

**OBTENCIÓN ANALÍTICA DE LA ENERGÍA POTENCIAL PARA ENVOLTURAS****The analytic description to obtain the potential energy for shells****RESUMEN**

En este trabajo se da de forma detallada la obtención de la energía potencial para envolturas anisotópicas.

**PALABRAS CLAVES:** *Deformación, energía potencial, envoltura, estabilidad.*

**ABSTRACT**

In this work the detailed description of obtaining the potential energy for anisotropic shells is given

**KEYWORDS:** *Deformation, energy, potential energy, shell, stability.*

**JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ****GRANADA**

Matemático, Ph.D.

Profesor Asistente

Universidad Tecnológica de

Pereira

jorodryy@utp.edu.co

**CARLOS MARIO ESCOBAR****CALLEJAS**

Ingeniero Civil, M.Sc

Profesor Asistente

Universidad Tecnológica de

Pereira

ccescobar@utp.edu.co

**1. Introducción**

Para la formulación de las principales hipótesis de envolturas, nos basamos en la teoría de los cuerpos deformables. En este sentido la superficie media de la envoltura es lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los generadores de la superficie de la envoltura.

A la superficie media de la envoltura le asociamos un sistema de coordenadas curvilíneas y un radio vector dado  $r = r(x^1, x^2)$ . Los vectores  $g_\alpha$

conforman en la superficie una base covariante, el vector unitario normal a la superficie lo denotamos por  $n$ . Consideraremos que los índices  $\alpha$  y  $\beta$  beta toman los valores desde 1 hasta 2. Los a tensor métricos covariantes de la superficie sin deformar de la envoltura los designamos por  $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta$ . La curvatura de la superficie la denotamos en forma tensorial como  $b_{\alpha\beta} = g_{\alpha,\beta} \cdot n = g_\alpha \cdot n_{,\beta}$ , donde la coma “,” es para denotar la derivada.

**2. Obtención de la energía potencial**

De esta forma cualquier vector puede darse en la base local de la forma

Fecha Recepción: 9 de Septiembre de 2010

Fecha aceptación: 15 de Noviembre de 2010

$$g_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k + b_{\alpha\beta} n_{,\alpha} = -b_\alpha^\beta g_\beta \quad (1)$$

El primer grupo de fórmulas de (1) son las fórmulas de derivación Gauss, el segundo grupo de fórmulas son las fórmulas Weingarten. Aquí  $\Gamma_{\alpha\beta}^k$  son los símbolos de Christoffel para la superficie media de la envoltura. Si suponemos que las coordenadas  $x^1$  y  $x^2$  coinciden con las líneas principales de la curvatura media y el sistema de coordenadas es ortogonal, entonces para  $\Gamma_{\alpha\beta}^k$  y para  $g_{\alpha\beta}$  se tiene

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta; \\ H_\alpha^2, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\kappa} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \neq \kappa; \\ \frac{-H_{\alpha} \partial H_{\alpha}}{H_{\kappa}^2 \partial x^{\kappa}}, & \alpha = \beta \neq \kappa; \\ \frac{1}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, & \alpha = \kappa. \end{cases}, \quad (2)$$

donde  $H_{\alpha}$  son los coeficientes de Lamé. De aquí en adelante si los índices de las fórmulas del lado derecho e izquierdo se repiten, entonces la suma no se efectuará con respecto a este índice.

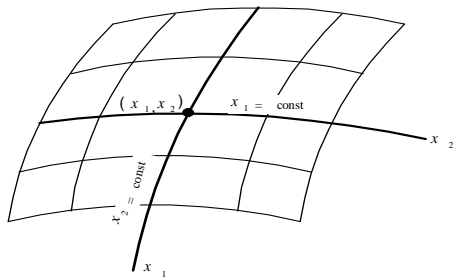
Así

$$a = a_{\alpha} g^{\alpha} = a^{\alpha} g_{\alpha} = \sum_{i=1} a_{(\alpha)} \tau_{\alpha}, \quad (3)$$

donde  $\tau_{\alpha} = \frac{1}{H_{\alpha}} g_{\alpha} = H_{\alpha} g^{\alpha}$  es el vector unitario tangente a las líneas coordenadas. Una expresión similar escribimos para el tensor de segundo orden:

$$p^{\alpha\beta} = \frac{p(\alpha\beta)}{H_{\alpha} H_{\beta}}, \quad p_{\alpha\beta} = H_{\alpha} H_{\beta} p(\alpha\beta) \quad (4)$$

