Programación lineal y análisis paramétrico en planificación forestal

Ana M. López A.*; Alonso Barrios T.*

* Estudiantes de postgrado, Escuela de Graduados en Ciencias Forestales, Universidad Austral de Chile

Resumen

El proceso de planificación forestal muchas veces llega a ser tan complejo, que requiere del uso de herramientas que faciliten la toma de decisiones. Dentro de este grupo de herramientas, se encuentra la programación lineal. La solución de un problema de programación lineal garantiza la asignación optima de recursos entre un numero finito de actividades. Un modelo de programación lineal se usó para resolver un problema de planificación de la cosecha forestal en el contexto de la planificación forestal multipropósito, el cual maximizó el valor presente neto del bosque a través del horizonte de planificación. Usando análisis paramétrico, se evaluó el efecto de la incorporación en el modelo de restricciones ambientales como la conservación de la vida silvestre, el mantenimiento de un flujo de volumen no decreciente y un inventario de madera en pie al final del horizonte de planificación.

Abstract

The forest planning process often becomes so complex that requires the use of tools to facilitate decision making. One of these tools is linear programming. The solution of a linear programming problem guarantees the optimal allocation of resources among a finite number of activities. A linear programming model was used to solve a timber harvest scheduling problem in a multi-use forest planning context that maximized the forest net present value over the planning horizon. The effect of incorporation of environmental constraints in the model, like wildlife conservation, the maintenance of a non-declining even flow and an inventory of standing timber at the end of planning horizon were evaluated using parametric analysis.

Palabras clave: Programación lineal, análisis paramétrico, planificación forestal, precio sombra, restricción ambiental.

Keywords: Linear programming, parametric analysis, forest planning, shadow price, environmental constraint.

Correo electrónico: analopez@uach.cl - alonsobarrios@uach.cl

INTRODUCCIÓN

La programación lineal es una técnica de modelamiento que ha estado presente en el proceso de planificación forestal desde mediados del siglo XX y ha alcanzado grandes avances científicos desde entonces, en especial en la planificación de los bosques templados del hemisferio norte. Busca resolver problemas propios de las ciencias forestales como la asignación óptima de rodales para cosechar en un horizonte de planificación que maximiza el volumen de madera cosechado en cada período del horizonte de planificación (Lilttschwager & Tcheng 1967, Field et ál. 1980). Otros modelos no solo han enfrentado el problema de asignar rodales a la cosecha sino también de establecer esquemas de manejo silvicultural al bosque, y maximizar el valor neto presente de éste. (Walker 1971, Navon 1971, Johnson & Scheurman 1977, Tedder 1980, Field et ál. 1980, Berck & Bible 1984, Diaz-Balteiro & Romero 1998).

La programación lineal ha permitido el modelamiento de muchos problemas en planificación forestal que, de otra manera, habrían sido imposible de resolver utilizando técnicas convencionales, debido al gran número de variables y de restricciones que se adicionan a estos modelos en la planificación a gran escala.

En la década de los ochenta, el aumento de la preocupación por la conservación del medio ambiente y el uso racional y sostenible de los recursos naturales se reflejó en la incorporación de restricciones ambientales en los modelos de planificación forestal. La principal de ellas estaba relacionada con la determinación de un flujo de productos no decreciente, el cual aseguraría la base de los recursos en el tiempo; esto indica que el volumen cosechado en cada espacio de planificación debe ser por lo menos igual al del período anterior (Parry et ál. 1983, McQuillan 1986, Hof et ál. 1986, Pickens et ál. 1990).

Otro tipo de restricciones que caben dentro de la connotación ambiental son las espaciales como las de *adyacencia*. los modelos formulados por Jones et ál. (1991), Weintraub (1994), Walters et ál. (1999), Murray (1999), Howard & Borges (2000), McDill & Braze (2000, 2001), McDill et ál. (2001), Gunn & Richards (2005), Boston & Sessions (2006) son buenos ejemplos del empleo de esta restricción en su formulación. Básicamente, esta restringe la cosecha de áreas adyacentes, y disminuye, así, la presión sobre áreas extensas y el impacto ambiental que se genera.

