

SELECCIÓN DE UN MODELO AUTO-REGRESIVO OPTIMO UTILIZANDO UN DICCIONARIO DE FUNCIONES BASE

Selection of the optimal autoregressive model using a dictionary of basis functions

RESUMEN

El modelamiento de series temporales es una de las tareas más importantes en ingeniería; una vez elegida una clase de modelos, el ingeniero debe determinar unos parámetros que dependen de la clase de modelo elegido y de la señal. Cuando se eligen modelos Autorregresivos, los parámetros a determinar son el orden del modelo y las constantes asociadas. Actualmente existen varios algoritmos para determinar dichos parámetros. En el presente documento se demuestra que algunos de estos algoritmos fallan en situaciones sencillas donde algunas constantes del modelo son iguales a cero, y se presenta una nueva metodología, la cual es robusta ante esta clase de situaciones.

PALABRAS CLAVES: Análisis de series temporales, estadística paramétrica, estimación de parámetros, procesos autorregresivos.

ABSTRACT

Modeling of time series is one of the most important task in engineering; once a model class have been chosen, the engineering must determine a set of parameters, dependent of the chosen model class and of the time series. When we limit ourselves to autoregressive models, the needed parameters are the model order and the associated constants. Now days, there are several algorithms to solve these problems. In this document, we show that some of those algorithms fail to generate correct models even in simple problematic cases, when some model constants are zero, and present a new methodology that is robust to this class of situations.

KEYWORDS: *Autoregressive processes, parametric statistic, parameter estimation, time series analysis.*

1. INTRODUCCIÓN

Una de las tareas más importantes en la ingeniería es la creación de modelos matemáticos capaces de imitar hasta cierto nivel de exactitud el comportamiento de un sistema real, para de esta manera simular situaciones que en la vida real serían muy costosas, peligrosas o simplemente imprácticas [1].

Es común que a lo único que se tenga acceso de un sistema complejo sea a su señal de salida, por lo tanto los ingenieros deben utilizar esta serie temporal para encontrar un modelo capaz de imitarla. Por simplicidad, se suelen utilizar modelos lineales (si se sabe que el sistema que genera dicha señal es no lineal, usualmente se asume que las variaciones de los parámetros son pequeñas por lo tanto es válido utilizar un modelo lineal). Dentro de los modelos lineales disponibles, los modelos auto-regresivos (AR), dada su simplicidad, suelen ser la primera opción. Los modelos AR relacionan de manera lineal un valor actual de una serie temporal con los valores pasados. Además de ser utilizados para modelar el comportamiento de un sistema dinámico, son ampliamente utilizados para el cálculo de la densidad espectral de potencia (DEP) [2].

DIEGO LUIS GUARÍN LÓPEZ

Ingeniero Físico. M.Sc(C).

Profesor Auxiliar

Universidad Tecnológica de Pereira

dlguarin@gmail.com

ÁLVARO ANGEL OROZCO G.

Ingeniero Electricista, Ph.D.

Profesor titular

Director grupo de investigación en Control e Instrumentación

Universidad Tecnológica de Pereira

CESAR

GERMAN

CASTELLANOS DOMINGUEZ.

Ingeniero Electricista, Ph.D

Profesor titular

Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales

Existen métodos clásicos para el cómputo de modelos AR a partir de una serie temporal, estos involucran el cálculo del orden del modelo y los parámetros asociados al modelo, pero como se mostrara a continuación, este algoritmo falla en situaciones sencillas, por ejemplo, cuando algunas de las constantes del modelo son iguales a cero [3]. Por lo tanto es necesario introducir alternativas diferentes que sean robustas ante esta clase de situaciones.

El presente documento está organizado de la siguiente manera, primero se introduce brevemente los modelos AR y se presenta el algoritmo clásico para el cálculo del orden del modelo y las constantes asociadas, se plantea el problema descrito en el párrafo anterior. Posteriormente se propone un nuevo algoritmo por medio del cual se superan los problemas planteados. Finalmente se demuestra por medio de señales simuladas que el algoritmo propuesto es superior al método clásico y se aplica dicho algoritmo para el cálculo de la DEP de una señal de vibración de una máquina rotativa. Finalmente se concluye.

