además en el punto 5) se conjetura que para demostrar $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$ debe demostrar $\Delta PRU \equiv \Delta RST$ (congruencia LAL). Esta congruencia no tiene interés para la resolución del problema ya que puede ser cierta en este caso particular por la forma que ha tomado la configuración pero no en el caso general que demanda el problema. Lógicamente la verificación de hipótesis no es posible al ser una conjetura indemostrable con lo que de aquí en adelante se entra en una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y por lo tanto un estancamiento del razonamiento producido. En este caso el estudiante *maquilla* su bloqueo para dar una apariencia de solución simbólica pero sin demostrar las conjeturas realizadas ni cumplir las condiciones de lo que conocemos como razonamiento deductivo.

2.3. *Procedimientos de verificación de una proposición*

Una característica esencial de las afirmaciones que se pueden asociar a una configuración es que éstas deben ser verdaderas. Pero, ¿de cuántas formas verifican nuestros alumnos las afirmaciones que utilizan?, ¿cuáles son válidas en el contexto matemático?

De acuerdo con la introducción y a partir del trabajo de Harel y Sowder (1998), en nuestro trabajo hablamos de procedimiento de verificación para establecer la verdad de tal o cual afirmación. Esto es, el procedimiento utilizado por el alumno para establecer la verdad, desde su punto de vista, de una proposición que utiliza en su cadena de razonamientos para demostrar la propiedad geométrica solicitada. Distinguimos los siguientes tipos:

1. Procedimiento de verificación perceptivo: más allá del registro de la lengua, hay un acceso a lo representado dado por el contenido de las proposiciones. Este acceso puede ser inmediato o instrumental, es decir, directo o sometido a procedimientos experimentales.
2. Procedimiento de verificación externo: la certeza de la proposición proviene de que otros estén de acuerdo con su verdad (profesor, resto del grupo, conocimientos anteriores,…). La afirmación se tiene por cierta y no se cuestiona dicho valor.
3. Procedimiento de verificación deductivo: la proposición se puede situar deductivamente en una serie de otras proposiciones, donde las proposiciones anteriores tienen valor de verdad.

Es necesario distinguir el papel de los procedimientos de verificación en la práctica profesional de los matemáticos y sus diferencias en la práctica escolar. Enfrentado a la necesidad de demostrar una proposición, el matemático únicamente puede hacer uso de proposiciones previamente demostradas (teoremas) y de los axiomas de la teoría en que se enuncia la proposición. En las matemáticas escolares el alumno acepta la verdad de ciertas proposiciones por medio de procedimientos de verificación externos, en general la autoridad del profesor. Entendemos pues que, en el contexto de nuestro estudio, cuando un estudiante asocia una afirmación matemática a una configuración, y esta está dentro de su marco teórico de conocimientos (experiencia escolar), dicha asociación es válida aunque el estudiante no pueda probar su veracidad.

3. Objeto de la investigación

En este estudio pretendemos identificar los procedimientos de verificación que utilizan los alumnos en sus demostraciones y caracterizar la interacción de estos procedimientos de verificación con los desenlaces del razonamiento configural.

4. Método

4.1. *Participantes*

En el estudio participaron alumnos de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.). En total fueron 38 estudiantes, 20 cursando 3º de E.S.O. y 18 en 4º de E.S.O. Sus edades estaban comprendidas entre los 14 años y 10 meses y los 17 años y 6 meses, aunque la gran mayoría se encontraba entre los 15 y 16 años. Estos estudiantes no habían recibido instrucción directa acerca de la demostración matemática. En la Ley Orgánica de Educación (2006) hay múltiples referencias al razonamiento matemático, pero no se indica qué clase de pruebas (comprobaciones, justificaciones, explicaciones, demostraciones,…) se puede esperar de los alumnos en esta etapa educativa; y tampoco se dice nada de las distintas técnicas de demostración. Los estudiantes resolvieron un cuestionario que les propuso el profesor - investigador durante una sesión en la clase habitual de matemáticas.

4.2. *Instrumentos*

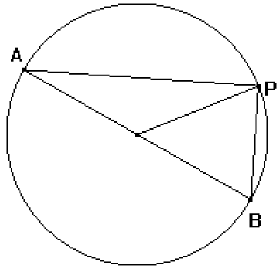
Los participantes realizaron un cuestionario con cuatro problemas. En cada uno se les pidió que probaran una propiedad geométrica diferente. Para la determinación del instrumento se tuvo en cuenta que:

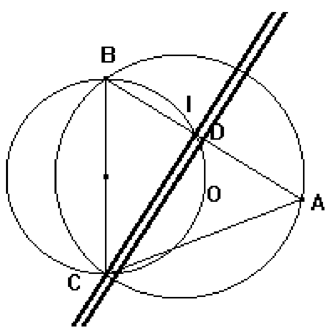
- los alumnos dispusieron de una hora para realizar el cuestionario.
- en cada uno de los problemas debían demostrar una propiedad geométrica elemental.
- en cada uno de los problemas el enunciado iba acompañado de una figura.
- los conocimientos teóricos necesarios para resolver los problemas planteados formaban parte del currículo matemático de los participantes.