Otro problema en la planificación forestal que puede ser resuelto con el uso de programación lineal es la valoración de recursos no comerciales pero de gran importancia para la sociedad como la producción de agua, la conservación de vida silvestre y el secuestro de carbono. Estos se pueden interpretar como servicios ecosistémicos proveídos por el bosque y que, de alguna manera, requieren de una valoración desde el punto de vista económico (Boyd 2006, Boyland 2006). Paredes & Brodie (1988) y Tarp et ál. (1997) presentan una metodología para evaluar este tipo de recursos que utiliza las bondades de la teoría de la dualidad en la programación lineal. En su trabajo, ellos obtienen curvas de oferta y demanda para bienes y servicios, como la disponibilidad de tierra, la producción de agua libre de sedimentos y la conservación de la vida silvestre, en el marco de la planificación forestal multipropósito.

En este contexto, en la política forestal a nivel público y privado muchas veces existe el gran interrogante de cuánto conservar de los recursos naturales para garantizar la perpetuidad de la base y la diversidad ecológica, sacrificando al mínimo el desarrollo y la producción de bienes y servicios que de ellos se obtiene. El propósito del presente artículo es evidenciar la importancia del uso de la información obtenida a través de la programación lineal en la evaluación del impacto económico de la aplicación de restricciones ambientales, y la valoración de recursos sin información comercial en el proceso de planificación multipropósito de recursos forestales.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA BÁSICA

Un problema básico de planificación forestal consiste en definir recursos, de manera óptima, entre un conjunto de actividades que son mutuamente excluyentes. Un ejemplo podría ser la asignación de tierra entre actividades productivas que entregan diferentes beneficios económicos. Este tipo de problema puede formularse como un problema de maximización del beneficio o minimización de los costos de producción. Siguiendo la formulación de Hillier & Lieberman (2001), el problema de asignación de recursos tendría la siguiente estructura:

$$\textit{Maximice } \; Z = cx \qquad [1]$$

$$\textit{Sujeto a}$$

$$Ax \leq b \qquad [2]$$

$$x \geq 0 \qquad [3]$$

Donde es c un vector de fila

$$c = [c_1, c_2, ..., c_n]$$

x, b y 0 son vectores de columna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Y Z es el valor de la función objetivo.

Retomando la formulación de Dorfman (1951) y Koopmans (1951) citados por Paredes & Brodie (1988), que separan los vectores *c*, *x* y la matriz A en componentes básicos (c_B, x_B, B) y no básicos (c_N, x_N, A_N) y reordenando los términos de la ecuación [2], la primera ecuación fundamental del método simplex se obtiene:

$$x_B = B^{-1}\, b - B^{-1}\, A_N x_N \qquad [4]$$

Ésta muestra las variables en términos de los recursos y las variables no básicas. Expresando el segundo término del lado derecho de la ecuación [4] como sumatoria e incluyendo las restricciones de no negatividad de la ecuación [3], en la ecuación [4], tenemos:

$$x_B = B^{-1}\, b - \sum_{j \in N} B^{-1}\, a_j x_j \geq 0 \qquad [5]$$

Ahora, sustituyendo [5] en [1] y reorganizando los términos, la segunda ecuación principal del método simplex se obtiene:

$$Z = c_B B^{-1}\, b - \sum_{j \in N} (c_B B^{-1}\, a_j - c_j) x_j \qquad [6]$$

Las ecuaciones [5] y [6] son fundamentales para el algoritmo simplex. También proveen la información requerida para el análisis económico del plan de producción identificado como x_B.

Las relaciones producto-producto se obtienen derivando la ecuación [5] con respecto a la variable no básica,

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_B} = -B^{-1}\, a_j \quad j \in N \qquad [7]$$

Ésta muestra los efectos de la sustitución de una variable no básica en una básica. Las relaciones de producto-factor se obtienen derivando la ecuación [5] con respecto a los niveles de recursos, *b*,

$$\frac{\partial x_B}{\partial b} = -B^{-1} \qquad [8]$$

que también se conoce como el *producto físico marginal* de los recursos. Como se observa en la ecuación [8], la base inversa, B^{-1}, contiene toda la información requerida para el análisis de sustitución producto – factor y también para el análisis de intercambio entre productos con información comercial (aquellos en la función objetivo) y aquellos sin ésta (cuya producción es forzada). El valor marginal de los recursos se obtiene derivando la ecuación [6] con respecto al vector de recursos,

$$\frac{\partial Z}{\partial b} = c_B B^{-1} \qquad [9]$$

que también se conocen como los *precios sombra* o *costos de oportunidad* de los recursos. El efecto de las variables no básicas en la función objetivo, se logra derivando la ecuación [6]:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} = c_j - c_B B^{-1} a_j \quad j \in N \qquad [10]$$