2. ANTECEDENTES TEORÍCOS

Un modelo AR se puede describir de la siguiente manera:

$$x(n) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + \varepsilon. \quad (1)$$

Donde $a_i, x(n) \in \mathfrak{R}$ y ε es ruido independiente e idénticamente distribuido (llamado error de predicción).

Una vez definido el modelo a utilizar, la tarea del ingeniero es determinar el valor del parámetro p (el orden del modelo) y las constantes asociadas a_i . El algoritmo clásico consisten en inicializar $p = 1$, calcular los parámetros a_i (utilizando mínimos cuadrados o alguna de sus múltiples derivaciones), y calcular la diferencia entre el modelo y la serie real. Con estos valores se puede computar algún criterio de información (e.g. criterio de información de Akaike [1], criterio de información de Schwarz [2], criterio de mínima longitud de descripción [3,4,5,6]); se aumenta p y se realiza el mismo procedimiento. Se continúa aumentando p hasta que se encuentre un mínimo en el criterio de información, este será el orden óptimo del modelo.

Existen una gran cantidad de modificaciones a este algoritmo, en su gran mayoría, se busca hacer que el método sea más robusto ante la presencia de ruido; para más información al respecto se puede referir a [7] y las referencias allí contenidas.

2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A continuación se presenta un modelo auto-regresivo de orden 3 (AR(3)):

$$x(n) = 0.1x(n-1) + 0.2x(n-2) - 0.3x(n-3) + \varepsilon. \quad (2)$$

A partir de (2), se obtiene una serie temporal de 1024 datos, se toma esta como la salida de un sistema real, es decir, se desea construir un modelo matemático a partir de la serie temporal.

La Fig. 1 muestra el comportamiento de la mínima longitud de descripción (MLD) con respecto al orden del modelo, se observa que tiene un valor mínimo cuando $p = 3$, lo cual es el resultado esperado ya que el modelo es de orden 3.

Utilizando mínimos cuadrados, se obtiene el modelo autorregresivo presentado en (3), se observa entonces que utilizando en sencillo algoritmo anteriormente descrito es posible obtener un modelo cercano a la realidad.

$$x(n) = 0.08x(n-1) + 0.19x(n-2) - 0.29x(n-3) + \varepsilon. \quad (3)$$

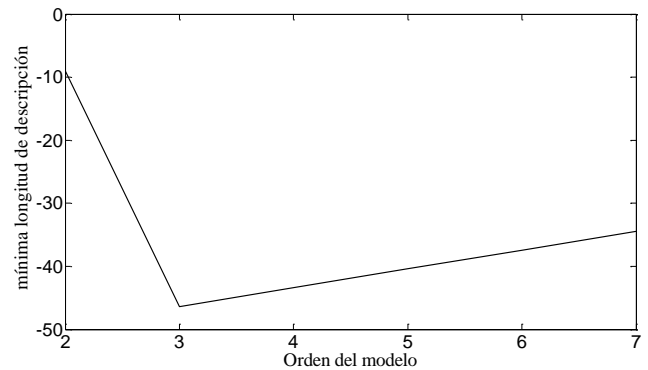


Fig. 1 Selección del orden del modelo AR dado en (2)

Suponga ahora que se tiene una serie temporal generada por siguiente modelo AR(5)

$$x(n) = 0.1x(n-1) + 0x(n-2) + 0.3x(n-3) + 0x(n-4) - 0.5x(n-5) + \varepsilon. \quad (4)$$

Donde hay dos constantes iguales a cero.

La Fig. 2 muestra el comportamiento de la MLD con respecto al orden del modelo, se observa que tiene un valor mínimo cuando $p = 5$. Utilizando el sencillo algoritmo clásico anteriormente descrito se encuentra que el mejor modelo para la señal está dado por:

$$x(n) = 0.12x(n-1) + 0.02x(n-2) + 0.31x(n-3) + 0.08x(n-4) - 0.51x(n-5). \quad (5)$$

Se puede notar que los parámetros que acompañan a $x(n-2)$ y $x(n-5)$ son casi despreciables, sin embargo sin no se tuviese un conocimiento previo de la del modelo AR, es imposible saber que estos pueden ser descartados.

