

ANÁLISIS CRÍTICO DEL DISEÑO FACTORIAL 2^k SOBRE CASOS APLICADOS

Critical analysis of 2^k factorial design based on applied cases

RESUMEN

En éste artículo se exponen las definiciones de diseño experimental y específicamente del diseño factorial 2^k , su importancia, características, ventajas y desventajas; además de presentar tres casos aplicados de dicho diseño con su correspondiente análisis, explicando por qué en cada uno de estos casos fue apropiado aplicar el método factorial 2^k . Se muestran también los parámetros bajo los cuales es adecuado utilizar este método y se concluye que es uno de los métodos más convenientes de aplicar cuando se requiere analizar los efectos conjuntos de varios factores y las interacciones entre ellos.

PALABRAS CLAVES: Diseño experimental, diseño factorial 2^k , interacciones, tratamientos, variables.

ABSTRACT

This paper presents the definition of experimental design, specifically the one for 2^k factorial design, together with its importance, characteristics, advantages and disadvantages. Three applied cases of 2^k factorial design are analyzed and it is explained why for each one of them was appropriated to apply this method. It is shown what parameters must be considered to choose this experimental design and we concluded that it is one of the more convenient to apply when we need to analyze the combined effects of various factors and the interactions between them.

KEYWORDS: *Experimental design, 2^k factorial design, interactions, treatment, variables*

1. INTRODUCCIÓN

Los diseños factoriales son ampliamente utilizados en experimentos en los que intervienen varios factores para estudiar el efecto conjunto de éstos sobre una variable de interés. Existen varios casos especiales del diseño factorial general que resultan importantes porque se usan ampliamente en el trabajo de investigación, además de constituir la base para otros diseños de gran valor práctico.

Uno de los más importantes de estos casos especiales ocurre cuando se tienen k factores, cada uno con dos niveles. Estos niveles pueden ser cuantitativos como sería el caso de dos valores de temperatura, presión o tiempo pero también pueden ser cualitativos como sería el caso de dos máquinas, dos operadores, los niveles "superior" e "inferior" de un factor, o quizás, la ausencia o presencia de un factor. Una réplica completa de tal diseño requiere que se recopilen $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$ observaciones y se conoce como diseño general 2^k .

2. DISEÑO ESTADÍSTICO DE EXPERIMENTOS

Como se menciona en [1], se podría definir el diseño estadístico de experimentos también denominado diseño experimental, como una metodología basada en herramientas matemáticas y estadísticas cuyo objetivo es ayudar al experimentador a:

- Seleccionar la estrategia experimental óptima que permita obtener la información buscada con el mínimo costo.
- Evaluar los resultados experimentales obtenidos, garantizando la máxima fiabilidad en las conclusiones que se obtengan.

El diseño experimental es aplicado ampliamente al estudio de los procesos de producción. Un proceso puede considerarse como una "caja negra" a la cual ingresan diversas variables que interactúan para producir un resultado. Las variables que ingresan al proceso se denominan variables de entrada, y el resultado, variable de salida. El nivel de la variable de salida depende de los niveles que adopten las variables de entrada, y los gerentes y técnicos se benefician al saber qué combinación de variables de entrada produce el mejor nivel en la variable de salida. La búsqueda de

PEDRO DANIEL MEDINA VARELA

Profesor Asistente
Facultad de Ingeniería Industrial
Universidad Tecnológica de Pereira
pemedin@utp.edu.co

ANGELA MARIA LOPEZ REYES

Docente Universidad Antonio
Nariño – Sede Roldanillo
angela.lopez@uan.edu.co

combinaciones óptimas de las variables de entrada da lugar al diseño experimental, que es una prueba (o un conjunto de pruebas) durante la cual se realizan cambios sistemáticos y controlados a las variables de entrada para medir el efecto sobre la variable de salida. [2]

2.1 Importancia del diseño experimental

El principal propósito de la experimentación es obtener información de calidad, por lo que el papel que juega la experimentación en todos los campos de la investigación y el desarrollo es primordial. Dicha información es la que permite el desarrollo de nuevos productos y procesos, la mejora en cuanto a la comprensión de un sistema (ya sea un proceso industrial, un procedimiento analítico, entre otros) para así poder tomar las decisiones correctas acerca de cómo optimizarlo y mejorar su calidad, comprobar hipótesis científicas, etc.