En el óptimo $\partial Z / \partial x_j$ es negativo para todo $j \in$ N. Éste, usualmente se reporta como el costo reducido de la j-ésima variable no básica y describe el costo marginal de incrementar x_j. La alternativa óptima es identificada como las variables no básicas para las cuales $\partial Z / \partial x_j = 0$. Con el beneficio marginal igual al costo marginal, la variable se toma en cuenta en el plan de producción. Simultáneamente, el método simplex asigna completamente el beneficio marginal entre todos los recursos utilizados. La siguiente igualdad entonces se mantiene:

$$c_j = c_B B^{-1} a_j \quad j \in B \qquad [11]$$

Que, por la ecuación [9] puede ser escrita como:

$$c_j = \frac{\partial Z}{\partial x_j} a_j \quad j \in N \qquad [12]$$

Esta es una información de mucha importancia ya que representa el nivel más bajo de desagregación en la interpretación económica inmersa en la teoría de la dualidad. El beneficio marginal que una actividad contribuye a la función objetivo, es exactamente asignado entre todos los recursos utilizados por esa actividad. El método simplex entonces, garantiza que los recursos sean asignados óptimamente y que los precios atribuidos a los recursos sean los más eficientes. (Dorfman et ál, 1958, citado por Paredes & Brodie, 1988).

Al realizar variaciones paramétricas al vector de recursos, b, se proporciona una curva de demanda para cada uno de los recursos empleados. (Dorfman, 1951, citado por Paredes & Brodie, 1988). Algunos componentes de b pueden representar requerimientos para producir ciertos niveles de productos no comerciales; en este caso, a través del análisis paramétrico de estos componentes se puede obtener su curva de oferta. (Dantzig, 1963).

El análisis paramétrico es una técnica que consiste en hacer variar los valores de b a una razón θ, manteniendo factible la solución. De acuerdo con Gal (1979), Dantzig (1994), Taha (1998), Hillier & Lieberman (2001), Vanderbei (2001), si b_i es reemplazado por $b_i + \alpha_i \theta$, para $i = 1, 2, \ldots, m$, donde α_i es un vector de columna de constantes conocidas, el problema puede ser planteado como:

$$\textit{Maximice} \qquad Z(\theta) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j-1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + \alpha_i \theta \quad \text{para } i{:}1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,n$$

El objetivo es identificar la solución óptima en función de θ. Con esta formulación, el valor de la función objetivo $Z^*(\theta)$ siempre tiene la forma lineal por partes y cóncava como se ve en el gráfico 1. El conjunto de variables básicas en la solución optima se altera solamente donde la pendiente de $Z^*(\theta)$ cambia.

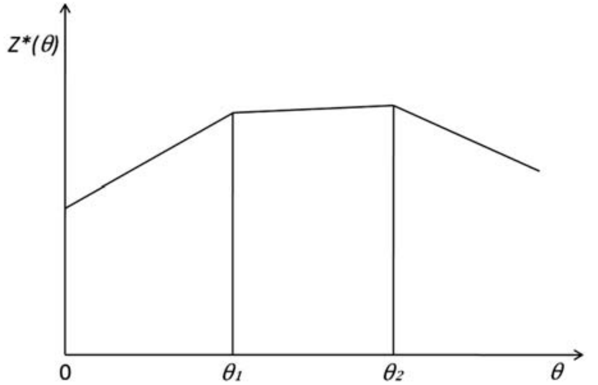


Gráfico 1. El valor de la función objetivo para una solución optima en función de θ en programación lineal paramétrica con cambios sistemáticos en los parámetros de b_i.
Fuente: Hillier & Lieberman (2001)

Los valores de estas variables varían como una función de θ entre los cambios de pendiente. La razón es que al incrementar θ se modifica el vector de recursos en el conjunto de ecuaciones iníciales lo cual entonces, causa diferencias en el vector de recursos en el conjunto de ecuaciones finales. El gráfico 1 representa un problema con tres conjuntos de variables básicas que son óptimas para diferentes valores de θ: el primero, para $0 \leq \theta \leq \theta_1$; el segundo, para $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ y el tercero, para $\theta \leq \theta_2$. Dentro de cada uno de estos intervalos de θ, el valor de $Z^*(\theta)$ varía con θ a pesar de los coeficientes fijos c_j porque los valores de x_j están cambiando.