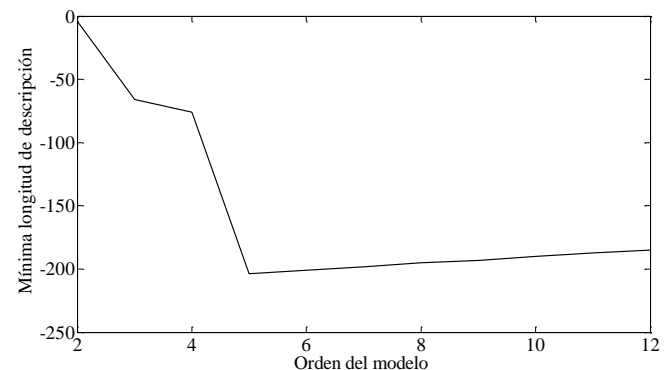


Fig. 2 Selección del orden del modelo AR dado en (4)

Es por lo tanto necesario introducir una metodología para la identificación de sistemas que permita superar las dificultades anteriormente expuestas.

3. MÉTODO

A continuación se presentara un algoritmo capaz de superar las limitantes encontradas con el método básico; dicho algoritmo, fue introducido originalmente por Kevin Judd y Alistar I. Mess [3] para encontrar el mejor modelo pseudo-lineal (i.e. una combinación lineal de funciones base no lineales) para una serie temporal. Sin embargo, en el presente documento se utilizara para encontrar el mejor modelo AR para una serie temporal.

El algoritmo, al igual que en el caso anterior, depende de la selección a priori de un orden máximo del modelo p , una vez seleccionado dicho orden, se debe crear una matriz de funciones base, que en este caso son los vectores retardados. Suponga por ejemplo que se tiene una serie temporal cualquiera dada por:

$$\vec{x} = \{x(1), x(2), x(3), \dots, x(n)\}. \quad (6)$$

Se desea crear un modelo AR a partir de dicha serie; para esto se elige un orden máximo $p = 7$. Con esta información es posible expresar el modelo AR(7) de manera matricial:

$$\begin{bmatrix} x(8) \\ x(9) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x(7) & x(6) & \dots & x(1) \\ 1 & x(8) & x(7) & \dots & x(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x(n-1) & x(n-2) & \dots & x(n-7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{bmatrix} + \varepsilon. \quad (7)$$

Donde los parámetros $a_0 \dots a_7$ son desconocidos.

La matriz:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x(7) & x(6) & \dots & x(1) \\ 1 & x(8) & x(7) & \dots & x(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x(n-1) & x(n-2) & \dots & x(n-7) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Es entonces la matriz de funciones base.

3.1 SELECCIÓN DE UN MODELO AR ÓPTIMO

Para encontrar el mejor modelo AR a partir de una serie temporal \vec{x} y una matriz de funciones base V , se debe

seguir el siguiente algoritmo, originalmente introducido en [3]:

Sea V_b la matriz formada por la columnas de V con índices en \vec{b} , sea $\vec{\lambda}_b$ la solución de mínimos cuadrados a $\vec{x} = V_b \lambda$ y sea $\vec{\varepsilon}_B = \vec{x} - V_b \lambda_b$.

1. Sea S_0 la MLD de la señal original.
2. Sea $\vec{b} = \{j\}$ donde V_j es la columna de V tal que $V_j^T \vec{x}$ es máximo (En este caso $\vec{\lambda}_b = V_j^T \vec{x} / V_j^T V_j$)
3. Sea $\vec{\mu} = V^T \vec{\varepsilon}_b$ e i el índice del componente de $\vec{\mu}$ con el mayor valor absoluto (el índice i es el índice que entra al conjunto de bases). Sea $\vec{b}' = \vec{b} \cup \{i\}$.
4. Calcular $\vec{\lambda}_{b'}$. Sea h el índice en \vec{b}' correspondiente al componente de $\vec{\lambda}_{b'}$, con el menor valor absoluto (El índice h es el índice que sale del conjunto de bases).
5. Si $i \neq h$, entonces sea $\vec{b} = \vec{b}' \setminus \{h\}$ (i.e. \vec{b}' sin el elemento h) y volver al paso 3.
6. Sea $\vec{b}_k = \vec{b}$, donde k es el número de elementos en \vec{b} . Calcular S_k (la MLD del modelo AR utilizando las funciones bases dadas en \vec{b})
7. Si $S_k < S_{k-1}$, ir al paso 3.
8. Tomar las bases \vec{b}_k tales que S_k es el mínimo como el modelo AR óptimo.