Además, la elección de las tareas que componen el cuestionario se basó en la intersección de dos variables: necesidad de modificar la configuración inicial o no y que la proposición a demostrar resultase "visualmente evidente" o no. Estas dos dimensiones articularon la prueba aplicada de forma que los problemas planteados en el cuestionario se pueden clasificar con arreglo a la intersección de estas dos dimensiones en un diseño 2x2.

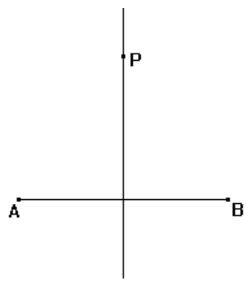
A continuación se muestran los problemas del cuestionario, un análisis de sus características y una posible solución:

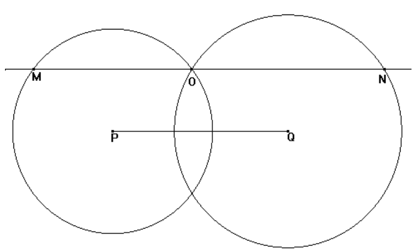
TABLA I
Problemas del cuestionario y características

Problemas del cuestionario	Características del problema
1. Demuestra que el ángulo APB es recto. 	– Propiedad geométrica: Perpendicularidad. – La tesis no resulta "visualmente" evidente. – No es necesario añadir nuevos elementos a la configuración inicial para su resolución. – Llamando al centro de la circunferencia O, una solución posible es: – Aislar las subconfiguraciones formadas por los triángulos ΔOAP y ΔOPB.

<table>
<tr><td></td><td>
– Asociar estos triángulos con la definición de triángulo isósceles, y con la propiedad que afirma que los triángulos isósceles tienen dos ángulos (los opuestos a los lados congruentes) congruentes.
– Aislar la subconfiguración formada por el triángulo ΔAPB.
– Asociar al triángulo ΔAPB la propiedad: “la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°”.
</td></tr>
<tr><td>2. Sobre una circunferencia de centro O, marca tres puntos A, B, C. La circunferencia de diámetro [BC] interseca a (AB) en I. Sea D el punto medio de [AB]. Probar que las líneas rectas (OD) y (CI) son paralelas.


(Obtenido de Duval, 2007)</td><td>
— Propiedad geométrica: Paralelismo.
— La tesis a demostrar resulta “evidente”.
— No es necesario añadir nuevos elementos a la configuración inicial.
— Una solución posible es:
– Aislar la subconfiguración formada por la circunferencia de diámetro $\overline{BC}$, el propio diámetro $\overline{BC}$ y el punto I.
– Asociar a esta subconfiguración la propiedad matemática que afirma que el triángulo ΔIBC es rectángulo en I.
– Aislar la subconfiguración formada por la circunferencia de centro O, los puntos A, B, C y D.
– Asociar a esta subconfiguración la propiedad: “las mediatrices de los lados intersecan en el circuncentro”.
– Aislar la subconfiguración formada por el segmento $\overline{AB}$ y las rectas CI y OD.
– Asociar la afirmación matemática: “dos rectas perpendiculares a la misma recta son paralelas entre sí”.
</td></tr>
</table>

3. Si P es un punto de la mediatriz del segmento AB demuestra que P equidista de los puntos A y B.

 	
	– Propiedad geométrica: Congruencia de segmentos.
	– La tesis resulta “visualmente” evidente.
	– Una solución posible es:
	  – Añadir los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$.
	  – Llamar M al punto de intersección de la mediatriz y el segmento $\overline{AB}$.
	Es necesario:
	  – Aislar las subconfiguraciones formadas por los triángulos ΔAPM y ΔBPM.
	  – Asociar el criterio de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado.

4. Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q. Por uno de los puntos de corte, O, se traza una paralela al segmento PQ, que interseca a las circunferencias en los punto M y N. Demuestra que MN=2PQ.

