Centros de curvatura y circunferencia osculatriz de curvas en S^2

Center of curvature and osculating disc in S^2.

Carlos Arturo Escudero Salcedo[1*], Edgar Alirio Valencia Angulo[2], Yuri Alexander Poveda Quiñones[3]

Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

carlos10@utp.edu.co
evalencia@utp.edu.co
yapoveda@utp.edu.co

***Resumen*— Un concepto importante en curvas planas es el de la curvatura y todos los conceptos relacionados con ella, como son el radio de curvatura, los centros de curvatura y la circunferencia osculatriz. Si uno quiere generalizar estos conceptos a espacios de curvatura constante de dimensión dos, se presentan algunas dificultades como, qué significa el radio de curvatura en dichos espacios, pues el radio de curvatura se define como el radio de la circunferencia osculatriz, y esta circunferencia tiene una propiedad, que es la circunferencia límite de las circunferencias que pasa por tres puntos consecutivos de una curva y tal circunferencia podría no existir, como es en el caso de los espacios de curvatura constante negativa. Para generalizar los conceptos de curvatura, radio de curvatura y circunferencia osculatriz se usará la esfera euclidiana S^2. Definiremos los centros de curvatura de una curva en S^2, analizando las singularidades de la función distancia esférica con respecto a una curva en S^2; además se estudiarán las circunferencias osculatrices de curvas en la esfera y se observará que tienen las mismas propiedades que los discos osculadores de curvas planas.**

***Palabras clave*—Contacto, centro de curvatura, distancia esférica, curvatura, curvatura geodésica, osculatriz.**

***Abstract*— An important concept in planar curves is the curvature and all related concepts, such as the radius of curvature, the centers of curvature and the osculating circle. If one wants to generalize these concepts to spaces of constant curvature of dimension two are some difficulties as which means the radius of curvature in such spaces as the radius of curvature is defined as the radius of the osculating circle, and this circle has a property limit that is the circumference of the circles passing through three consecutive points of a curve and this circumference may not exist, as in the case of constant negative curvature. To generalize the concepts of curvature, radius of curvature and osculating circle will use the Euclidean sphere S^2. Define the centers of curvature of a curve in S^2, analyzing the singularities of the spherical distance function with respect to a curve in S^2, also will study the osculating circles of curves in the field and observed that have the same properties osculating disks that planar curves.**

***Key Word* —Contact, center of curvature, spherical distance, curvature, geodesic curvature, osculating.**

I. INTRODUCCIÓN.

En la literatura existen numerosos e importantes resultados de curvas planas, mirar por ejemplo [2], y [3]. Desearíamos generalizar muchos de estos resultados en otros espacios, la pregunta natural es, cuales espacios son los adecuados para generalizar dichos resultados. Por ser el plano un espacio de curvatura constante entonces los espacios más aptos para realizar dichas generalizaciones, son los espacios de curvatura constante, como por ejemplo la esfera y el plano hiperbólico.

Un concepto importante en curvas planas es el de la curvatura y todos los conceptos relacionados con ella, como son el radio de curvatura, los centros de curvatura (la evoluta) y la circunferencia osculatriz. Si uno quiere generalizar estos conceptos a espacios de curvatura constante de dimensión dos se presentan algunas dificultades como; qué significa el radio de curvatura en dicho espacio, pues el radio curvatura se define como el radio de la circunferencia osculatriz, y este círculo tiene una propiedad que es el círculo límite de los círculos que pasan por tres puntos consecutivos de una curva, y es sabido que en el caso hiperbólico tres puntos no determinan en general un círculo (debido que no se cumple el quinto postulado de la geometría euclidiana). Este inconveniente no lo tenemos en la esfera, pues la distancia esférica está muy relacionada con la distancia euclidiana del plano.

El propósito en éste artículo es definir de una manera precisa los centros de curvatura de una curva α definida en S^2, y verificar de forma análoga, que dichos centros de curvatura tengan las mismas propiedades que tienen los centros de curvatura de curvas planas, es decir que la circunferencia osculatriz de α tenga puntos de contactos de orden tres y en los puntos donde la derivada de la curvatura sea cero, sea un vértice o punto de cúspide. Seguiremos algunas técnicas expuestas en [1].