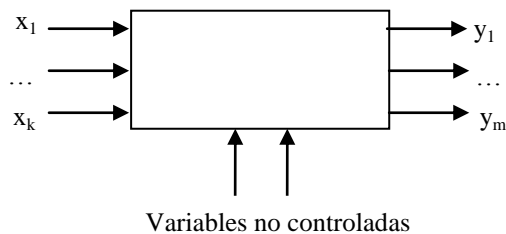


Figura 1. Representación de un sistema en estudio en diseño estadístico de experimentos: factores (x), respuestas (y). [1]

3. DISEÑO FACTORIAL [3]

Para optimizar procesos de fabricación, condiciones de reacción y métodos de análisis entre otros, es necesario conocer qué variables influyen significativamente en el sistema y como lo afectan. A menudo esta información no está disponible y se genera experimentando. Primero se recogen en una lista todas las variables que podrían influir en la respuesta¹. A continuación, se realiza una serie de experimentos en los cuales se fijan las variables que son de interés modificar, se anota el valor de las que no se pueden controlar, y se varían las restantes. Finalmente, se obtiene la información comparando la variación de la respuesta entre experimentos.

El método tradicional de variar un factor cada vez no suele ser la mejor opción. Puede implicar más experimentos de los necesarios y, a pesar de ello, proporcionar sólo información parcial [10]. Por ejemplo, no mostrará si existe interacción entre factores. Las interacciones suelen ser muy corrientes y a veces son los efectos más importantes, por lo que conocerlas es imprescindible para comprender el comportamiento de muchos sistemas.

El diseño estadístico de experimentos contempla una amplia variedad de estrategias experimentales que son adecuadas para generar la información que se busca, el **diseño factorial completo 2^k** es una de ellas. Este describe los experimentos más adecuados para conocer simultáneamente qué efecto tienen k factores sobre una respuesta y descubrir si interaccionan entre ellos.

Estos experimentos están planeados de forma que se varían simultáneamente varios factores pero se evita que se cambien siempre en la misma dirección. Al no haber factores correlacionados se evitan experimentos redundantes. Además, los experimentos se complementan de tal modo que la información buscada se obtiene combinando las respuestas de todos ellos. Esto permite obtener la información con el mínimo número de experimentos (y por tanto, con el menor coste) y con la menor incertidumbre posible (porque los errores aleatorios de las respuestas se promedian).

Un experimento factorial permite investigar todas las combinaciones posibles de los niveles de los factores o condiciones en cada prueba completa. Los tratamientos constan de todas las combinaciones que puedan formarse de los distintos factores, entendiéndose como tratamientos la denominación de los diferentes procesos cuyos efectos van a ser medidos o comparados. El objetivo es investigar los resultados experimentales en casos donde interesa estudiar el efecto de diversas condiciones de experimentación y sus interacciones. [4]

4. CASOS APLICADOS DEL DISEÑO FACTORIAL 2^k

El diseño de experimentos encuentra numerosas aplicaciones en el campo de las reacciones químicas e industrias farmacéuticas. En este artículo se hará referencia a tres casos particulares donde el diseño experimental factorial 2^k fue utilizado básicamente para conocer las interacciones entre los diferentes factores que intervinieron en cada experiencia y determinar cuál es la forma óptima de manejar dichos factores.

4.1 Primer caso

“Procesos de oxidación avanzada (AOPs) aplicados en la degradación de oxitetraciclina: un antibiótico persistente en efluentes industriales acuícolas” [5]

Un resumen de la investigación encabezada por el ingeniero M. Ollino [5] es: “En este trabajo se estudió la degradación oxidativa del antibiótico oxitetraciclina (OT) de uso común en la industria salmonera chilena, con el propósito de evaluar la potencialidad de los procesos de oxidación avanzada, AOPs, en la destrucción de agentes recalcitrantes presentes en aguas de la industria salmonífera. La característica que define a los

¹Respuesta es la variable de interés que se mide como consecuencia de la experimentación.

AOPs es la generación de especies radicales que son poderosos oxidantes en solución. La oxidación de **OT** se llevó a cabo tratándolo con ozono, una combinación ozono-UV y una combinación ozono-peróxido, en reactores fotoquímicos previamente diseñados en nuestros laboratorios.