 	
	– Propiedad geométrica: Congruencia de segmentos.
	– La tesis no resulta “visualmente” evidente.
	– Es necesario añadir elementos a la configuración inicial.
	– Una solución posible es:
	  – Añadir los radios $\overline{PM}$ y $\overline{PO}$ en la circunferencia de centro P y los radios $\overline{QO}$ y $\overline{QN}$ en la circunferencia de centro Q.
	  – Añadir las perpendiculares al segmento $\overline{MN}$ que pasan por P y Q y los puntos de corte S y T.
	  – Aislar las subconfiguraciones formadas por los triángulos ΔMPS y ΔOPS; así como los triángulos ΔOQT y ΔNQT.
	  – Asociar el criterio de congruencia para triángulos rectángulos: “Dos triángulos rectángulos con un cateto y la hipotenusa respectivamente iguales, son congruentes”.
	  – Aislar la subconfiguración SPQT e identificarla como un paralelogramo (rectángulo).

4.3. *Procedimiento*

Tras la realización del cuestionario por parte de los alumnos se procedió al análisis de las respuestas. En primer lugar, el investigador segmentó las respuestas de los problemas con el ánimo de facilitar los análisis posteriores. A continuación, se entrevistó a los alumnos con el fin de inferir el procedimiento de verificación utilizado en cada una de las afirmaciones realizadas. Se grabó el audio de las entrevistas. Por último se analizó el razonamiento configural realizado para obtener la solución al problema. A continuación tenemos un ejemplo de análisis realizado a la respuesta del alumno número 32 a la tarea 1:

1. Demuestra que el ángulo APB es recto

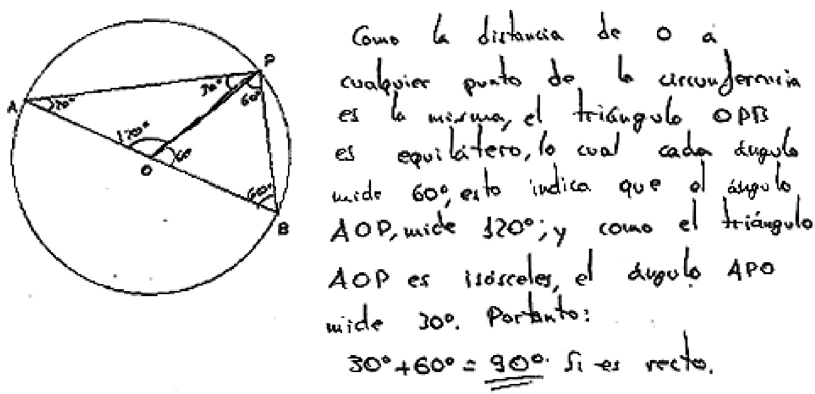


Figura 11

Segmentamos la respuesta de modo que cada elemento se corresponde con una afirmación realizada por el alumno, sea o no correcta, obteniendo la siguiente secuencia de afirmaciones:

1. La distancia de O a cualquier punto de la circunferencia es la misma.
2. El triángulo OPB es equilátero.
3. Por lo cual cada ángulo mide 60º.
4. El ángulo AOP mide 120º.
5. El triángulo AOP es isósceles.
6. El ángulo APO mide 30º.
7. 30º + 60º = 90º. Sí, es recto.

En segundo lugar inferimos, con ayuda de la entrevista, los procedimientos de verificación utilizados para establecer la verdad de las distintas afirmaciones realizadas en las respuestas a las tareas propuestas. A continuación mostramos un ejemplo de este análisis para la afirmación “El triángulo OPB es equilátero”.

Profesor: *Dices… "El triángulo ΔOPB es equilátero" ¿Por qué?*
Alumno: *que si tiene los dos lados iguales porque este (señala el lado $\overline{OP}$) es igual a este (señala el lado $\overline{OB}$)…*
Profesor: *Este ($\overline{OP}$) es igual a este ($\overline{OB}$) ¿por qué?*
A.: *Porque eh… la distancia de O a cualquier punto de la circunferencia es la misma.*
P.: *Vale, estos dos son iguales, pero… equilátero ¿qué significa?*
A.: *Que todos sus lados son iguales.*
P.: *Entonces según tú, este ($\overline{PB}$) también es igual.*
A.: *Sí*
………
P.: *¿Por qué dices que es equilátero?*
A.: *Yo pensaba que era equilátero. Como tenía estos dos iguales.*
P.: *(El profesor dibuja un triángulo isósceles no equilátero) ¿tiene este triángulo dos lados iguales?*
A.: *Sí*
P.: *¿es equilátero?*
A.: *No*
P.: *Este (señalando ΔOPB) tiene dos lados iguales y afirmas que es equilátero. ¿Por qué lo dices?*
A.: *Pues porque me pareció que era equilátero.*

Inferimos que valida esta afirmación utilizando el procedimiento de verificación perceptivo. Deduce que dos lados son congruentes, para el tercero *percibe* que es igual a los otros dos.