Para determinar la posición de cualquier punto de la envoltura, que se encuentre fuera de la superficie media, se introduce una tercera coordenada  $x^3$ , que representa a la distancia a lo largo de la normal desde el punto  $(x^1, x^2)$  de la superficie media hasta el punto  $(x^1, x^2, x^3)$  (Fig. 1).



**Fig. 1 Superficie media de la envoltura**

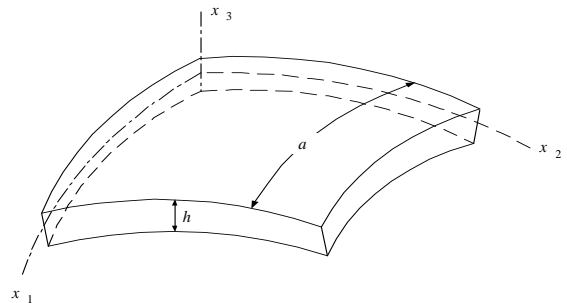
De esta forma el elemento lineal de la envoltura en este sistema de coordenadas se determina de la siguiente forma

$$dl^2 = H_{\alpha} H_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} + (dx^3)^2, \quad (5)$$

donde los coeficientes de Lamé  $H_{\alpha} = H_{\alpha}(x^1, x^2)$  toman el aspecto

$$H_{\alpha} = h_{\alpha} (1 + b_{\alpha} x^3). \quad (6)$$

La longitud del segmento normal en este punto a la superficie media y acotada por las directrices de la envoltura, es el espesor de la envoltura. En si el grosor de la envoltura en términos generales puede ser variable, es decir  $h = h(x^1, x^2)$  (Fig. 2). Aquí sólo analizaremos el caso cuando el grosor es constante.



**Fig.2. Elemento de envoltura.**

Supongamos que la envoltura en el sistema de coordenadas  $x^1, x^2, x^3$  experimenta una deformación.

La posición de cualquier punto  $M(x^1, x^2, x^3)$ , está determinado por el radio vector  $R = R(x^1, x^2, x^3)$ .

El estado de deformación de la envoltura en una vecindad del punto  $M(x^1, x^2, x^3)$  está caracterizado por seis componentes de las tensiones asociada con el desplazamiento del punto M, ver [1,2,6].

Para la construcción la teoría de envolturas linealizadas es necesario a las ecuaciones anteriores agregar las ecuaciones de estabilidad, es decir las ecuaciones de las relaciones constitutivas y las condiciones en la superficie. El análisis de la envoltura lo realizamos pasando del caso tridimensional al bidimensional.

Para resolver este tipo de problemas se utilizan un gran número de métodos. Estos son: a) el método de las hipótesis b) el método de las expansiones en su espesor, c) métodos asintóticos.

Aquí le daremos preferencia al método de las hipótesis, en el cual con relativa facilidad, conduce a resultados óptimos. También se utilizaremos para analizar la estabilidad la teoría clásica de envolturas.

Teniendo en cuenta esto, tenemos

$$\eta_{23} = 0, \eta_{13} = 0, u_3 = w(x^1, x^2), \quad (7)$$

lo que formalmente significa que la deformación de la envoltura se realiza sin tener en cuenta la deformación de desplazamiento  $\eta_{23}, \eta_{13}$  y que el desplazamiento  $u_3$  no

depende de la coordenada  $x^3$ . El desplazamiento normal en todos los puntos del elemento de envoltura es  $w = w(x^1, x^2)$  de igual forma la tensión  $\sigma^{\alpha\beta}$  se puede obviar, es decir suponemos que en la envoltura se realiza una tensión de estado en el plano.