Es necesario clarificar un par de situaciones: El hecho que $S_k > S_{k-1}$ no implica necesariamente que \vec{b}_{k-1} sea el modelo óptimo, dado que siempre existe la posibilidad de hallarse en un mínimo local. Es recomendable una vez encontrado un mínimo dejar correr el algoritmo unos 5 ciclos más para asegurarse que el mínimo es global. En este caso dado que se desea calcular un modelo lineal, es posible utilizar una versión lineal de la MLD (o el criterio de información de Schwarz), pero como se puede notar, es facil extender el algoritmo para encontrar modelos auto-regresivos no lineales (NLAR), en este caso es necesario utilizar una versión no lineal de la MLD [3].

4. RESULTADOS

Para los resultados mostrados a continuación, se utilizó el algoritmo descrito en la sección 3.1 y la MLD no lineal propuesto en [3].

4.1 SIMULACIONES

Se aplica el algoritmo a una serie de tiempo obtenida a partir de (2), en este caso el número de datos es 1024 y se eligió un orden máximo $p = 7$.

La Fig. 3 muestra el comportamiento de la MDL con respecto al orden del modelo, el cual tiene un valor mínimo cuando $p = 3$, lo cual es el resultado esperado ($p = 0$ es el MLD para la serie original) Como se observa, la Fig. 1 es muy diferente a la Fig. 3, esto se debe a que el primer caso se está utilizando la versión lineal de la MDL, mientras que el segundo, la versión no lineal. Sin embargo, se observa que ambas curvas tienen un mínimo cuando $p = 3$.

La Tabla 1 muestra un poco más de información con relación a los resultados del algoritmo, para cada valor de p se muestran los índices de la matriz V que se seleccionaron como el mejor modelo (a la columna de unos mostrada en (8) le corresponde el índice 0). Este algoritmo, a diferencia del algoritmo clásico, trata de manera independiente cada una de las columnas de la matriz (8), y en cada ciclo, selecciona las que mejor modelan la serie temporal. Se observa que para $p = 3$ el algoritmo seleccionó los índices 1, 2 y 3, los cuales de acuerdo a (2) son correctos. Este resultado indica que el algoritmo propuesto es por lo menos tan bueno como el algoritmo clásico.

A continuación, se aplica el algoritmo a la serie temporal obtenida a partir de (4), de nuevo el número de datos es 1024 y se elige $p = 7$.

La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** muestra que en este caso, al igual que en el caso anterior, el mínimo está dado en $p = 3$, por lo tanto el modelo AR óptimo, únicamente tendrá tres constantes diferentes de cero.

Se observa en la

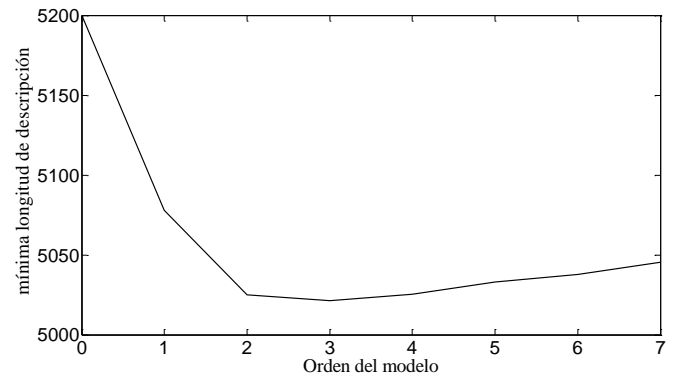


Fig. 4 Selección del orden del modelo AR dado en (4) usando el algoritmo propuesto

Por lo tanto, utilizando la metodología propuesta, se obtiene un modelo más cercano a la realidad, lo cual a fin de cuentas es lo que se busca siempre que se crea un modelo de una serie temporal.