En último lugar mostramos el análisis del razonamiento configural realizado por el alumno en la respuesta a la tarea:

a. Aprehensión operativa: modifica la configuración inicial aislando la subconfiguración formada por la circunferencia y su centro.
b. Aprehensión discursiva: asocia la afirmación "la distancia de O a cualquier punto de la circunferencia es la misma".
c. A. O.: modifica la configuración inicial aislando el triángulo ΔOPB.
d. A. D.: asocia la afirmación (falsa) "es equilátero" al triángulo ΔOPB.
e. A. D.: asocia la afirmación al triángulo ΔOPB "los ángulos de un triángulo equilátero miden 60º".
f. A. O.: modifica la configuración inicial aislando el triángulo ΔAOP.

g. A. D.: asocia implícitamente la afirmación “la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º” y la utiliza para deducir: “el ángulo $A\hat{O}P$ mide 120º”.
h. A. D.: asocia la afirmación “es isósceles” al triángulo ΔAOP y deduce que $O\hat{P}A$ y $P\hat{A}O$ miden 30º. Las afirmaciones 5 y 8 le permiten concluir que el ángulo es recto.

Concluimos que su razonamiento configural desemboca en una conjetura sin demostración, que permite al estudiante dar una respuesta al problema aceptando una conjetura (el triángulo ΔOPB es equilátero) mediante percepción simple.

En esta respuesta el alumno valida algunas afirmaciones mediante procedimientos de verificación externos (ej. afirmación 1) y deductivos (ej. afirmaciones 4 y 6). También utiliza el procedimiento de verificación perceptivo cuando afirma en 2) que el triángulo ΔOPB es equilátero.

5. Resultados

La incorporación de los procedimientos de verificación en nuestro análisis de las producciones de los estudiantes, así como la diferencia en los participantes a los que se ha dirigido este estudio nos ha permitido identificar un nuevo tipo de coordinación de aprehensiones operativas/discursivas. Esto nos ha permitido refinar el modelo del razonamiento configural dividiendo la categoría “conjetura sin demostración” en dos subcategorías que detallamos a continuación:

- *Empírica*, que se produce cuando el estudiante usa regularidades en los datos o instrumentos de medida para establecer la verdad de la conclusión pedida en el enunciado de la tarea.
- *Conceptual,* que sucede cuando el estudiante establece la verdad, mediante un procedimiento de verificación perceptivo de alguna afirmación matemática necesaria para construir una cadena deductiva desde las hipótesis hasta la conclusión.

Como consecuencia de esta incorporación, los razonamientos configurales de los alumnos en la solución de las tareas del cuestionario se han clasificado en: truncamiento, conjetura sin demostración empírica, conjetura sin demostración conceptual, bucle y sin respuesta. En la siguiente tabla se muestran los resultados del cuestionario.

TABLA II
Respuestas al cuestionario

	Con solución			*Sin solución*	
Alumno	*C. Empírica*	*C. Conceptual*	*Truncamiento*	*Bucle*	*Blanco*
1	3			1	
2	4				
3	3	1			
4	3			1	
5	3				1
6	4				
7	3			1	
8	2			2	
9	2			2	
10	4				
11	2	1		1	
12			1	2	1
13	2	1			1
14	2	1		1	
15		1		1	2
16	1			3	
17		4			
18	4				
19	1	1		2	
20		2	1	1	
21		1		3	
22		1		3	

23	1				3
24	3				1
25	2			1	1
26		1	1	2	
27		1	1		2
28		2		1	1
29	3			1	
30			1	1	2
31		1	1	2	
32		2	1	1	
33		2		1	1
34	2			1	1
35	3			1	
36		2		2	
37	4				
38		1		2	1

El análisis de los razonamientos configurales de los alumnos en respuesta al cuestionario nos ha permitido identificar cuatro tipos de comportamientos en relación con la demostración, caracterizados por la interacción entre los procedimientos de verificación utilizados y el razonamiento configural realizado. Estos comportamientos no tienen carácter predictivo sobre el comportamiento futuro del alumno sometido a un instrumento distinto o en un ámbito diferente, ya que el objetivo de nuestro estudio es cualitativo y la intención es mostrar las conductas identificadas. A continuación se describen y se muestran ejemplos de respuestas que representan mejor las características que se pretenden mostrar:

1. *Empírico*: el razonamiento configural, cuando alcanza una solución al problema, desemboca exclusivamente en conjeturas sin demostración empíricas. Realizan mediciones para establecer la verdad de la conclusión. Los procedimientos para medir los podemos considerar procedimientos experimentales, por lo que asumimos que el procedimiento de verificación utilizado es el perceptivo.

A continuación mostramos la respuesta al problema 3 de la alumna número 10.