Fecha de Recepción: 03 de Mayo de 2013
Fecha de Aceptación: 20 de Septiembre de 2013

El artículo consta de tres secciones:

En la primera sección se determinará las fórmulas de Frenet-Serret para una curva α definida en $\boldsymbol{S^2}$ y que serán herramientas fundamentales para probar resultados importantes para alcanzar nuestro propósito.
En la segunda sección se analizará las singularidades de la función distancia esférica, de manera similar como se hace en [1], para definir los centros de curvatura de una curva plana.

En la tercera sección se estudia lo concerniente a la circunferencia osculatriz de una curvas α definidas en $\boldsymbol{S^2}$, generados por los centros de curvatura y observaremos que dichas circunferencias tienen las mismas propiedades de las circunferencias osculatriz de las curvas planas, es decir, que la circunferencia osculatriz de una curva en la esfera en punto $\alpha(s_0)$, es la posición límite de las circunferencias que pasan por $\alpha(s_0)$, $\alpha(s_0+h_1)$, y $\alpha(s_0+h_2)$ cuando $h_1, h_2 \to 0$.

También en esta sección se estudian las propiedades de los puntos críticos de la curvatura.
En [7] se hace una caracterización de los centros de curvatura usando las fórmulas de Frenet-Serret y la función distancia euclidiana. Sin intención de confundir al lector a veces hablaremos del disco osculador y de la circunferencia osculatriz sin distinción.

II. CONTENIDO

1. Fórmulas de tipo Frenet-Serret para curvas en $\boldsymbol{S^2}$

En esta sección se usan algunos resultados de geometría euclidiana en el espacio.

Sea $\alpha: I \to \boldsymbol{S^2}$, $\alpha(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$, una curva regular en $\boldsymbol{S^2}$ parametrizada por la longitud de arco.

Denotemos $\alpha'(s) = t(s)$, es claro que $\langle t(s), \alpha(s)\rangle = 0$, donde $\langle , \rangle$ es el producto escalar euclidiano.

Denotemos $b(s) = \alpha(s) \wedge t(s)$, donde $\wedge$ es el producto cruz euclidiano, es claro que $\langle b(s), b(s)\rangle = 1$.

Observemos que:

$$\begin{aligned} \alpha(s) \wedge b(s) &= \alpha(s) \wedge (\alpha(s) \wedge t(s)) \\ &= -\big(\alpha(s) \wedge t(s)\big) \wedge \alpha(s) \\ &= -(\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle t(s) - \langle t(s), \alpha(s)\rangle \alpha(s)) \\ &= -t(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(s) \wedge b(s) &= t(s) \wedge (\alpha(s) \wedge t(s)) \\ &= -\big(\alpha(s) \wedge t(s)\big) \wedge t(s) \\ &= -(\langle \alpha(s), t(s)\rangle t(s) - \langle t(s), t(s)\rangle \alpha(s)) \\ &= \alpha(s). \end{aligned}$$

Por tanto tenemos una referencia ortonormal $\{\alpha(s), t(s), b(s)\}$ a lo largo de la curva α.

Teorema1.1. Sean $\alpha: I \to \boldsymbol{S^2}$ una curva regular en $\boldsymbol{S^2}$ parametrizada por la longitud de arco y $\{\alpha(s), t(s), b(s)\}$ una referencia ortonormal a lo largo de la curva α. Entonces tenemos las siguientes fórmulas de Frenet-Serret en la esfera para una curva α.

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= t(s) \\ t'(s) &= -\alpha(s) + k_g(s) b(s) \\ b'(s) &= -k_g(s) t(s), \end{aligned}$$

donde $k_g(s)$ es la curvatura geodésica de la curva α , la cual se define como $\langle \alpha(s) \wedge t(s), t'(s)\rangle$, mirar por ejemplo [2] y [6].

