ALGUNOS MODELOS MATEMÁTICOS EN FINANZAS
Some mathematical models in finance

RESUMEN

En el presente artículo se muestran algunas ideas de los diversos modelos matemáticos presentes en las finanzas.

Mediante ideas básicas de la teoría de finanzas, se llegará a la ecuación central que rige la mayoría de problemas sobre los derivados financieros, se hablará entonces de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

PALABRAS CLAVES: Derivados financieros, Black-Scholes.

ABSTRACT

In this paper, we present some ideas to present various mathematical models in finance.

Using basic ideas of the theory of finance, it will reach the central equation that governs most of the problems on financial derivatives, one speaks of the partial differential equation of Black-Scholes.

KEYWORDS: Financial derivatives, Black-Scholes.

PEDRO PABLO CÁRDENAS A.
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Profesor Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

JHON JAIRO LEÓN S.
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Profesor Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
leonj@utp.edu.co

FERNANDO MESA
Licenciado en Matemáticas y Física.
Magister en Instrumentación Física.
Profesor Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Algunos principios básicos son los siguientes:

1. Un peso ($1) vale más hoy que mañana.
2. Un peso ($1) seguro vale más que un peso ($1) riesgoso.

El primer principio brinda la base de lo que se entiende por “invertir”: toda inversión debe suponer un retorno, que representa una medida relativa del incremento del capital con el tiempo. El segundo principio nos dice cómo debe ser ese retorno según el riesgo que la inversión entrañe. La idea es clara; si la inversión es riesgosa, es razonable esperar que el retorno sea mayor: en algún sentido, se trata de una compensación por el riesgo.

Un activo no riesgoso crece según la tasa “libre de riesgo” r, es decir:

$$C \to Ce^{rT}$$

Fecha de Recepción: 17 de junio de 2010
Fecha de Aceptación: 13 de Agosto de 2010

Una cartera o portafolio puede estar compuesta por distintos activos, algunos no riesgosos (por ejemplo, bonos) y otros riesgosos (por ejemplo, acciones). La teoría de portafolios de Markowitz (premio Nobel 1990), consiste en maximizar el retorno de una cartera compuesta por diferentes activos manteniendo constante el nivel de riesgo.

2. PRINCIPIO DE NO ARBITRAJE

No se puede ganar sin arriesgar (“There’s no free lunch”).

Ejemplo: pedir prestados $ 100 al 5% anual, y prestarlos al 10% anual.

3. TRANSFERENCIA DEL RIESGO

Una opción (europea, call) es un contrato que da derecho a su poseedor a comprar cierto activo por un precio establecido K (strike price), en determinada fecha futura T (fecha de expiración).

Por ejemplo, una opción de compra por $ 100 en cierto tiempo T de un activo que hoy vale $ 95. Si el activo sube a \$ 120 en tiempo T, entonces conviene ejercer la opción, pues lo podemos comprar \$20 más barato que el valor de mercado. Si el activo baja a \$90, entonces no se ejerce la opción y solo se pierde el valor que hemos pagado por ella (prima).

¿Cuál es el precio justo de un contrato así?

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \begin{array}{c}120\\20\end{array} \\ \begin{array}{c}100\\V\end{array} & & \\ & \searrow & \begin{array}{c}90\\0\end{array}\end{array}$$

4. ESTRATEGIA DE HEDGING

Idea: construir un portafolio insensible a las subas o bajas.

Estrategia: compramos un número de unidades del activo (posición long), y vendemos una opción (posición short).

El valor de dicho portafolio hoy es de

$$\Pi = 100\Delta - V$$

Si el activo sube a \$ 120, el portafolio valdrá

$$\Pi_u = 120\Delta - 20$$

Si el activo baja a \$ 90, el portafolio valdrá

$$\Pi_d = 90\Delta - 0$$

Buscamos Δ para que el portafolio valga en ambos casos lo mismo, es decir:

$$120\Delta - 20 = 90\Delta - 0$$

de donde

$$\Delta = \frac{20-0}{120-90} = \frac{2}{3}$$

De esta forma

$$\Pi_u = \Pi_d = \frac{2\cdot 120}{3} - 20 = \frac{2\cdot 90}{3} = 60$$

Como el portafolio es ahora libre de riesgo, crece según la tasa *r*. Luego,

$$\Pi = e^{-rT}\cdot 60$$

Por ejemplo, si suponemos que el retorno es del 1 %, entonces vale

$$\Pi = \frac{60}{1{,}01} = 59{,}4059$$

Por otro lado

$$\Pi = 95\Delta - V = \frac{2{,}95}{3} - V,$$

de donde

$$V = \frac{2{,}95}{3} - 59{,}4059 = 3{,}9273$$

5. MODELO BINOMIAL

$$\begin{array}{ccc} & & S_u \\ & \nearrow & V_u \\ \begin{array}{c}S\\V\end{array} & & \\ & \searrow & \\ & & \begin{array}{c}S_d\\V_d\end{array}\end{array}$$

Como antes,

$$\Pi = \begin{cases}\Delta \text{ unidades del activo en posición long}\\ 1 \text{ opción en posición short}\end{cases}$$

Se plantea $\Pi_u = \Pi_d$, y entonces

$$\Delta S_u - V_u = \Delta S_d - V_d$$

De donde

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}$$

Observación: Δ tiene "pinta" de ser una derivada.