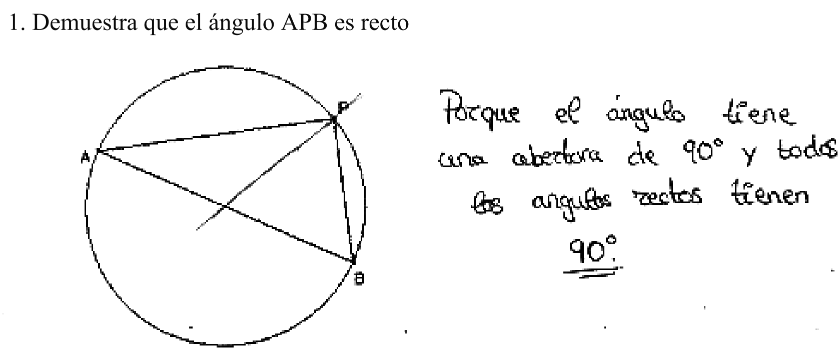


Figura 12

En esta respuesta realiza una comprobación de la tesis a demostrar para el caso particular que aparece en la figura. Ella percibe a través del uso de instrumentos de medida (transportador) que la afirmación es cierta. Utiliza el procedimiento de verificación perceptivo mediante la utilización de instrumentos de medida.

En relación con el razonamiento configural, aísla los segmentos involucrados en el enunciado y los mide, es decir, realiza modificaciones sobre la configuración inicial (aprehensión operativa) y les asocia la definición de ángulo recto (aprehensión discursiva). Su ciclo aprehensión operativa / aprehensión discursiva, es decir, su razonamiento configural se limita a aislar los elementos involucrados en la conclusión solicitada por el enunciado y a asociar la definición para una comprobación particular de la tesis pedida, desembocando en lo que hemos denominado conjetura sin demostración empírica.

2. *Empírico-analítico*: hemos observado alumnos cuyos razonamientos a las diferentes tareas pueden desembocar en cualquier tipo de desenlace. Tratan de deducir la tesis a partir de las hipótesis del enunciado en una cadena deductiva, aunque utilizando cualquier procedimiento de verificación; si no lo consiguen, dan respuestas de tipo empírico. A continuación se muestran las respuestas de la alumna número 13 a las tareas 3 y 4:

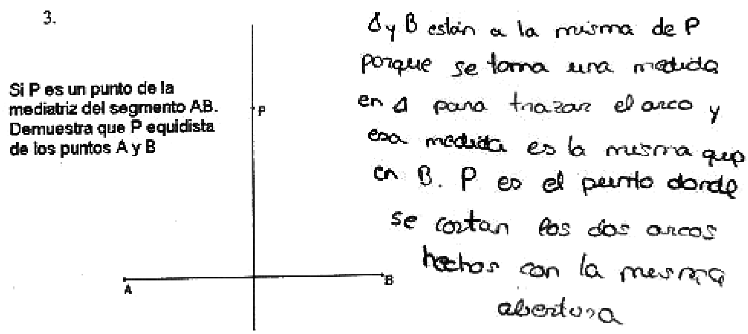


Figura 13

En esta respuesta la alumna describe un método experimental, utilizando el compás, mediante el cual comprueba la tesis solicitada por el enunciado.

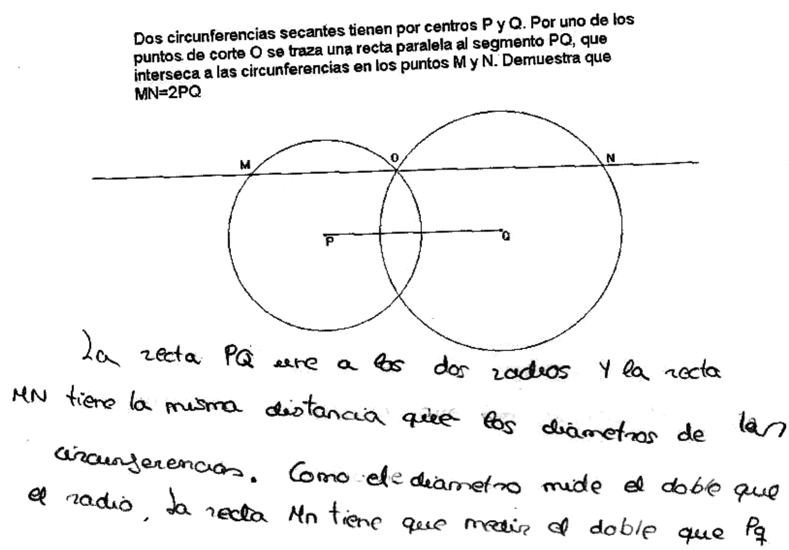


Figura 14

En este caso su razonamiento configural desemboca en una conjetura sin demostración conceptual. Utilizando el procedimiento de verificación perceptivo afirma que “PQ une a los dos radios” (en la entrevista admite que quería decir que la distancia de P a Q es igual a la suma de los dos radios) y que “MN tiene la misma distancia que los diámetros de las circunferencias”. Estas observaciones erróneas le permiten realizar una aprehensión discursiva, asociando la afirmación “el diámetro mide el doble que el radio”, que le lleva concluir la tesis pedida.