Tabla 2. Índices de las columnas de la matriz V creada utilizando la serie temporal dada en (4) seleccionados en cada paso del algoritmo.

	p						
	1	2	3	4	5	6	7
Bases seleccionadas	5	3	1	1	1	1	0
		5	3	3	3	3	1
			5	5	4	4	3
				6	5	5	4
					6	6	5
						7	6
							7

4.2 CALCULO DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Es bien sabido que uno de los usos más usuales de los modelos AR es en el cálculo de la DEP [2, 7], el método comúnmente conocido como cálculo paramétrico de la DEP, consiste en calcular el mejor modelo AR a partir de una serie temporal, y posteriormente estudiar la respuesta en frecuencia de dicho modelo, este método es una alternativa a la transformada discreta de Fourier (cálculo no paramétrico de la DEP). Por medio del cálculo paramétrico de la DEP, es posible obtener una representación más suave de la energía en el espectro de las frecuencias, donde es más fácil identificar las frecuencias principales y secundarias.

En el panel superior de la Fig. 5 se muestra el cálculo de la DEP utilizando el método no paramétrico

(transformada discreta de Fourier), para la señal generada con (4). En el panel inferior de la Fig. 5 se muestra el

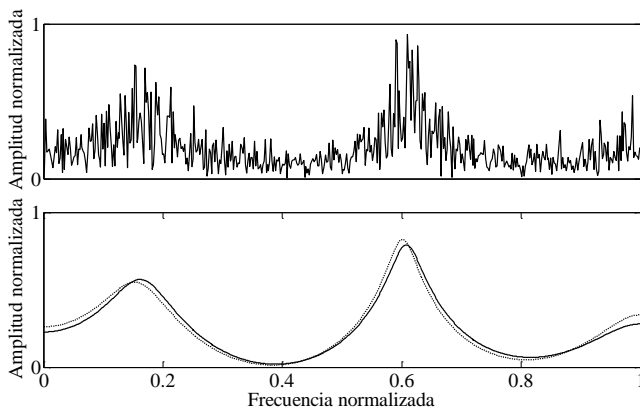


Fig. 5 Cálculo de la DEP, panel superior método no paramétrico, panel inferior método paramétrico.

calculo de la DEP con el método no paramétrico, la línea continua es el resultado obtenido con el modelo AR calculado con el método propuesto (9), la línea punteada es la DEP calculada con el modelo AR obtenido con el método tradicional (5). Es destacable que aún en este caso simple, existen algunas diferencias entre ambos espectros, sobre todo en baja frecuencia, por lo tanto, en un caso real donde se pueden obtener modelos de mayor tamaño, se espera que este error aumente.

4.3 SEÑALES DE VIBRACIÓN DE MAQUINAS ROTATIVAS

A continuación se utiliza el algoritmo propuesto para encontrar el modelo AR óptimo para una señal de vibración de una máquina rotativa sin carga. Dicha señal fue obtenida del Bearing data center, Case Western Reserve University. Las señales fueron generadas por máquinas rotativas sin ningún tipo de falla con una velocidad de 1970 rpm; la tasa de muestreo es 48000 muestras/segundo y la señal tiene 2048 muestras

La Fig. 6 muestra la serie temporal que se desea modelar utilizando un modelo AR.

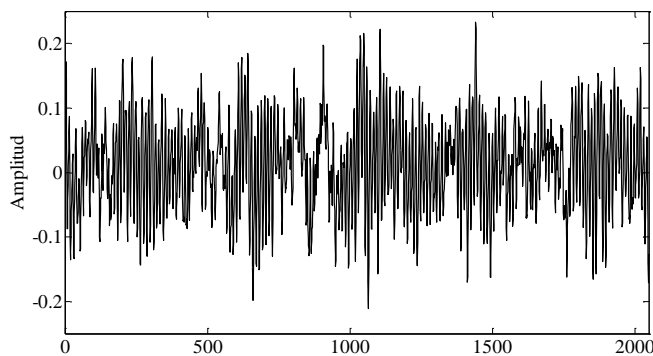


Fig. 6 Señal de vibración de una máquina rotativa sin falla

Dado que no se tiene conocimiento previo del orden del modelo, se inicia con un valor de p moderado (e.g. $p = 10$) y se sigue aumentando el valor de p hasta que no haya cambios en el modelo.

Usando la metodología propuesta se obtuvo un modelo de orden 68 con solo 33 parámetros diferentes de cero. Dicho modelo es demasiado grande; esto es un posible indicador que un modelo AR no es capaz de modelar el complejo comportamiento de la señal original. Es importante mencionar que utilizando el método clásico, se obtiene un modelo con más de 40 parámetros diferentes de cero, por lo tanto utilizando la metodología propuesta es posible obtener modelos más simples.