El objetivo principal es: usando un diseño factorial, determinar las mejores condiciones experimentales para la eliminación vía oxidación del antibiótico oxitetraciclina (**OT**) usando los siguientes sistemas: (i) combinación de ozono y radiación UV y (ii) combinación de ozono con H₂O₂ a distintos valores de pH. La función objetivo para cada corrida fue el porcentaje remanente del antibiótico tras 50 minutos de tratamiento (t_{50}), es decir, una forma alternativa de evaluar la eficiencia energética de cada reacción, medido como el consumo de energía eléctrica en función del tiempo, necesario para producir el ozono consumido durante la eliminación del polutante.”

Para éste caso, el diseño factorial 2^k fue muy conveniente, debido a que éste permitió:

- Determinar las mejores condiciones experimentales para eliminar la oxitetraciclina (**OT**), oxidándola a distintos valores de pH.
- Disminuir el número de experimentos que normalmente deben realizarse, permitiendo evaluar el peso relativo de cada variable analizada (pH, concentración, sistema oxidante utilizado, presencia de aceptores de electrones, longitud de onda de irradiación, etc.) y establecer los posibles efectos sinérgicos o antagónicos entre las variables.
- Analizar la degradación oxidativa OT con un punto central, para comparar simultáneamente el efecto de las variables PH inicial y sistema oxidante utilizadas consideradas sobre éste fenómeno.

4.2 Segundo caso

“Diseño factorial 2^k aplicado a la determinación del valor de conservación de inmuebles de interés cultural”. [6]

“Este artículo presenta un caso particular del diseño de experimentos usado para determinar el valor de conservación de los inmuebles de interés cultural en el municipio de Apia (Risarcaldá - Colombia), permitiendo comprobar que las variables con mayor incidencia en la determinación del valor de conservación son: valor de construcción, área del terreno, valor del terreno y una variable generadora. El uso del diseño de experimento factorial 2^k permitió evidenciar que en la determinación

del valor de los inmuebles de interés cultural, es posible reducir el número de variables si estas aportan mayor significancia para el cálculo del valor de conservación de los inmuebles”.

El diseño factorial 2^k fue utilizado en este estudio por dos razones fundamentales:

- Se requería determinar cuál de las variables consideradas en el avalúo de los inmuebles caracterizaban mejor el valor de conservación de los inmuebles de interés cultural ubicados en el municipio de Apia, Risarcaldá.
- Era inminente determinar el valor de conservación de los inmuebles tomando un número reducido de variables, es decir las que se consideran más representativas.

4.3 Tercer caso

“Formulación de una mezcla que disminuya la tensión superficial del agua para uso en la agricultura comercial”. [7]

Éste título corresponde a un trabajo de grado realizado por la tecnóloga en química industrial Aura Arias en 2005, donde plantea que: “la necesidad de obtener un coagulante para el uso de la agricultura comercial que cumpla con la función de disminuir la tensión superficial del agua, humectar las plantas, que sea fácilmente biodegradable y compatible con la estructura de las hojas de las plantas a las cuales van a ser aplicadas, utilizando como instrumento de medida un estalagmómetro, el cual relaciona la densidad, el peso y el volumen de la gota que desciende por un capilar en función de la tensión superficial, se consiguió por medio de un diseño factorial”.

La utilización del diseño factorial en esta investigación contribuyó a la evaluación de varias moléculas surfactantes y humectantes comerciales, permitiendo determinar los rangos de concentración dentro de los cuales se obtiene la máxima caída en la tensión superficial con la mínima aplicación de agente tensoactivo. Además, el diseño factorial permitió también conocer las interacciones entre los diferentes tipos de moléculas y determinó la viabilidad de la aplicación sola o conjunta de varias de ellas.

El diseño factorial implementado hizo posible predecir matemáticamente la tensión superficial para las mezclas evaluadas, así mismo el cálculo del valor estimado y el valor observado predice con mucha exactitud la tensión superficial; lo anterior permitió a su vez evaluar dentro de los rangos de concentración de moléculas escogidos, mezclas particulares para su uso en aplicaciones especiales ó más específicas.