Demostración. Por definición tenemos que $\alpha'(s) = t(s)$. Como $\langle t(s), t(s)\rangle = 1$, tenemos que $\langle t'(s), t(s)\rangle = 0$; por lo tanto existen números reales μ y λ tal que $t'(s) = \boldsymbol{\lambda}\alpha(s) + \mu\, b(s)$.
Por otro lado, como $\langle \alpha(s), t(s)\rangle = 0$, entonces $\langle \alpha(s), t'(s)\rangle = -1$; por lo tanto $\lambda = -1$. Observemos que $\mu = k_g$, en efecto:

Por definición de curvatura geodésica, mirar por ejemplo [2], tenemos que,

$$\begin{aligned} k_g(s) &= \langle t'(s), \alpha(s) \wedge t(s)\rangle \\ &= \langle -\alpha(s) + \mu b(s), \alpha(s) \wedge t(s)\rangle \\ &= \langle -\alpha(s) + \mu b(s), b(s)\rangle = \mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $t'(s) = -\alpha(s) + k_g(s) b(s)$.
Ahora $b(s) = \alpha(s) \wedge t(s)$ entonces,

$$\begin{aligned} b'(s) = \alpha(s) \wedge t'(s) &= \alpha(s) \wedge \big(-\alpha(s) + k_g(s) b(s)\big) \\ &= -k_g(s) t(s). \end{aligned}$$

2. Singularidades de la función distancia esférica con respecto a una curva en $\boldsymbol{S^2}$.

Recordemos [4] que si x y y son dos puntos en $\boldsymbol{S^2}$ y $\theta(x, y)$ es el ángulo euclidiano entre los vectores x y y entonces definimos la distancia esférica entre x y y como el número real.

$$d_E(x, y) = \theta(x, y),$$

donde $0 \leq d_E(x, y) \leq \pi$.

Definamos la función $D: I \times \boldsymbol{S^2} \to \mathbb{R}$, como $D(s, u) = \theta(\alpha(s), u)$, donde α es una curva regular, parametrizada por la longitud de arco. Denotaremos $(D_u)(s) = \theta(\alpha(s), u)$; ahora tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1. Sea $\alpha: I \to \boldsymbol{S^2}$ una curva regular parametrizada por la longitud de arco. Entonces para todo $(s,u) \in I \times \boldsymbol{S^2}$ tenemos:

$i)$ $(D_u)'(s) = 0$ si y sólo si u es generado por los vectores α(s) y $b(s)$.

$ii)$ $(D_u)'(s) = (D_u)''(s) = 0$ si y sólo si

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}(k_g(s)\alpha(s) + b(s)).$$

$iii)$ $(D_u)'(s) = (D_u)''(s) = (D_u)^3(s) = 0$ si y sólo si

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}(k_g(s)\alpha(s) + b(s)), \quad k_g{}'(s)=0.$$

$iv)$ $(D_u)'(s) = (D_u)''(s) = (D_u)^3(s) = (D_u)^4(s)=0$ si y sólo si

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}(k_g(s)\alpha(s) + b(s)), \quad k_g{}'(s)= k_g{}''(s)=0.$$

Demostración. Por comodidad en algunas ocasiones se escribirá θ en vez de $\theta(\alpha(s),u)$.
Demostremos la parte i): Supongamos que $(D_u)'(s) = 0$. Como $\cos\big(\theta(\alpha(s),u)\big) = \langle\alpha(s),u\rangle$ entonces $-\sin(\theta)\,\theta' = \langle\alpha'(s),u\rangle$. Por tanto $\langle\alpha'(s),u\rangle = \langle t(s),u\rangle = 0$, luego el vector u es generado por los vectores $b(s)$ y $\alpha(s)$.
Supongamos ahora que el vector u es generado por los vectores $b(s)$ y $\alpha(s)$, entonces 0= $\langle\alpha'(s),u\rangle = -\sin(\theta)\,\theta'$. Por consiguiente $(D_u)'(s) = \theta'(\alpha(s),u)$ =0.
Demostremos la parte ii):
Supongamos que $(D_u)'(s) = (D_u)''(s) = 0$, entonces $-\cos(\theta)\,(\theta')^2 - \sin(\theta)\,\theta''$=$\langle\alpha''(s),u\rangle = 0$. Usando la parte i) tenemos que existen números reales μ y λ tal que $u = \boldsymbol{\lambda}\alpha(s) + \mu\, b(s)$. Por las fórmulas de Frenet-Serret se tiene que,