En la Fig. 7 se presenta la DEP de la señal de vibración mostrada en la Fig. 6, la línea continua es la DEP calculada a partir del modelo AR obtenido con el algoritmo propuesto mientras que la línea punteada es la DEP calculada con el modelo AR obtenido con el algoritmo clásico. A pesar que las tres frecuencias principales están bien identificadas en ambas graficas, se puede observar que las frecuencias que tienen menor intensidad están mejor representadas en la línea continua, por lo tanto se hace más fácil la identificación de las diversas frecuencias y armónicos presentes en la DEP. que para $p = 3$ (el modelo óptimo), las bases seleccionadas son los índices 1,3 y 5, lo cual concuerda con (4). Utilizando las bases seleccionadas, se obtiene el siguiente modelo a partir de la serie temporal:

$$x(n) = 0.12x(n-1) + 0.31x(n-3) - 0.48x(n-5) + \varepsilon. \tag{9}$$

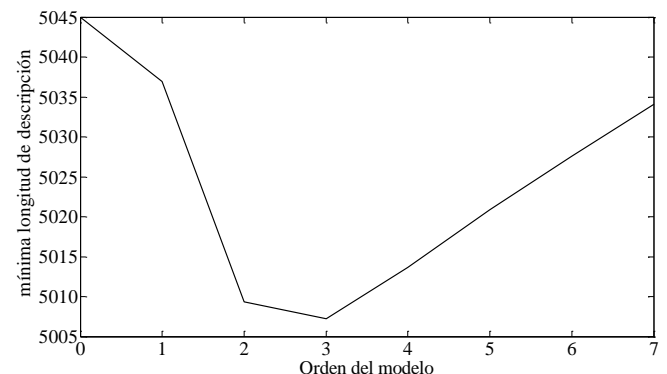


Fig. 3 Selección del orden del modelo AR dado en (2) usando el algoritmo propuesto

Tabla 1. Índices de las columnas de la matriz V creada utilizando la serie temporal dada en (2) seleccionados en cada paso del algoritmo.

	p						
	1	2	3	4	5	6	7

Bases seleccionadas	3	2	1	1	0	0	0
		3	2	2	1	1	1
			3	3	2	2	2
				6	3	3	3
					6	6	4
						7	6
							7

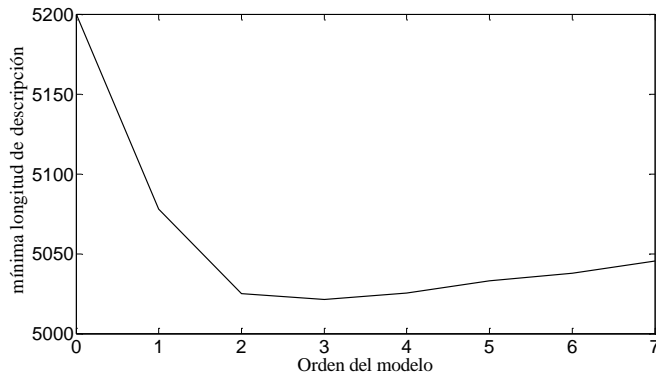


Fig. 4 Selección del orden del modelo AR dado en (4) usando el algoritmo propuesto

Por lo tanto, utilizando la metodología propuesta, se obtiene un modelo más cercano a la realidad, lo cual a fin de cuentas es lo que se busca siempre que se crea un modelo de una serie temporal.

Tabla 2. Índices de las columnas de la matriz V creada utilizando la serie temporal dada en (4) seleccionados en cada paso del algoritmo.

	p						
	1	2	3	4	5	6	7
Bases seleccionadas	5	3	1	1	1	1	0
		5	3	3	3	3	1
			5	5	4	4	3
				6	5	5	4
					6	6	5
						7	6
							7

4.2 CALCULO DE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Es bien sabido que uno de los usos más usuales de los modelos AR es en el cálculo de la DEP [2, 7], el método comúnmente conocido como cálculo paramétrico de la

DEP, consiste en calcular el mejor modelo AR a partir de una serie temporal, y posteriormente estudiar la respuesta en frecuencia de dicho modelo, este método es una alternativa a la transformada discreta de Fourier (cálculo no paramétrico de la DEP). Por medio del cálculo paramétrico de la DEP, es posible obtener una representación más suave de la energía en el espectro de las frecuencias, donde es más fácil identificar las frecuencias principales y secundarias.