5. ANÁLISIS DE CASOS

Comúnmente para optimizar un protocolo que posee distintas variables se emplea un método lógico, el cual consiste en mantener constantes $k-1$ variables y cambiar paulatinamente la variable restante hasta encontrar un punto donde su composición sea la más óptima. Éste método no es recomendable para ninguno de los tres casos expuestos anteriormente, puesto que no tiene en cuenta las interacciones conjuntas de las variables, las cuales se presentan muy a menudo en experimentos que poseen pocas variables y experiencias donde unas variables dependen de otras.

Para tener en cuenta las interacciones de las diferentes variables de los tres casos ya mencionados, se hizo uso de un modelo matemático estadístico conocido como diseño factorial 2^k .

Los diseños factoriales 2^k , ó también conocidos como planes de experiencia son ampliamente utilizados en experimentos donde se requiere encontrar valores óptimos de un grupo de variables, las cuales están determinadas por un rango de valores, éstos se conocen como niveles de la variable. Estos niveles pueden ser cuantitativos (primer y tercer caso), cuando se trata de niveles numéricos ó cualitativos (segundo caso) cuando se trata la ausencia o presencia de un factor.

Para los tres casos anteriores, el diseño factorial 2^k , como su nombre lo indica, manejó dos niveles, presentando entonces un nivel superior y un nivel inferior, los cuales pueden ser denotados (como lo recomienda Montgomery [8]) como (+) y (-) respectivamente. Esto con el fin de construir la matriz de ensayos que indica los niveles en los que se deben realizar las corridas. A modo de ejemplo, para el tercer caso dicha matriz se construyó con tres variables, como se muestra en la siguiente tabla:

Nombre de la variable	Convención	Nivel inferior	Nivel superior
Molécula 1	A	-	+
Molécula 2	B	-	+
Molécula 3	C	-	+

Tabla 1: Matriz de niveles máximos (+) y mínimos (-) de las variables del diseño experimental del tercer caso. [7]

Ésta metodología tiene las ventajas de: no desperdiciar materia prima (reactivos, aditivos, entre otros), requiere poco tiempo de análisis, tiene en cuenta las interacciones bifactoriales, trifactoriales, etc, también posee la gran ventaja de que una vez realizado el plan de experiencias, se obtiene una ecuación que describe el comportamiento del sistema dentro de los rangos predichos.

En los tres casos observados, se aplican dos de las características fundamentales del diseño experimental como lo son:

- **Manipulación:** es la intervención deliberada del investigador para provocar cambios en la variable dependiente.
- **Aleatorización:** es la manera como se distribuyen los sujetos en los diferentes grupos que forman parte del estudio.

La utilización del diseño experimental factorial 2^k fue muy favorable y sobre todo adecuada para llevar a cabo las investigaciones ya mencionadas, puesto que en éstas era de vital importancia estudiar los efectos que producen una o más variables, sus consecuencias y la relación causa-efecto que se puede originar entre ellas, parámetros bajo los cuales el diseño factorial cobra su importancia, dado que son precisamente éstos los argumentos por los cuales se determina la utilización o no de dicho diseño experimental.

Otro parámetro fundamental dentro de cualquiera que sea la experimentación a realizar, es conocer el error y reducirlo todo lo posible, por ello los estudios de investigación deben ser y reunir la característica de la aleatorización, con el objetivo de distribuir de manera uniforme cualquier efecto de un factor incontrolable.

Emplear el diseño factorial 2^k en los tres casos señalados con anterioridad trajo consigo muchas ventajas como:

- Eliminó el efecto de las variables perturbadoras o extrañas mediante el efecto de aleatorización.
- Controló y manipuló los factores controlables, para poder clarificar la dirección y naturaleza de las causas estudiadas.
- Permitió la flexibilidad, eficiencia, simetría y manipulación estadística.

5.1 Calidad del diseño experimental

Con respecto a la calidad del diseño factorial 2^k , se puede decir que éste cuenta con:

- **Validez interna:** Es el grado en que los cambios observados se pueden atribuir a la manipulación experimental. Estudia hasta que punto una causa puede ser atribuida a un efecto. Sin embargo, hay que resaltar que cuantas más variables entran en un diseño se va restando validez interna. De esta forma, se puede afirmar que para los casos analizados, el diseño factorial 2^k fue utilizado apropiadamente ya que las

¹Respuesta es la variable de interés que se mide como consecuencia de la experimentación.

variables que entraban en juego no eran muy numerosas y por el contrario, se trató mediante la aplicación del mismo minimizar dichas variables.