Para encontrar el rango en el que la solución se mantiene óptima utilizaremos la formulación propuesta por Dantzig (1997). Asumimos que tenemos una solución óptima, tomando el lado derecho de la r-ésima restricción, dado un cambio de dimensión θ sobre el valor del lado derecho actual b_r. Tenemos que:

$$b(\theta) = b + (\theta - b_r)e_r \qquad [13]$$

donde e_r es la r-ésima columna de la matriz de identidad. Si el valor de θ no hace la base actual infactible, entonces la solución básica revisada seguirá siendo óptima. No obstante, si esta es infactible, esto debe resultar en un cambio de la base que requiere que el problema sea resuelto de nuevo. El rango de valores de para el lado derecho de la r-ésima restricción, para la cual la base actual queda factible y de esta manera optima, se obtiene asegurando que la solución $x_B(?)$ para:

$$Bx_B(\theta) = b(\theta) \qquad [14]$$

Es tal que $x_B(\theta) \geq 0$. De [13] y [14] conseguimos:

$$x_B(\theta) = B^{-1}b + (\theta - b_r)B^{-1}e_r = x_B^* + (\theta - b_r)B^{-1}e_r \qquad [15]$$

Donde x^*_B es la solución óptima con $\theta = b_r$. Para la factibilidad necesitamos que $x_B(\theta) \geq 0$, así que el rango de θ es:

$$b_r + \max_{\beta_{ir}>0} \frac{-(x_B^*)_i}{\beta_{ir}} \leq \theta \leq b_r + \min_{\beta_{ir}<0} \frac{-(x_B^*)_i}{\beta_{ir}} \quad [16]$$

Donde β_{ir} es elemento de (i, r) de B^{-1}.

Con cambios entre el rango presentado en [16], la base actual B queda óptima; de cualquier forma, los valores óptimos de la solución básica óptima [15] cambian y los valores óptimos de la función objetivo varían de acuerdo a:

$$Z(\theta) = c_B x_B(\theta) = c_B x_B^* + (\theta - b_r) c_B B e_r = Z^* + (\theta - b_r)\pi_r^* \quad [17]$$

Donde Z^* es el valor actual de la función objetivo primal y π^* son los precios sombra de la solución óptima actual.

Usando notación matricial, el valor de la función objetivo se calcularía de la siguiente forma:

$$Z^* = [\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_m^*] \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{bmatrix} \quad [18]$$

O en sumatoria:

$$Z^* = w^* = \sum_{i=1}^{m} \pi_i^* b_i^* \quad [19]$$

Donde Z^* y w^* en la ecuación [19] son los nuevos valores de la función objetivo del problema primal y dual, respectivamente, π_i^* los precios sombra y b_i^* los valores del vector de recursos.

APLICACIONES EN PLANIFICACIÓN FORESTAL p

Para explicar la importancia de la programación lineal y el análisis paramétrico en la planificación forestal, se utilizará un ejemplo adaptado de Davis & Johnson (1987) que posee las características relevantes de la planificación multipropósito. Este muestra el proceso de planificación cuando se enfrenta el problema de no solo producir bienes comerciales, sino también se obliga al modelo a producir bienes no comerciales. El bosque hipotético está constituido por dos unidades de manejo homogéneas, A y B, que se quieren poner en un plan de producción de productos madereros en un horizonte de 40 años dividido en 4 periodos de planificación de 10 años cada uno. El modelo de programación lineal posee una estructura conocida como tipo I (Johnson & Scheurman 1977). La función objetivo [20] busca maximizar el valor presente neto del bosque a través del horizonte de planificación. Las ecuaciones [21] y [22] muestran la participación marginal en volumen de cada unidad de manejo en el plan de producción y la superficie disponible para llevarlo a cabo respectivamente.