$$\alpha''(s) = t'(s) = -\alpha(s) + k_g(s)b(s),$$

luego,

$$\langle\alpha''(s),u\rangle = \langle -\alpha(s) + k_g b(s), \lambda\alpha(s) + \mu\, b(s)\rangle = -\lambda + \mu k_g = 0.$$

Como $\langle u,u\rangle = 1$ entonces $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}$ y por lo tanto,

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}(k_g(s)\alpha(s) + b(s)).$$

Supongamos que $u = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}(k_g(s)\alpha(s) + b(s))$, entonces

usando Frenet-Serret tenemos que:

$$\langle t'(s),u\rangle = \langle\alpha''(s),u\rangle = 0,$$

pero

$$\langle\alpha''(s),u\rangle = \cos(\theta)(\theta')^2 + \sin(\theta)\,\theta'',$$

por consiguiente $\theta' = \theta''$=0.

Demostremos ahora la parte iii): Supongamos $(D_u)'(s) = (D_u)''(s) = (D_u)^3(s) = 0$, entonces

$$\sin(\theta)\,(\theta')^3 - 3\cos(\theta)\,(\theta')(\theta'') - \sin(\theta)\,\theta^{(3)} = \langle\alpha^{(3)}(s),u\rangle=0.$$

Usando Frenet-Serret y que $k_g(s) = 0$ se tiene que

$$\langle\alpha^{(3)}(s),u\rangle = \langle -(1+(k_g)^2)t, u\rangle = 0.$$

Por tanto

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}(k_g(s)\alpha(s) + b(s)).$$

Para demostrar el reciproco de la parte iii) se argumenta de la misma manera como se hizo en la partes i) y ii).
Demostremos ahora la parte iv): Supongamos que $(D_u)'(s) = (D_u)''(s) = (D_u)^3(s) = (D_u)^4(s)$=0, por un cálculo directo de $(D_u)^4(s)$ tenemos que $\langle\alpha^{(4)}(s),u\rangle$=0. Usando las fórmula de Frenet-Serret y que $k'_g(s) = k''_g(s) = 0$ tenemos que

$$\langle\alpha^{(4)}(s),u\rangle = \left\langle -\left(1+\left(k_g\right)^2\right)\left(-\alpha + k_g b\right) - k_g t, u\right\rangle = 0.$$

Por lo tanto

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}(k_g(s)\alpha(s) + b(s)).$$

Para demostrar el reciproco de la parte iv) se argumenta de la misma manera como en i) y ii). De esta manera queda demostrado el Teorema.

Es claro que los puntos de la forma,

$$u = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}(k_g(s)\alpha(s) + b(s)),$$

se encuentran en la esfera unitaria $\boldsymbol{S^2}$, esto nos conduce a hacer la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea α una curva en $\boldsymbol{S^2}$, definimos los centros de curvatura de α como el conjunto,

$$C(\rho) = \left\{\rho \epsilon \boldsymbol{S^2}: \rho = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}\,(k_g(s)\alpha(s) + b(s))\right\}.$$

El siguiente ejemplo muestra que una circunferencia en $\boldsymbol{S^2}$ tiene como centros de curvatura un solo punto en la esfera.

Ejemplo2.1. Sea $\alpha(s)$=(sinφcos $\theta(s)$, sinφsin $\theta(s)$, cosφ), una curva en $\boldsymbol{S}^2$ parametrizada por la longitud de arco, donde φ es fijo y $\theta(s)=\frac{s}{\sin\varphi}$, esta curva representa un paralelo en la esfera.
Calculemos los centros de curvatura de la curva α.