- **Validez externa:** es el grado en que los resultados de un estudio pueden ser generalizados a muestras o condiciones espacio – temporales diferentes. Por ejemplo: “A” causa “B”, pero seguiría causando “B” con otros: sujetos, contexto (validez ecológica), momentos.
- **Validez ecológica:** Es la que se puede aplicar en distintos contextos. En los tres casos quedó evidenciado que el diseño factorial 2^k puede ser utilizado para una diversidad de aplicaciones sin que se generen alteraciones en su metodología ó en la confiabilidad y eficiencia de los resultados obtenidos: cada caso es completamente diferente a los demás y en cada uno de ellos se logró alcanzar el objetivo deseado.

Aunque ya se ha dicho desde el inicio de este artículo, es importante hacer énfasis en la característica principal del diseño factorial 2^k y que se vio ampliamente demostrada en los tres casos vistos; dicha característica es que el diseño factorial permite observar el comportamiento de una variable bajo todas las condiciones. Permite valorar el efecto de interacción (el efecto combinado de ambas variables), es decir, permite saber el efecto principal de A, el de B y el efecto combinado de ambos).

5.2 Ventajas de la experimentación factorial cuando los factores son independientes [4]

Las ventajas de la experimentación factorial descrita, dependen naturalmente de la finalidad del experimento. Supóngase por ahora que, que el propósito es investigar los efectos de cada factor, sobre algún intervalo pre asignado que está cubierto por los niveles de ese factor usados en el experimento. En otras palabras, el objeto es obtener un cuadro amplio de los efectos de los factores, más bien que encontrar, por ejemplo, la combinación de los niveles de los factores que dan una respuesta máxima (que era el objetivo principal en el primer, segundo y tercer caso). Un procedimiento para esto es conducir experimentos separados, cada uno de los cuales considerará un solo factor (pero ya se ha visto que éste método no es nada eficiente). Otro procedimiento es incluir todos los factores simultáneamente por medio de un experimento factorial.

Si todos los factores son independientes en sus efectos, el método factorial significará un ahorro considerable de tiempo y material dedicado a los experimentos. El ahorro se deriva de dos hechos: primero, cuando los factores son independientes todos los efectos simples de un factor son iguales a su efecto principal, de tal manera que los

efectos principales son las únicas cantidades necesarias para describir completamente las consecuencias de las variaciones en el factor. Segundo, en un experimento factorial cada efecto se estima con la misma precisión que si todo el experimento se hubiese dedicado a ese solo factor. Por lo tanto, si hubiese k factores únicos, todos a dos niveles y todos independientes, el método del factor único necesitaría k veces el material experimental que requeriría un arreglo factorial de la misma precisión. La ganancia obtenida de los arreglos factoriales, en este caso es bastante substancial.

Las consideraciones de tipo práctico pueden disminuir esta ganancia. El experimentador frecuentemente carece de los recursos para conducir un experimento grande con varios tratamientos y debe trabajar únicamente con uno o dos factores a la vez. Además ya se ha hecho notar con anterioridad que, conforme aumenta el número de combinaciones de tratamientos en un experimento, el error estándar por unidad también aumenta. Por lo tanto éste error es más probable que sea más alto para un experimento factorial grande, que para un experimento similar con uno o dos factores como el 2^k .

5.3 Ventajas de la experimentación factorial cuando los factores no son independientes. [4]

Se supone que el propósito es, como en la sección anterior, investigar cada factor en el intervalo representado por sus niveles. Cuando los factores no son independientes, los efectos simples de un factor varían de acuerdo con la combinación particular de los otros factores, con los cuales éstos se producen. En este caso, es probable que el método del factor único provea solamente un número de fragmentos inconexos de información, que no puedan ser ligados fácilmente. Para conducir un experimento con un factor único A , debe tomarse alguna decisión acerca de los niveles de los otros factores, por ejemplo B , C y D , que se van a usar en el experimento. El experimento revela, entonces, los efectos de A para esta combinación particular de B , C y D ; pero no da ninguna información para predecir los efectos de A con cualquier otra combinación de B , C y D . Por otro lado, con el método factorial, los efectos de A se examinan con todas las combinaciones de B , C y D , que se incluyen en el experimento. Así, se acumula una gran cantidad de información sobre los efectos de los factores y sobre sus relaciones entre sí.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los diseños factoriales completos son la estrategia experimental óptima para estudiar simultáneamente el efecto de varios factores sobre la respuesta y sus interacciones. Por su potencia y sencillez, su campo de aplicación es muy amplio:

- Identificar que variables influyen en una reacción, para luego poder optimizarlas hasta alcanzar el rendimiento deseado, o para disminuir el tiempo de reacción.
- Decidir que se debe ajustar en el nuevo proceso de fabricación para que no se produzcan tantos productos fuera de especificaciones.
- Estudiar en qué condiciones el proceso es más robusto a pequeñas variaciones de temperatura, humedad...