El modelo se encuentra restringido por las ecuaciones [23] y [24] a mantener un volumen de madera en pie mínimo de b_{if} al final del horizonte de planificación. El volumen contenido en la superficie destinada a la conservación de la vida silvestre está incluido en el inventario final de madera. Se adicionó una restricción de flujo no decreciente [26] para garantizar el uso sostenible del bosque. Con esta restricción se obliga a que el volumen cosechado en un período sea mayor o, al menos, igual al del período inmediatamente anterior. Por último, se incorporó una restricción para atender la demanda por la conservación de la vida silvestre. Ésta [25] obliga al modelo a dejar sin intervención, desde el inicio del horizonte de planificación, el área representada por b_c. En la tabla 1 se encuentra una representación numérica del problema de planificación expuesto en las ecuaciones [20] a la [26].

$$Maximice \quad Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} vpm_{ij} x_{ij} \qquad [20]$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij} = v_t \quad \forall_t \qquad [21]$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_i = A_i \quad \forall_i \qquad [22]$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ijT} x_{ij} + v_{iT} x_i = I_f \quad \forall_j \qquad [23]$$

$$I_f \geq b_{if} \qquad [\ 24]$$

$$x_i \geq b_c \qquad [25]$$

$$-v_t + v_{t+1} = b_d \quad \forall_t \qquad [26]$$

Donde:

T : Horizonte de planificación

i : Indicador del área de manejo

j : Indicador de prescripción de cosecha

v_t : Variable para contabilizar el volumen cosechado en la unidad de manejo *i* en el periodo *t*.

x_{ij} : Hectáreas de la unidad de manejo i asignadas a una prescripción de cosecha *j*.

vpn_{ij} : Contribución marginal neta a la función objetivo de la unidad de manejo *i* asignada a una prescripción de cosecha *j*.

v_{ij} : Volumen de madera cosechada en la unidad de manejo *i* cuando la prescripción de cosecha *j* es implementada.

v_{ijT} : Inventario final de madera de la unidad de manejo *i* cuando la prescripción de cosecha *j* es implementada medido al final del horizonte de planificación *T*.

A_i : Área total disponible para la unidad de manejo *i*.

I_f : Variable para contabilizar el inventario final de madera de la unidad de manejo *i* asignada a la prescripción de cosecha *j*.

b_{if} : Inventario final de madera solicitado.

v_{iT} : Inventario final de madera del área de la unidad de manejo *i* dejada en conservación de la vida silvestre, medido al final del horizonte de planificación *T*.

x_i : Área de la unidad de manejo *i* destinada a conservación.

b_c : Área mínima de la unidad de manejo *i* solicitada para conservación.

b_d : Diferencia mínima entre en flujo de madera de un periodo respecto al anterior.

Utilizando el modelo de programación lineal planteado en las ecuaciones [20] a la [26] se obtuvo la asignación óptima de la superficie de las unidades de manejo A y B como se muestra en la ultima fila de la tabla 1. Como se aprecia, toda el área de la unidad de manejo A se asignó a la conservación de la vida silvestre y a satisfacer la restricción de dejar un inventario final de madera, mientras que el área de B casi en su totalidad se asignó a la producción de madera. El volumen producido en cada período alcanzo los 2592.6 m^3 y la función objetivo fue de 21.290.9 dólares.

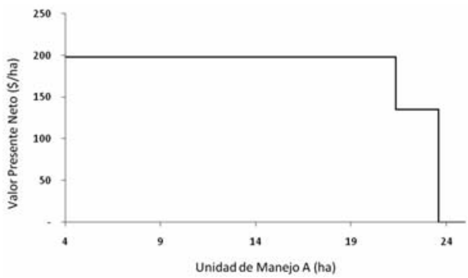
ANÁLISIS PARAMÉTRICO DE LAS RESTRICCIONES DEL MODELO

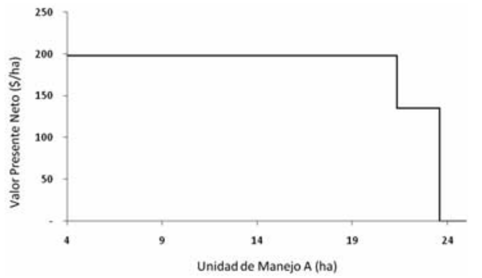
El análisis paramétrico de las restricciones del modelo de planificación forestal mostrado en el ejemplo de la tabla 1, permitió evaluar el efecto de los factores de producción y los bienes no comerciales en la solución óptima del problema de asignación. El gráfico 2 muestra la curva de demanda de la disponibilidad de bosque de las unidades de manejo A y B. Estas curvas de demanda significan el costo que representaría adquirir una hectárea más de bosque, con las mismas características de cada una de las unidades de manejo para adicionarla al plan de producción actual. Como se aprecia en el gráfico 1, existe una diferencia en el valor del bosque de las dos unidades debido al volumen de madera inicial con que cuenta cada una de ellas.