Como $\theta'(s)=\frac{1}{\sin\varphi}$ y $\theta''(s)$=0 entonces tenemos que:

$$k_g(s)=\langle\alpha(s)\wedge t(s), t'(s)\rangle$$

$$=\langle(-\cos\varphi\cos\theta,-\cos\varphi\sin\theta, sin\varphi),(-\theta' cos\theta,-\theta' sin\theta,0)\rangle$$
$$=cot\varphi.$$

Como

$$b(s)=\alpha(s)\wedge t(s)=(-\cos\varphi\cos\theta,-\cos\varphi\sin\theta, sin\varphi),$$

y tomando los centros de curvatura con signo positivo entonces se tiene:

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}(k_g(s)\alpha(s)+b(s))$$

$$=cos\varphi\alpha(s)+sin\varphi b(s)$$

$$=(\cos\varphi\cos\theta\, sin\varphi, \cos\varphi\sin\theta\, sin\varphi, cos^2\theta)$$

$$+(-\cos\varphi\cos\theta\, sin\varphi,-\cos\varphi\sin\theta\, sin\varphi, sin^2\theta)$$

$$=(0,0,1).$$

Este resultado era de esperarse, ya que este paralelo con ángulo φ fijo representa un círculo en la esfera con radio φ y centro el polo norte (0,0,1).

Los centros de curvatura también se conocen como la **evoluta** de la curva α.

3. Circunferencia osculatriz de una curva α $\boldsymbol{S}^2$

En esta sección definiremos la circunferencia osculatriz de una curva α en la esféra y demostraremos que tiene las mismas propiedades de las circunferencias osculatrices de curvas planas.
Definamos lo que es una circunferencia en la esfera.

Definición 3.1. Para cualquier $0\leq r\leq\pi$ definimos el conjunto

$$C(u_0,r)=\{u\epsilon\boldsymbol{S}^2: d_E(u_0,u)=r\},$$

el cual llamaremos la circunferencia en la esféra con centro u_0 y radio r.
En curvas planas existe un famoso resultado local de curvas, [2] y [6], que en un caso particular dice, que toda curva plana con curvatura constante es un pedazo de circunferencia. Este mismo resultado se tiene para curvas en la esfera, con curvatura geodésica constante.

Teorema3.1. Sea $\alpha: I\to\boldsymbol{S}^2$ una curva regular parametrizada por la longitud de arco. Entonces, $k_g(s)$ es constante para todo s si y sólo si

$$u_0(s)=\pm\frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+1}}\Big(k_g(s)\alpha(s)+b(s)\Big),$$

son vectores constantes.

Demostración.

$$u'_0(s)=-\left(k_g^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}k_g'(s)k_g(s)\left(k_g(s)\alpha(s)+b(s)\right)$$

$$+\left(k_g^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}(k'_g(s)\alpha(s)+k_g(s)\alpha'(s)+b'(s))$$

$$=-\frac{k_g'(s)\left(k_g^2+1\right)}{\left(k_g^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}\alpha(s)-\frac{k_g(s)\left(k_g'(s)\right)}{\left(k_g^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}b(s)$$

$$=-\frac{k_g'(s)}{\left(k_g^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\alpha(s)-\frac{k_g(s)\left(k_g'(s)\right)}{\left(k_g^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}b(s).$$

Por lo tanto

$$u'_0(s)=0\ si\ y\ solo\ si\ k_g'(s)=0.$$

Así termina la demostración de este Teorema.

Para que el lector tenga cierta comodidad para leer y entender lo que sigue, exponemos algunos resultados de la teoría de singularidades en el plano y luego los generalizaremos de una manera natural en la esfera. El lector interesado en más detalle de esta teoría puede mirar por ejemplo [1].
Vamos a exponer la definición clásica de orden de contacto de una curva plana γ(s).