Teniendo en cuenta (6), se tiene

$$\left[ \frac{1}{H_\alpha(1+b_\alpha x^3)} u_\alpha \right]_{,3} + \frac{1}{H_\alpha^2(1+b_\alpha x^3)^2} w_{,\alpha} = 0. \quad (8)$$

Integrando (8) con respecto  $x^3$ , en el intervalo  $[0, x^3]$  y suponiendo que  $x^3 = 0, u_\alpha = u_\alpha(x^1, x^2)$ , obtenemos

$$u_\alpha^h = (1+b_\alpha x^3) u_\alpha - \frac{x^3}{A} w_{,\alpha}, \quad (9)$$

donde  $u_\alpha^h$  es el desplazamiento tangencial y  $u_\alpha = u_\alpha(x^1, x^2)$  es un punto en la superficie media. De esta forma (9) representa un modelo es un modelo geométrico para la deformación de la envoltura. De acuerdo con (9) el problema tridimensional lo podemos ver como un problema bidimensional para la teoría de envolturas independientes de las relaciones constitutivas.

De (9) para la deformación  $e_{\alpha\beta}$ , se tiene

$$e_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + x^3 \kappa_{\alpha\beta}. \quad (10)$$

Teniendo en cuenta (3), (7), obtenemos

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{u_\beta}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\beta} + b_\alpha w, \quad (11)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\kappa_{,\alpha\beta} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial w}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{h_\alpha h_\beta^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial w}{\partial x^\beta} - \frac{u_\alpha \partial b_\alpha}{h_\alpha \partial x^\alpha} + b_\alpha^2 w, \quad (12)$$

donde  $\eta_{\alpha\beta}$  es la deformación relativa de expansión y desplazamiento,  $\kappa_{\alpha\beta}$  es el componente de deformación

de flexión y torsión en la superficie media de la envoltura.

Entre los seis parámetros  $\eta_{\alpha\beta}$  y  $\kappa_{\alpha\beta}$ , que determinan la deformación en la superficie media, se tienen tres relaciones diferenciales

$$B\chi_{2,\alpha} + (\chi_2 - \chi_1)B\chi_{,\alpha} - \frac{A}{2} \tau_{,\beta} - \tau A_{,\beta} + k_2 \omega A_{,\beta} + k_1 [A\omega_{,\beta} + \omega A_{,\beta} - B\varepsilon_{2,\alpha} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)B_{,\alpha}] = 0, \quad (13)$$

Sin pérdida de precisión la condición (13) la podemos escribir de la siguiente manera

$$B\chi_{2,\alpha} + (\chi_2 - \chi_1)B\chi_{,\alpha} - \frac{A}{2} \tau_{,\beta} - \tau A_{,\beta} + k_2 \omega A_{,\beta} + k_1 [A\omega_{,\beta} + \omega A_{,\beta} - B\varepsilon_{2,\alpha} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)B_{,\alpha}] = 0, \quad (14)$$

En la teoría de envolturas, al igual que las tensiones se introducen los esfuerzos generales de la condición de equivalencia estática. Para los momentos  $N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}$ , obtenemos que

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{h_\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} H_\beta dx^3, M^{\alpha\beta} = \frac{1}{h_\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} H_\beta x^3 dx^3 \quad (15)$$

La dirección positiva de las fuerzas internas y los momentos se muestran en la figuras 2 y 3.