En el panel superior de la Fig. 5 se muestra el cálculo de la DEP utilizando el método no paramétrico (transformada discreta de Fourier), para la señal generada con (4). En el panel inferior de la Fig. 5 se muestra el

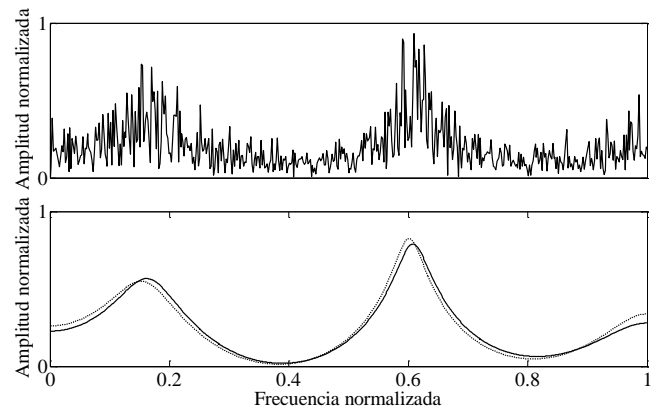


Fig. 5 Cálculo de la DEP, panel superior método no paramétrico, panel inferior método paramétrico.

cálculo de la DEP con el método no paramétrico, la línea continua es el resultado obtenido con el modelo AR calculado con el método propuesto (9), la línea punteada es la DEP calculada con el modelo AR obtenido con el método tradicional (5). Es destacable que aún en este caso simple, existen algunas diferencias entre ambos espectros, sobre todo en baja frecuencia, por lo tanto, en un caso real donde se pueden obtener modelos de mayor tamaño, se espera que este error aumente.

4.3 SEÑALES DE VIBRACIÓN DE MÁQUINAS ROTATIVAS

A continuación se utiliza el algoritmo propuesto para encontrar el modelo AR óptimo para una señal de vibración de una máquina rotativa sin carga. Dicha señal fue obtenida del Bearing data center, Case Western Reserve University. Las señales fueron generadas por máquinas rotativas sin ningún tipo de falla con una velocidad de 1970 rpm; la tasa de muestreo es 48000 muestras/segundo y la señal tiene 2048 muestras

La Fig. 6 muestra la serie temporal que se desea modelar utilizando un modelo AR.

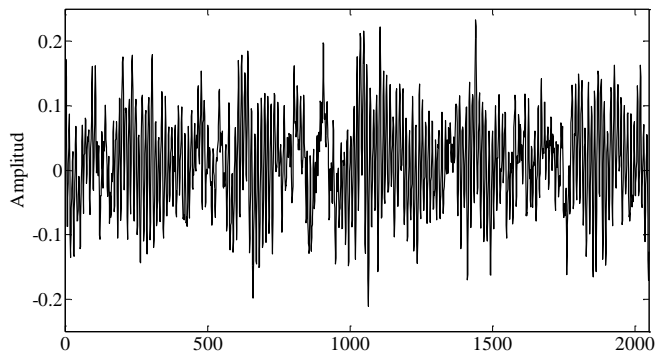


Fig. 6 Señal de vibración de una máquina rotativa sin falla

Dado que no se tiene conocimiento previo del orden del modelo, se inicia con un valor de p moderado (e.g. $p = 10$) y se sigue aumentando el valor de p hasta que no haya cambios en el modelo.

Usando la metodología propuesta se obtuvo un modelo de orden 68 con solo 33 parámetros diferentes de cero. Dicho modelo es demasiado grande; esto es un posible indicador que un modelo AR no es capaz de modelar el complejo comportamiento de la señal original. Es importante mencionar que utilizando el método clásico, se obtiene un modelo con más de 40 parámetros diferentes de cero, por lo tanto utilizando la metodología propuesta es posible obtener modelos más simples.