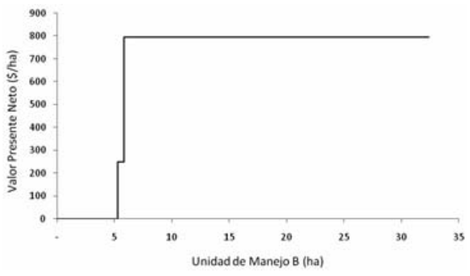
El efecto que tiene destinar área de la unidad de manejo B para la conservación de la vida silvestre se aprecia en el gráfico 3 (A), que visualiza la curva de oferta para este bien. En esta unidad de manejo se pueden llegar a conservar hasta 5.3 hectáreas sin provocar una disminución en el valor de la función objetivo, como se aprecia en el gráfico 3 (B). A partir de esta superficie el costo de destinar una hectárea más, aumentaría considerablemente y se reflejaría en forma simultánea, en la caída de la función objetivo.

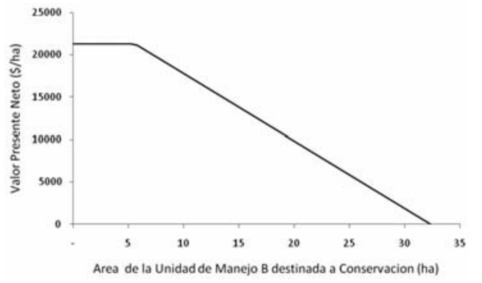
Tabla 1. Formulación numérica del problema de planificación forestal.

Fila		Actividades										Control de Volumen					Vector Recursos
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_c	B_1	B_2	B_3	B_4	B_c	V_1	V_2	V_3	V_4	I_f	
Objetivo		3.7	-241.8	-365.4	-423		1788.3	38.1	183.5	-133.3							Maximice VNP
Contabilización del volumen cosechado	V_1	58					233					-1					= 0
	V_2		76					291					-1				= 0
	V_3	41		87			41		338					-1			= 0
	V_4	175	41		93		175	41		379					-1		= 0
Inventario Final	I_f	-	29	-	-	93	-	29	-	-	379					-1	= 0
Flujo no decreciente	V_2											-1	1				= 0
	V_3												-1	1			= 0
	V_4													-1	1		= 0
Inventario Final	I_f															1	= 3776
Área conservación	A_c					1											= 4
	B_c										1						= 4



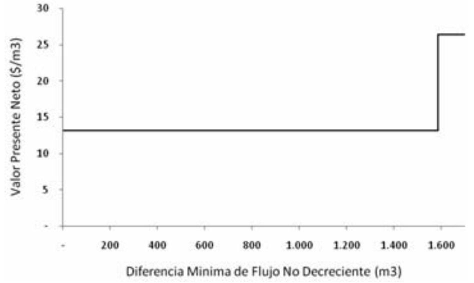


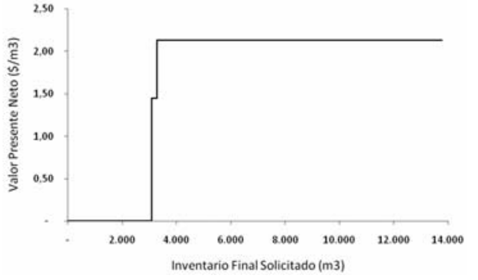




Otra información importante que se puede obtener del análisis paramétrico es la incidencia de las restricciones ambientales en el plan de producción, como es la de mantener un flujo no decreciente en el tiempo. El gráfico 4 (A) muestra el comportamiento del costo de esta restricción. Al obligar al modelo a guardar una diferencia mínima entre el volumen cosechado en un período y el inmediatamente anterior se acarrea un costo en el plan de producción. Este impacto se representa por la curva en el gráfico 4 (A).