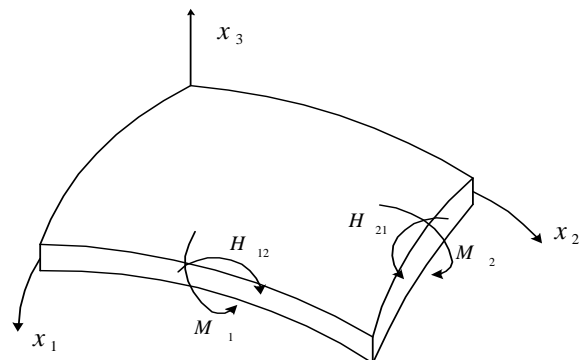


Fig. 2

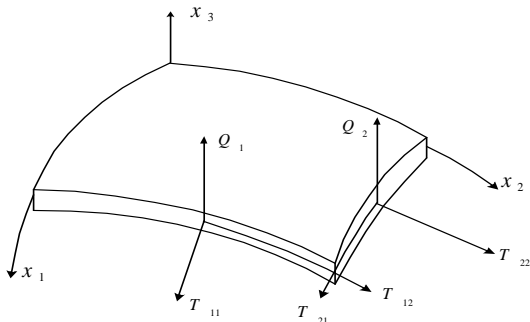


Fig. 3

Para obtener las ecuaciones de estabilidad consideremos un rectángulo curvilíneo, el cual se obtiene con ayuda de cuatro cortes normales a la superficie media de la envoltura. En el elemento de envoltura actúan las fuerzas internas, momentos, las fuerzas externas  $P_i = P_i(x^1, x^2)$  y fuerzas superficiales, que pasan por  $x^3 = h/2$  (externas) y  $x^3 = -h/2$  (internas). Integrando (7) desde  $x^3 = -h/2$  hasta  $x^3 = h/2$  y multiplicando por  $x^3$ , se obtiene que

$$(BT_1)_{,\alpha} - B_{,\alpha} T_2 + (AS_{21})_{,\beta} + A_{,\beta} S_{12} + ABk_1 N_1 = -ABX,$$

$$(AT_2)_{,\beta} - A_{,\beta} T_1 + (BS_{12})_{,\alpha} + B_{,\alpha} S_{21} + ABk_2 N_2 = -ABY,$$

$$-(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{1}{AB} [(BN_1)_{,\alpha} + (AN_2)_{,\beta}] = -Z,$$

(16)

$$(BM_1)_{,\alpha} + (AH_{21})_{,\beta} + A_{,\beta} H_{12} - B_{,\alpha} M_2 = -AB N_1,$$

$$(AM_2)_{,\beta} + (BH_{12})_{,\alpha} + B_{,\alpha} H_{21} - A_{,\beta} M_1 = -AB N_2,$$

donde las fuerzas internas y momentos de (15), se determinan como

$$X = X^+ \left(1 + \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_2}\right) + X^- \left(1 - \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 - \frac{h}{2R_2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{AB} \int_{-h/2}^{h/2} P_{\alpha} H_1 H_2 d\gamma \approx X_2 + \int_{-h/2}^{h/2} P_{\alpha} d\gamma,$$

$$Y = Y^+ \left(1 + \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_2}\right) + Y^- \left(1 - \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 - \frac{h}{2R_2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{AB} \int_{-h/2}^{h/2} P_{\beta} H_1 H_2 d\gamma \approx Y_2 + \int_{-h/2}^{h/2} P_{\beta} d\gamma, \quad (17)$$

$$Z = Z^+ \left(1 + \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_2}\right) + Z^- \left(1 - \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 - \frac{h}{2R_2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{AB} \int_{-h/2}^{h/2} P_{\gamma} H_1 H_2 d\gamma \approx Z_2 + \int_{-h/2}^{h/2} P_{\gamma} d\gamma$$

El sistema (15) representa la condición de equilibrio del elemento diferencial de la envoltura con espesor finito, bajo la influencia de fuerzas internas y externas en la superficie media de envoltura.

De la condición de estabilidad, la suma de momentos con respecto al eje  $x^3$  es cero, obteniendo la sexta condición, la cual tiene el aspecto

$$S_{12} - S_{21} + k_1 H_{12} - k_2 H_{21} = 0. \quad (17)$$

Para  $S_{ik}$  se obtiene

$$S_{12} = C_{16} \varepsilon_1 + C_{26} \varepsilon_2 + C_{66} \omega + k_2 (D_{66} \tau + D_{16} \chi_1 + D_{26} \chi_2),$$

$$S_{21} = C_{16} \varepsilon_1 + C_{26} \varepsilon_2 + C_{66} \omega + k_1 (D_{66} \tau + D_{16} \chi_1 + D_{26} \chi_2).$$

Aquí nos limitamos estudiar envolturas, cuyos lados coinciden con las líneas de curvatura en la superficie media.