En la Fig. 7 se presenta la DEP de la señal de vibración mostrada en la Fig. 6, la línea continua es la DEP calculada a partir del modelo AR obtenido con el algoritmo propuesto mientras que la línea punteada es la DEP calculada con el modelo AR obtenido con el algoritmo clásico. A pesar que las tres frecuencias principales están bien identificadas en ambas graficas, se puede observar que las frecuencias que tienen menor intensidad están mejor representadas en la línea continua, por lo tanto se hace más fácil la identificación de las diversas frecuencias y armónicos presentes en la DEP.

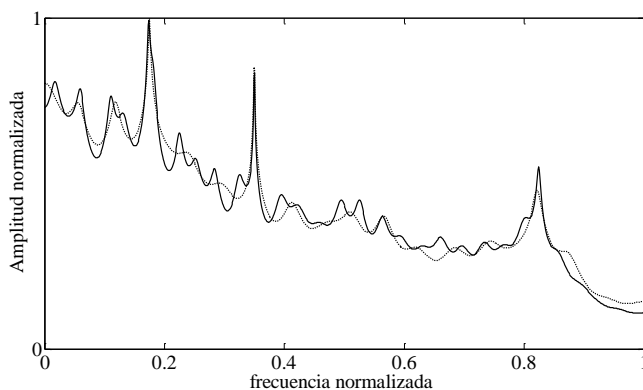


Fig. 7 DEP de la señal de vibración de una máquina rotativa.

5. DISCUSIÓN

Es necesario expresar de nuevo que la metodología acá presentada no solo es aplicable a modelos AR, se puede aplicar fácilmente a modelos auto-regresivos de media móvil (ARMA), modelos ARMA no lineales (NARMA) y en general cualquier combinación lineal de funciones base lineales o no lineales, por lo que es de gran utilidad para el ingeniero moderno.

6. CONCLUSIONES

Se presento una metodología, la cual basada en un diccionario de funciones base formado a partir de retardos de la función original, un algoritmo originalmente introducido para encontrar modelos pseudo-lineales óptimos y la MDL, permite encontrar el modelo AR óptimo para una serie temporal. Se demostró, que el método clásico falla en situaciones donde existen retardos con parámetros igual a cero (como en (4)), pero la metodología presentada es capaz de superar este tipo de situaciones. Por lo tanto, este método es superior y debe ser utilizado para evitar errores al modelar series temporales con modelos AR.

Se aplico el método a una señal proveniente de una máquina rotativa sin falla, se encontró en primera instancia que un modelo AR puede no ser adecuado para modelar este tipo de señales, sin embargo se observo que el modelo AR obtenido con la nueva metodología es más simple que el obtenido de la manera clásica.

Se mostro además que el DSP calculado con el modelo AR óptimo obtenido con el algoritmo propuesto es mejor para identificar frecuencias de baja intensidad y armónicos.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Akiake, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 (6), 716–723.
- [2] Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6 (2), 461–464.
- [3] Judd, K., & Mess, A. (1995). On selecting models for nonlinear time series. *Physica D*, 82, 426-444.
- [4] Rissanen, J. (1989). *Stochastic complexity in statistical inquiry*. Singapore: World Scientific.
- [5] Grünwald, P. (2007). *The Minimum Description Length principle*. Cambridge: Mit Press.
- [6] Rissanen, J. (2007). *Information and Complexity in Statistical Modeling*. London: Springer.
- [7] Therrier, C. (1992). *Discrete random signals and statistical signal processing*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

AGRADECIMIENTOS

Diego Luis Guarín fue patrocinado por la Universidad Tecnológica de Pereira y Colciencias por medio de el programa *Jovenes investigadores e innovadores 2011*. Agradecemos al Ing. Oscar Cardona de la universidad Nacional de Colombia sede manizales por sus valiosos comentarios.

APENDICE

A1. IMPLEMENTACIÓN

A continuación se presenta el algoritmo en Matlab donde se implementa el algoritmo anteriormente descrito, esto con el fin de motivar la implementación de la presente metodología en la comunidad científica. Para poder utilizar esta función, es necesario tener instalado el toolbox Anta2 de Michael Small, el cual se encuentra disponible de manera gratuita en http://www.eie.polyu.edu.hk/~ensmall/Homepage/ANTA_v.2.html

Debido a limitaciones de espacio no es posible colocar el código de Matlab en este documento; el lector interesado puede dirigirse a http://dl.dropbox.com/u/9623177/bottom_up.m , donde encontrara el algoritmo y un manual de usuario.