3. *Conceptual-deductivo*: caracterizado por descartar completamente la conjetura empírica como solución válida a un problema geométrico. Sus razonamientos configurales, cuando alcanzan una solución a la tarea propuesta desembocan en conjeturas conceptuales y/o truncamientos. Utilizan cualquier procedimiento de verificación, aunque el procedimiento de verificación perceptivo sólo lo utilizan de modo directo, es decir, sin métodos experimentales y, únicamente, para verificar afirmaciones intermedias en la cadena deductiva. El alumno número 32, del que mostramos la respuesta a la tarea 1 para describir el procedimiento de análisis, es un ejemplo de este tipo de comportamiento. A continuación detallamos su respuesta a la tarea 3:

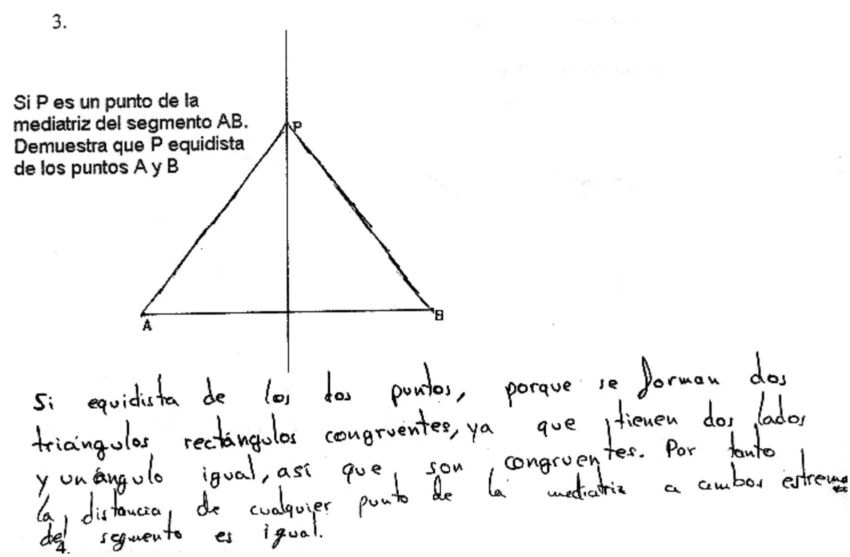


Figura 15

En este caso su razonamiento configural desemboca en un truncamiento. La aprehensión operativa realizada al añadir los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ le lleva a realizar una aprehensión discursiva asociando el criterio de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado que le permite resolver deductivamente la tarea.

4. *Deductivo*: caracterizado por descartar todo tipo de conjeturas (empíricas o conceptuales) como soluciones válidas. El razonamiento configural de un alumno que descarta el procedimiento de verificación perceptivo desemboca en un truncamiento, en cuyo caso resuelve deductivamente

el problema o en un bucle, en caso de que el razonamiento configural no consiga obtener la idea que permita solucionar deductivamente el problema. En el primer caso consiguen llegar a la solución del problema, en el segundo caso no, pero no tratan de continuar con su razonamiento utilizando el procedimiento de verificación perceptivo. Si no encuentran la subconfiguración pertinente, o bien si no conocen la afirmación matemática que les permite solucionar deductivamente el problema, no continuarán con la resolución dejando huecos en el progreso de la prueba o afirmando conjeturas sin demostración.

En la siguiente respuesta a la tarea 4, la alumna 32 descarta el procedimiento de verificación perceptivo:

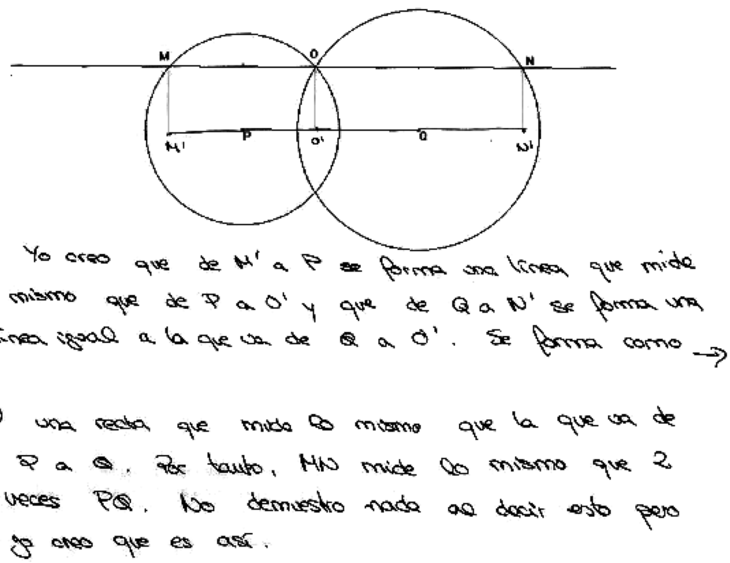


Figura 16

El razonamiento configural de esta alumna en esta respuesta desemboca en un bucle. Se realiza el siguiente ciclo aprehensión operativa/aprehensión discursiva:

1. Aprehensión operativa de cambio figural al añadir los segmentos $\overline{M'P}$ y $\overline{ON'}$ y el punto O'.
2. Aprehensión discursiva al afirmar que $\overline{M'P}$ mide lo mismo que $\overline{PO'}$ y que $\overline{QN'}$ mide lo mismo que $\overline{QO'}$.
3. Aprehensión operativa de reconfiguración cuando afirma que "se forma como una recta que mide lo mismo que de P a Q".

El comienzo de las frases “yo creo”, “se forma como una”, “no demuestro nada” o el final de su última frase “pero yo creo que es así” nos informan de que el procedimiento de verificación utilizado es el perceptivo. Sin embargo, al finalizar, después de concluir la tesis pedida afirma que “no demuestro nada al decir esto pero yo creo que es así”. Con esta afirmación muestra su conocimiento de que el procedimiento de verificación perceptivo no es válido en la demostración de propiedades matemáticas, ella misma invalida su respuesta a la tarea. No es para ella una demostración. Entendemos que su razonamiento configural desemboca en un bucle por no encontrar la subconfiguración o la afirmación matemática pertinente para poder obtener de forma deductiva la tesis del problema.

En la siguiente tabla se muestra un resumen de las respuestas al cuestionario agrupadas por tareas:

TABLA III
Frecuencias y porcentajes de los tipos de respuestas.

	Tarea 1		*Tarea 2*		*Tarea 3*		*Tarea 4*	
Razonamiento Configural	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
C. Empírica	15	39,5	17	44,7	14	36,8	15	39,5
C. Conceptual	6	15,8	5	13,2	7	18,4	8	21,1
Bucle	12	31,6	9	23,7	9	23,7	10	26,3
Truncamiento	0	0	0	0	7	18,4	0	0
En blanco	5	13,2	7	18,4	1	2,6	5	13,2

No hemos observado diferencias significativas en los resultados encontrados en las distintas tareas, puede ser debido al pequeño tamaño de la muestra o porque las respuestas de los estudiantes dependen más de los esquemas de prueba de los alumnos que de las características de las tareas. Creemos que sería necesario en futuros trabajos realizar un estudio con una muestra más amplia. Aunque la tarea 3 presenta unos resultados diferentes, nos referimos a que aparece un porcentaje de truncamientos; esto sólo se debe a una disminución del porcentaje de respuestas en blanco, y se mantienen porcentajes parecidos para el resto de las respuestas.

6. Discusión y conclusiones

Los estudios de Torregrosa y Quesada (2007, 2010) sacaron a la luz la necesidad de coordinación de las aprehensiones discursiva y operativa en la resolución de problemas de geometría, a partir del estudio de unos problemas resueltos por futuros maestros de primaria. En sus trabajos se describe la coordinación de procesos de visualización, que denominan razonamiento configural, detallando las diferentes situaciones en las que puede desembocar dicho razonamiento configural, es decir, el ciclo aprehensión operativa/aprehensión discursiva que tiene lugar cuando un alumno resuelve un problema de demostración geométrico. Nuestro trabajo nos ha permitido, por un lado, refinar el modelo que describe los distintos desenlaces del razonamiento configural, distinguiendo en el desenlace que denominamos conjetura sin demostración dos tipos de respuestas con características distintas, a la luz de los procedimientos de verificación utilizados (empíricos y conceptuales); por el otro lado, describir la relación existente entre el uso de los procedimientos de verificación y los desenlaces del razonamiento configural.