Cuando los factores que se va a investigar son numerosos, la principal desventaja del experimento factorial 2^k estriba en su tamaño y complejidad. Sin embargo, la magnitud de la tarea puede reducirse teniendo en cuenta únicamente una sola repetición para cada tratamiento. Hasta es posible obtener casi toda la información deseada probando solamente una fracción (por ejemplo, la mitad o un cuarto) del número total de combinaciones de tratamientos, aun cuando esto se haga con ciertos riesgos.

Las dificultades que surgen de los experimentos grandes no deben ser consideradas como una crítica del método factorial 2^k , puesto que la base de la dificultad simplemente es que se ejecuta un programa de investigación más grande. Para resumir, a continuación se dan algunos casos donde la experimentación factorial puede ser adecuada:

- En trabajos de exploración, donde el objeto es determinar rápidamente los efectos de cada uno de cierto número de factores dentro de un intervalo específico.
- En investigaciones de las interacciones entre los efectos de varios factores. Por su naturaleza las interacciones no se pueden estudiar sin probar algunas de las combinaciones que se forman de los diferentes factores. Frecuentemente la información se obtiene mejor probando todas las combinaciones.
- En experimentos diseñados para poder llegar a recomendaciones que deben aplicarse a una gran variedad de condiciones. Se pueden introducir factores auxiliares en un experimento para probar los factores principales bajo una variedad de condiciones similares a las encontradas en la población a la cual se va a aplicar dichas recomendaciones.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] J. Ferré y X. Rius, "Introducción al diseño estadístico de experimentos," *Técnicas de Laboratorio*, vol. 24, No. 274, pp. 648-653, Septiembre de 2002.
- [2] E. Yacuzzi, F. Martín, H. M. Quiñones y M. J. Popovsky, "El diseño experimental y los métodos de Taguchi: conceptos y aplicaciones en la industria farmacéutica," *Pharmaceutical Management*, pp 1-28, Febrero de 2004
- [3] J. Ferré y X. Rius, "Diseño factorial completo 2^k ," *Técnicas de Laboratorio*, vol. 25, No. 287, pp. 999-1004, Octubre de 2003.
- [4] W. G. Cochran y G. M. Cox, Diseños experimentales. México: Editorial Trillas, 1990, cap 5, pp. 177-182.
- [5] M. Ollino, C. Lizama, C. Caneo y P. Pérez. "Procesos de oxidación avanzada (AOPs) aplicados en la degradación de oxitetraciclina: un antibiótico persistente en efluentes industriales acuícolas". *Scientia et Technica*, Año XIV, No 39, Universidad Técnica Federico Santa María. Chile, Julio de 2008.
- [6] C. O. Lozada Riascos y J. A. Urrutia Mosquera. Diseño factorial 2^k aplicado a la determinación del valor de conservación de inmuebles de interés cultural. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia, Septiembre de 2008.
- [7] A. M. Arias Gonzales. Formulación de una mezcla que disminuya la tensión superficial del agua para uso en la agricultura comercial. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia, 2005.
- [8] D. Montgomery. Diseño y análisis de experimentos. Editorial Iberoamericana, Estados Unidos. 1991, pp. 589.
- [9] A. Muñoz Escalona Pavón. "Control de Calidad". Máster de Organización Industrial y Gestión de Empresas. (2008, Noviembre 24).
- [10] CRUZ, Eduardo; RESTREPO, Correa y MEDINA, Pedro. Aplicación de un Modelo Factorial de Experimentación en un Ingenio Azucarero del Valle del Cauca. *Revista Scientia et Technica*. Año XII, No 32, pp 313 – 318. Diciembre de 2006.

¹Respuesta es la variable de interés que se mide como consecuencia de la experimentación.