De esta forma se obtiene

$$e^{-rT}(\Delta S_u - V_u) = e^{-rT}(\Delta S_d - V_d) =$$
$$\Pi = \Delta S - V$$

Y luego,

$$V = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S - e^{-rT}\left(\frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S_u - V_u\right)$$

Haciendo un poco más de cuentas, se llega a

$$V = e^{-rT}\left(\frac{e^{rT}S - S_d}{S_u - S_d} V_u + \frac{S_u - e^{rT}S}{S_u - S_d} V_d\right)$$

Si ahora si se define

$$P = \frac{e^{rT}S - S_d}{S_u - S_d}$$

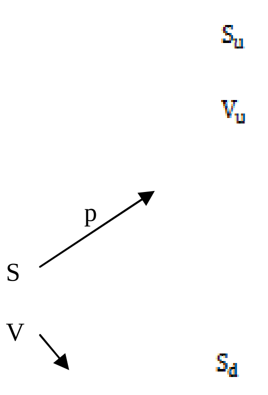
Entonces la fórmula anterior se vuelve mas sencilla:

$$V = e^{-rT}[pV_u + (1-p)V_d]$$

La hipótesis de no arbitraje implica que $0 \leq p \leq 1$, pues:

1. Si p < 0, entonces pido prestado S a tasa r y compro una unidad del activo. En el peor de los casos, obtengo $S_d - e^{rT}S > 0$.
2. Si p > 1, vendo una unidad del activo, e invierto el dinero a tasa r. Al final del período, obtengo como mínimo $e^{rT}S - S_u > 0$.

Otra observación que se hace es la siguiente: Ahora *p* tiene pinta de probabilidad y la expresión entre corchetes tiene pinta de valor esperado.



6. LEMA DE ITO

Se presenta aquí la versión intuitiva.

Si $V(s,t)$ expresa el valor de la opción, entonces

$$V(S+\delta S, t+\delta t) - V(S,t) =$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}\delta S + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\delta S^2 + \cdots\right) + \cdots$$

Usando el hecho de que $dS = \mu S dt + \sigma S dZ$, de que $dZ^2 \approx dt$ y eliminando los términos de orden mayor, se obtiene:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dZ$$

7. HEDGING CONTINUO

Como

$$d\Pi = \Delta dS - dV = \Delta(\mu S dt + \sigma S dZ) - dV,$$

la parte estocástica se elimina tomando $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$

Resulta entonces,

$$d\Pi = \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt$$

Como Π ahora es libre de riesgo, vale entonces

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = r dt$$

Y entonces se tiene

$$r\left(S\frac{\partial V}{\partial S} - V\right) = -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Donde esta fórmula se conoce como la famosa **Ecuación de Black-Scholes.**

7. ECUACION DE BLACK-SCHOLES

Esta ecuación es entonces de la forma

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=rV$$

La condición final para el caso de una call europea es de la forma:

$$V(S,t)=(S-K)^+$$

Mediante cambios de variables apropiados, esta ecuación se reduce a una ecuación de calor clásica con condición de Cauchy, la cual se resuelve por métodos comunes de ecuaciones parciales.

8. VARIACIONES DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES

A partir de aquí se pueden tomar muchos caminos. casi todos tienen en [5] una introducción. Algunos de ellos son:

1.Opciones Americanas Valuar opciones Americanas presenta una gran dificultad, el hecho de que sea posible ejercer antes del tiempo de expiración. Esto matemáticamente se traduce como un problema de frontera libre y en general es un problema abierto.

2. Dividendos La incorporación de dividendos en general introduce saltos en el valor del derivado. La teoría con dividendos periódicos y conocidos fue desarrollada por Merton.

3. r y/o σ no constantes Modelos más ambiciosos dejan de lado las constantes y los plantean como funciones del tiempo y/o el precio del activo. También existen modelos estocásticos para σ.

4. Volatilidad Implícita Este es el problema inverso y de gran importancia. El mismo supone que el mercado conoce el valor de la opción C(K, T) = C(S, t, K, T) y de aquí se trata de encontrar la volatilidad σ. También es un problema abierto. Para estudiar estos temas ver [5].

CONCLUSIONES

En este trabajo se mostraron las diferentes técnicas para proponer los modelos matemáticos que se emplean en la teoría de derivados financieros, más precisamente la valuación de opciones sobre acciones.

El modelo Binomial mostró las diferentes probabilidades de obtener ganancias o pérdidas en un mercado financiero.

Además mediante experimentación se mostraron las diferentes variaciones del modelo de Black-Scholes las cuales dan una interpretación de lo que se quiere obtener con las funciones de tiempo.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMSTER P. Averbuj C.G. Mariani M.C. & Rial . (2005) A Black-Scholes option pricing model with transaction costs , J. Math. Anal. Appl. 303, pp. 688-695

[2] Topics, Cambridge University PressRoss, M.C. (1999)

[3] CONWAY J. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985

[4] An Introduction to Mathematical Finance, options and other topics, Cambridge University Press

[5] WILMOTT, P. Option Pricing, Oxford Financial Press. 2007.

[6] Evans L.C. (1998) Partial Differential equations, Graduate Studies in Mathematics; V. 19, American Mathematical Society.

[7] Leland H. E. (1995) Option Pricing and replication with Transaction Cost, The Journal of Finance, 40:1283-1301.

[8] Leland H. E. (1995) Option Pricing and replication with Transaction Cost, The Journal of Finance, 40:1283-1301.

[9] Ross, M.C. (1999) An Introduction to Mathematical Finance, Options and other topics, Cambridge University Press.