Hemos identificado una serie de conductas diferentes en relación con la verificación de una proposición matemática. Un comportamiento caracterizado por razonamientos configurales que desembocan en conjeturas sin demostración de tipo empírico, utilizando únicamente procedimientos de verificación perceptivos. Encontramos analogías entre este tipo de comportamiento y el paradigma geométrico que Houdement y Kuzniack (2006) denominan geometría natural. En este paradigma los objetos están definidos por el modelo geométrico pero en correspondencia con la realidad espacial y los medios de prueba son de tipo material.

El comportamiento deductivo, caracterizado porque se descartan los procedimientos experimentales y perceptivos en las demostraciones, y donde el razonamiento se funda sobre las leyes hipotético-deductivas del sistema axiomático puesto en juego (propiedades, definiciones, etc.), podríamos identificarlo con el paradigma geométrico que los mismos autores denominan Geometría Axiomática Natural, en la que los dibujos tan sólo son representaciones de la figura, y ésta es el objeto geométrico descrito por una propiedad y donde la verificación se funda en las leyes hipotético-deductivas del sistema axiomático.

Los otros dos comportamientos se encuentran en estadios de transición entre un paradigma y otro. En el primer caso (empírico-analítico), comienzan a tener en cuenta las leyes hipotético-deductivas y, en concreto, el papel del estatus de las proposiciones, aunque solamente en la resolución de algunos problemas ya que en otros siguen dando respuesta de tipo empírico. En el segundo caso (conceptual-deductivo), se abandonan las respuestas de tipo empírico y se tratan de solucionar los problemas siguiendo las leyes hipotético-deductivas; sin embargo, para establecer la verdad de una proposición intermedia en la cadena de proposiciones desde las hipótesis hasta la tesis final, se usan procedimientos de verificación perceptivos, no utilizando instrumentos de medida pero sí la percepción visual.

Aunque no de modo concluyente, algunas respuestas nos invitan a pensar que, entre los alumnos con un comportamiento conceptual-deductivo, hay algunos que usan los distintos procedimientos de forma equivalente, es decir, dan la misma validez a una afirmación verificada por un procedimiento perceptivo, externo o deductivo; sin embargo, en otros casos, se limitan a utilizar el procedimiento de verificación perceptivo únicamente cuando se encuentran en una situación de bloqueo y ven esta posibilidad como una vía *menos* válida para conectar con la tesis que deben demostrar. Esto podría permitirnos, en futuros estudios, refinar nuestro modelo en atención a esta característica.

Creemos que el estudio de esta situación, así como el papel del estatus que los alumnos otorgan a las afirmaciones que realizan en sus producciones escritas, abre nuevas posibilidades para estudios posteriores.

El refinamiento de nuestro modelo de razonamiento configural y el conocimiento de las causas por las se consigue o no la coordinación necesaria para resolver un problema geométrico nos ayudan a comprender las acciones que desarrolla un alumno, cómo razona y qué dificultades obstaculizan el proceso de coordinación y, por tanto, su desarrollo de la demostración matemática en contexto geométrico.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 125-203). Nueva York, USA: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in mathematics 11*(1), 7-16.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, (pp. 216-235). London, UK: Kodder & Stoughton.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove? *Educational Studies in Mathematics 38*(1/3), 85-109.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht/ Boston: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: from history and cognition to classroom practice*, (pp. 137-161). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht, Netherland: Reidel.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics 24*(2), 139-162.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In A. Gutiérrez & L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia, España. University of Valencia

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65-78). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Student's Proof Schemes: Results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Hanna, G. y Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop; M. A. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook on Mathematics Educations* (Vol. 2, pp.877-908). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Hershkowitz, R., Parzysz, B.,Van Dermolen, J. (1996). Space and Shape. In A.J. Bishop; M.A. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 161-204). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Houdement C., Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives 11*, 175-193.

Ley Orgánica de Educación. (2006). Ley Orgánica 2/2006 – Boletín Oficial del Estado. Recuperado el 12 de febrero de 2013 de http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf

Mesquita, A. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: Éléments pour une typologie.* Thèse d'université non publiée, Université Louis Pasteur. France.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Nelson, R. (1993). *Proofs without word: Exercises in visual thinking*. Wasington D.C., EE.UU.: The Mathematical Association of America.

Padilla, V. (1990). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux sur l'apprentissage des mathématiques.* Thèse d'université non publiée, Université Louis Pasteur. France.

Presmeg, N.C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics 17*(3), 297-311.

RAE - Real Academia Española, (2001). *Diccionario de la lengua española*. Vigésima segunda edición. Madrid, España: Espasa Calpe S.A.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 10*(2), 275-300.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias 28*(3), 327-340.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education 27*(4), 435-457.

Autores

Juan Prior Martínez. Universidad de Alicante, España. juan.prior@gmail.com

Germán Torregrosa Gironés. Universidad de Alicante, España. german.torregrosa@ua.es