Definición3.2. Sea $F: U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, U una abierto en $\mathbb{R}^2$, una función diferenciable. Diremos que $x\in\mathbb{R}^2$ es un punto regular de F, si $\nabla F(x)\neq 0$. Un valor regular de una función F es un punto $c\in\mathbb{R}$ tal que para todo $x\in$ U con $F(x)=c$ es un punto regular.

Definición3.3. Sea $\gamma: I\to\mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por la longitud de arco y 0 un valor regular de una función F definida como antes. Diremos que γ y $F^{-1}(0)$ tiene un punto de contacto de orden k en $\gamma(s_0)$ si la función f definida por

$$f(s)=F\big(\gamma(s)\big),$$

satisface

$$f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = \cdots = f^{k-1}(s_0) = 0, \qquad f^k(s_0) \neq 0.$$

Definición3.4. Un vértice de una curva plana $\gamma(s)$, es un punto $\gamma(s_0)$, para el cual existe una circunferencia, cuyo contacto en dicho punto es de orden 4.

Observación3.1. Observemos que la circunferencia a que hace referencia la definición anterior se puede pensar como $F^{-1}(0)$, tomando

$$F\big(\gamma(s)\big) = d^2(\gamma(s), u) - r^2,$$

donde d representa la distancia euclidiana en $\mathbb{R}^2$. Este punto u es el centro de dicha circunferencia y r es el radio. Por lo tanto γ tiene un vértice en $\gamma(s_0)$ si y sólo si,

$$f^{(i)}(s_0) = 0, \ para\ i = 1,..,3, \ f^{(4)}(s_0) \neq 0.$$

La manera de generalizar las definiciones anteriores a la esfera son las siguientes:

Reemplazamos la curva plana $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ por $\alpha: I \to \boldsymbol{S^2}$, una curva en la esfera parametrizada por la longitud de arco y a la función, $F\big(\gamma(s)\big) = d^2(\gamma(s), u) - r^2$, por la función

$$F\big(\alpha(s)\big) = d_E(\alpha(s), u) = D_u(s).$$

Ahora en vez de tomar el valor regular de 0 en la función F tomamos el valor regular r, $0 \leq r \leq \pi$, para la función $F\big(\alpha(s)\big)$.

Radio de curvatura en la esfera. Los radios de curvatura se definen como la distancia entre los centros de curvatura y la curva α, es decir,

Si $u_0 = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s_0)+1}}\Big(k_g(s_0)\alpha(s_0) + b(s_0)\Big)$, es el centro de curvatura respectivo del punto $\alpha(s_0)$ entonces su radio de curvatura r_0 será:

$$r_0 = d_E(\alpha(s_0),\ u_0) = \theta(\alpha(s_0),\ u_0)$$

Por tanto

$$\cos(r_0) = \langle \alpha(s_0), u_0 \rangle = \left\langle \alpha(s_0), \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s_0)+1}}\Big(k_g(s_0)\alpha(s_0) + b(s_0)\Big) \right\rangle$$
$$= \frac{k_g(s_0)}{\sqrt{k_g^2(s_0)+1}}.$$

Luego

$$r_0 = cos^{-1}\left(\frac{k_g(s_0)}{\sqrt{k_g^2(s_0)+1}}\right).$$

Circunferencia osculatriz de una curva en $\boldsymbol{S^2}$. La circunferencia osculatriz de una curva α en la esfera en el punto $\alpha(s_0)$ es la circunferencia con centro en su respectivo centro de curvatura,

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s_0)+1}}\Big(k_g(s_0)\alpha(s_0) + b(s_0)\Big),$$

y radio

$$r_0 = cos^{-1}\left(\frac{k_g(s_0)}{\sqrt{k_g^2(s_0)+1}}\right).$$

Con los resultados anteriores podemos formular la siguiente propiedad de las circunferencias osculatrices para curvas en la esfera.

Teorema3.2. Supongamos que $\alpha: I \to \boldsymbol{S^2}$ una curva parametrizada por la longitud de arco. Para cualquier s_0, consideremos la circunferencia osculatriz $C(u_0, r_0)$. Entonces $C(u_0, r_0)$ y α tienen un punto de contacto de orden 3 en $\alpha(s_0)$.