Las condiciones homogéneas en la frontera para este tipo de envolturas son:

1. El borde libre:

$$T_1 = 0, S_{12} + k_2 H_{12} = 0,$$

$$N_1 + \frac{1}{B} H_{12, \beta} = 0, M_1 = 0; \quad (18)$$

2. Los bordes fijos:

$$M_1 = 0, u = 0, v = 0, w = 0; \quad (19)$$

3. El borde articulado, libre en la dirección tangencial de la frontera:

$$T_1 = 0, M_1 = 0, w = 0, v = 0; \quad (20)$$

4. Completamente fijo en los extremos:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \theta = -\frac{1}{A}w_{,\alpha} + k_1 u = 0. \quad (21)$$

En (21),  $\theta$  es el ángulo de rotación de la frontera normal de la superficie media de la envoltura alrededor de la tangente a la línea  $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$ .

Las condiciones no-homogéneas se obtienen fácilmente de las condiciones de contorno anteriormente dadas suponiendo que en la parte derecha de las condiciones no es cero sino un valor dado.

En el caso de que la envoltura no tenga un contorno cerrado o solamente en una parte de la frontera es dado, las condiciones de contorno en las curvas cerradas se reemplazarán por las condiciones periódicas.

En base en las condiciones dadas, teniendo en consideración la hipótesis principal (teoría clásica de envolturas) obtenemos para la energía potencial de la forma

$$V = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int \int (\sigma_{\alpha}^e e_{\alpha} + \sigma_{\beta}^e e_{\beta} + \tau_{\alpha\beta}^e e_{\alpha\beta}) H_1 H_2 d\alpha d\beta d\gamma.$$

Teniendo en cuenta [2,4], finalmente obtenemos la siguiente expresión para la energía potencial  $V$

$$V = \frac{1}{2} \int \int (C_{11} \epsilon_1^2 + 2C_{12} \epsilon_1 \epsilon_2 + C_{22} \epsilon_2^2 + C_{66} \omega^2 + 2C_{16} \omega \epsilon_1 + 2C_{26} \omega \epsilon_2)_{AB} d\alpha d\beta + \frac{1}{2} \int \int (D_{11} \chi_1^2 + 2D_{12} \chi_1 \chi_2 + D_{22} \chi_2^2 + D_{66} \tau^2 + 2D_{16} \tau \chi_1 + 2D_{26} \tau \chi_2)_{AB} d\alpha d\beta. \quad (1.1)$$

En este caso, ambas integrales se distribuyen a lo largo de la superficie media de la envoltura. La primera integral doble es la energía potencial de los desplazamientos y expansiones, la segunda integral doble es la energía potencial de la flexión y la torsión.

### 3. Bibliografía

1. Novozhilov V.V., Kadashevish Yu. A., Chernyakov. Yu.A. Teoria plastichnosti uchitivauchya mikrodeformacia. Dokl. AN SSSR. 1985. T. 284, T.4. P.821-823. Traducción del autor

2. Gonzalez J.R. Stability and Postbifurcation Behavior of Shells under Combined Loading. GAMM2001. Zurich, 2001. P. 44.
3. Ilushin A.A. Plastichnost. M., 1948. 876 p.
4. Kadashevish Yu. A., Novozhilov V.V. Chernyakov. Yu.A. Teoria plastichnosti i polzuchesti uchitivaushie mikrodeformacii // PMM. 1986. T.50, №6. p.890-897.
5. Zelenskiy A.G., Shvayko N. Yu. Vlianie istorii nagruzenya na bifurkaciu processa deformirovaniya cilindricheskoi obolochki. Dokl. A.N USSR. Ser.A. 1978. T 1. Pp. 38-43.
6. Hutchinson J. W. Plastic buckling. Advances in Appl. Mech. 1974. Pp 67-144.
7. Needlman A. A numerical Study of Necking in circular cylindrical bars. J. Mech. And Phys. Solids. 1972, Pp 111-127