El efecto de cumplir con la restricción de dejar un volumen final de madera en pie se observa en el gráfico 4 (B). El plan de producción actual considera dejar un volumen en pie de 3776 m^3. Como se ve en el gráfico, cumplir con este implica un costo de 2.13 \$/m^3, que se descuenta del valor total de la función objetivo.





CONCLUSIONES

La información económica generada en la solución del problema de programación lineal, puede emplearse de muchas maneras. En el ejemplo expuesto, se utilizó esta información para la evaluación de las restricciones que promueven el manejo sostenible de los bosques. Con el establecimiento de las restricciones de flujo no decreciente y de inventario final, se asegura el uso racional de los recursos forestales durante el horizonte de planificación y se garantiza la permanencia de la base ecológica del bosque.

Por otro lado, se obtuvieron curvas de demanda de la disponibilidad de tierra para las unidades de manejo forestal evaluadas; de esta manera, se suministra información valiosa en cuanto a la participación de cada hectárea de tierra en el plan de producción. Esta información es muy importante como apoyo a la toma de decisiones acerca del aumento del patrimonio forestal en las empresas públicas y privadas.

El análisis de la información económica también puede utilizarse para la valoración de recursos forestales en programas de conservación de la vida silvestre. En el ejemplo expuesto anteriormente, se obtuvo la curva de oferta para este recurso. Esta información es de gran valor para agencias públicas y privadas encargadas del desarrollo de políticas de conservación de recursos naturales. Obtener una curva de oferta para estos recursos, es el primer paso para establecer un programa de incentivos o pagos por los servicios prestados por estos recursos. El siguiente paso sería llegar a un consenso como sociedad, para establecer cuánto estamos dispuestos a pagar por su conservación y de esta manera tratar de resolver el interrogante planteado inicialmente en este artículo, de cuánto conservar de los recursos naturales para garantizar la perpetuidad de la base y la diversidad ecológica sin sacrificar el desarrollo y la producción de bienes y servicios que de ellos se obtiene.

En el actual escenario forestal colombiano es de gran relevancia la revisión e implementación de herramientas matemáticas en el proceso de planificación forestal a cargo de los entes oficiales y privados. La construcción de los planes de manejo de recursos forestales, debe enmarcarse en la planificación multipropósito que no solo debe tener en cuenta la satisfacción de la demanda por productos madereros en el corto plazo sino también asegurar la permanencia de este negocio en el tiempo. Además, el manejo forestal de los bosques debe atender la demanda por otro tipo de productos y servicios como la producción de agua, la recreación y la conservación de la vida silvestre, entre los múltiples beneficios que un bosque genera, así como tener la capacidad de cuantificarlos económicamente.

REFERENCIAS

BERCK, P., BIBLE, T. 1984. Solving and interpreting large-scale harvest scheduling problems by duality and decomposition. For. Sci. 30(1):173-182.

BOSTON, K., SESSIONS, J. 2006. Development of a spatial harvest scheduling system to promote the conservation between indigenous and exotic forests. International forestry review. 8(3):297-306.

BOYD, J. 2006. The nonmarket benefits of nature. Resources for the future. Washington. 20 p.

BOYLAN, M. 2006. The economics of using forest to increase carbon storage. Can. J. For. Res. 36: 2223-2234.

DANTZIG G. 1963. Linear programming and extensions. Princeton Univ. Press, N J. 615 p.

DAVIS, L., JOHNSON, K. N. 1987. Forest management. 3th ed. McGraw-Hill, New York. 790 p.

DIAZ-BALTEIRO, L., ROMERO, C. 1998. Modeling timber harvest scheduling problems with multiple criteria: An application in spain. For. Sci. 44(1):47-57.

DORFMAN, R. 1951. Application of linear programming to the theory of the firm. Univ. Calif. Press. 98 p.

DORFMAN, R., SAMUELSON, P., SOLOW, M. 958. Linear programming and economic analysis. McGraw-Hill, New York. 133 p.

FIELD, R.., DRESS, P., FORTSON, J. 1980. Complementary linear and goal programming procedures for timber harvest scheduling. For. Sci. 26(1):121-133.