Demostración. Consideremos la función distancia esférica d_E. Entonces la circunferencia osculatriz se puede expresar como

$$C(u_0, r_0) = {d_E}^{-1}(r_0).$$

Por el teorema 3.1 se tiene que $C(u_0, r_0)$ y α tienen un punto de contacto de orden 3 en el punto $\alpha(s_0)$.

Observación3.2. Que exista una circunferencia que tiene un punto de contacto de orden tres es equivalente a que la circunferencia osculatriz es la posición límite de las circunferencias que pasan por $\alpha(s_0)$, $\alpha(s_0 + h_1)$, y $\alpha(s_0 + h_2)$ cuando $h_1, h_2 \to 0$, mirar por ejemplo [5].

Corolario3.1. La circunferencia osculatriz $C(u_0, r_0)$ y $\alpha(s_0)$ tiene contacto de orden cuatro si y sólo si ${k'}_g(s_0)$=0.

III. CONCLUSIONES

Es sorprendente que en un espacio curvo como es la esfera se puedan generalizar conceptos geométricos no tan elementales como son la curvatura de curvas planas y por tanto todo lo referente a este concepto como es el radio de curvatura, los centros de curvatura y las circunferencias osculatrices. Observando que dichos conceptos generados por la curvatura cumplen las mismas propiedades como en el plano euclidiano. También cabe anotar que si queremos generalizar estos conceptos al plano hiperbólico tenemos la dificultad que tres puntos no determina en general una circunferencia en el hiperbólico. Queda abierto el problema de generalizar los resultados de este artículo en espacios de curvatura no constante, por ejemplo se podría intentar generalizar dichos resultados en espacios de curvatura acotada.

IV. REFERENCIAS

[1]. Bruce and Giblin, curves and singularities (second edition), Cambridge University Press,1992.

[2]. C. Escudero and A. Reventós. An Interesting Property of Evolute. Monthly.2007.

[3]. C. Escudero . A. Reventós and G. Solanes. Focal Sets in two-Dimensional. Pacific Journal of Mathematic.Vol 233. 2007.

[4]. C. Escudero, Y. Poveda y L. Preito. Caracterización de las evolutas de curvas planas. Scientia Et Technica. Vol 2. 2009.

[5]. Cordero. Fernandez, y Gray. Geometría diferencial de Curvas y Superficies Con Mathematica.Addison-Wesley Iberoamerica,1995.

[6]. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surface, Prentice Hall, 1976.

[7]. D. Struik. Classical Differential Geometry. General Publishing Company, Toronto,1961.

[8]. Izumiya , Pei, Sano, and E. Torbi, Evolutes of Hyperbolic Planes Curves, Acta Mathematica Sinica, English Series (2004).

[9]. Jhon. G. Ratcliffe, foundations of hyperbolic Manifolds, Spriger Verlag, New York,1994.

[10]. S Montiel. Y A. Ros, Curves and Surface, American Mathematical Society, Vol 69. Granada. Spain.

[11]. I Fossi. Trigonometría Rectilínea y Esférica, Ed. DOSSAT, Madrid. 1943.

[12]. W Granville, P Smith. y P Mikesh. Trigonometría Plana y Esférica, Unión Tipográfica Editorial. México.1990.

[13]. J M Nieto. Curso de Trigonometría Esférica, Servicio de Publicaciones, Universidad de Cádiz. 1996.

[14]. P Adam. Curso de Geometría Métrica. Tomo I:Fundamentos y Tomo II:Trigonometría, Métrica Proyectiva y Cónicas, 9a edición, Biblioteca Matemática, Madrid.1969.

[15]. W Woolard. y G Clemence. Spherical Astronomy, Academic Press, NewYork.1996.

[16]. P Bakulin., E Kononovich. y V Moroz. Curso de Astronomía General, T.G. Valladares, Perú.4. 1989.