GAL, T. 1979. Postoptimal analyses, parametric programming, and related topics. McGraw-Hill. New York. 380 p.

GUNN, E., RICHARDS, E. 2005. Solving the adjacency problem with stand-centred constraints. Can. J. For. Res. 35: 832–842.

HILLIER F, LIEBERMAN, G. 2001. Introduction to operations research. 7a ed. McGraw-Hill. New York. 1214 p.

HOF, J., PICKENS J, BARTLETT E. 1986. A MAXMIN approach to non declining yield timber harvest scheduling problems. For. Sci. 32(3): 653-666.

HOWARD, M., BORGES, J. 2000. Impacts of the time horizon for adjacency constraints in harvest scheduling. For. Sci. 46(2):176-187.

JOHNSON, K.N., SCHEURMAN, H.L. 1977. Techniques for prescribing optimal timber harvest and investment under different objectives—discussion and synthesis. Forest Sci Monogr 18, 31p.

JONES, J., MENEGHIN, B., KIRBY, M. 1991. Formulating adjacency constraints in linear optimization models for scheduling projects in tactical planning. For. Sci. 37(5):1283-1297.

KOOPMANS, T. 1951. Activity analysis of production and allocation. Cowles Comission Monogr. No. 13. John Wiley & Sons, NY. 404 p.

LIITTSCHWAGER, J.M., TCHENG, T. H. 1967. Solution of a large-scale forest scheduling problem by linear programming decomposition. Journal of Forestry. Sept. 644-646.

MCDILL, M., REBAIN S, BRAZE J. 2001. Harvest scheduling with area-based adjacency constraints. For. Sci. 48(4):631–642.

MCDILL, M., BRAZE, J. 2001. Using the branch and bound algorithm to solve forest planning problems with adjacency constraints. For. Sci. 47(3):403–418.

MCDILL, M., BRAZE, J. 2000. Comparing adjacency constraint formulations for randomly generated forest planning problems with four age-class distributions. For. Sci. 46(3):423–436.

MCQUILLAN, A. 1986. The Declining Even Flow Effect-Non Sequitur of National Forest Planning. For. Sci. 32(4):960-972.

MURRAY, A. T. 1999. Spatial restrictions in harvest scheduling. For. Sci. 45(1):45-52.

NAVON, D. 1971. Timber RAM… a long-range planning method for commercial timber lands under multiple-use management. USDA Forest Service. California. 30 p.

PAREDES G., BRODIE, J. D. 1988. Activity analysis in forest planning. For. Sci. 34(1):3-18.

PARRY B., VAUX H, DENNIS N. 1983. Changing conceptions of sustained-yield policy on the national forests. J. For. 81:150-154.

TAHA, H. 1998. Investigación de operaciones: Una introducción. 6ª ed. Trad. G. Meza y R. Cruz. Prentice-Hall. México. 916 p.

TARP, P., PAREDES, G., HELLES, F. 1997. A dual approach to policy analysis in multiple-use forest management planning. Can. J. For. Res. 27: 849-858.

TEDDER, P. 1980. A Recursive Approach to Include Complex Demand Equations in Economic Harvest Scheduling. For. Sci. 26:369-373.

VANDERBEI, R. 2001. Linear programming: Foundations and extensions. 2ª edition. Department of operation research and financial engineering. Princeton University. Princeton. 467 p.

WALKER J. L. 1971. An economic model for optimizing the rate of timber harvesting. PhD thesis, Univ Wash, Seattle. 117 p. (Diss Abstr 32(5):2276-A. Univ Microfilms 71-28489.)

WALTERS K., FEUNEKES U., COGSWELL A., COX E. 1999. A forest planning system for solving spatial harvest scheduling problems. CORS National Conference, Ontario. 8 p.

WEINTRAUB A., BARAHONA F., EPSTEIN R. 1994. A column generation algorithm for solving general forest planning problems with adjacency constraints. For. Sci. 40(1):142-161.

Referencia	Fecha de recepción	Fecha de aprobación
LÓPEZ A., A. M.; BARRIOS T., A. Programación lineal y análisis paramétrico en planificación forestal. *Revista Tumbaga (2007), 2, 124-137.*	**Día/mes/año** 03/04/2007	**Día/mes/año** 09/07/2007