Suma n-ésima de los coeficientes polinomiales en una función generatriz

Nth sum of polynomial coefficients in a generating function

RESUMEN
En este trabajo se muestra un resultado sobre los coeficientes de las funciones polinómicas hacia las cuales convergen cierto tipo de series infinitas. Dicho resultado está relacionado con una expresión para obtener la suma n-ésima de dichos coeficientes y la demostración de su validez.

PALABRAS CLAVES: Coeficientes polinomiales, función generatriz, suma n-ésima.

ABSTRACT
In this work we show a result about the coefficients of the polynomial functions which converge toward a certain type of infinite series. This result is related to an expression for the nth sum of these coefficients and demonstration of its validity.

KEYWORDS: *Polynomial coefficients, generating function, nth sum.* .

OSCAR FERNÁNDEZ S.
Licenciado en Matemáticas, M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
oscarf@utp.edu.co

LORENZO MARTÍNEZ H.
Licenciado en Matemáticas, Mg.
Profesor Asistente
Universidad de Caldas
ljmarti69@hotmail.com

ALVARO SALAS S.
Matemático, M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad de Caldas
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
asalash2002@yahoo.com

1. INTRODUCCIÓN

Se sabe que en el desarrollo del binomio $(x+a)^n$ se encuentran ciertos coeficientes llamados *coeficientes binomiales*, los cuales se denotan como $\binom{n}{k}$, que en realidad es una manera de representar los cocientes $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para k = 0, 1,…, n. Este hecho se expresa simbólicamente como $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$.

Estos coeficientes forman el llamado Triángulo de Pascal, cuyas primeras filas, aparecen enseguida en la figura 1.

										Suma
1										1
1	1									2
1	2	1								4
1	3	3	1							8
1	4	6	4	1						16
1	5	10	10	5	1					32
1	6	15	20	15	6	1				64
1	7	21	35	35	21	7	1			128
1	8	28	56	70	56	28	8	1	⋯	256
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fig. 1 Triángulo de Pascal generado por los coeficientes binomiales y la suma de sus filas

1.1 El triangulo de Pascal y la suma de sus filas

Fecha de Recepción: Enero 26 de 2010
Fecha de Aceptación: Marzo 25 de 2010

Otro detalle que se observa en la columna derecha de la figura 1 son las sumas de las primeras filas del triangulo de Pascal, por ejemplo la suma de los términos de la fila 7, esto es, 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 +1 = 64 = 2^6. En general para la fila n, es decir los coeficientes en el desarrollo del binomio a la n, se puede demostrar que

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

simplemente sustituyendo x = 1 y a = 1 en la fórmula del binomio.

1.2 Series de potencias y función generatriz

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y sea la serie de potencias $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, si resulta que ésta serie converge absolutamente en cierto intervalo (-R, R) y además se conoce la expresión de g(z), entonces se puede evaluar la función y cualquiera de sus derivadas en valores de z que satisfagan $|z| < R$. A la función g(z) se le conoce como función generatriz de la sucesión $\{a_n\}$ y esta función define la transformada geométrica de a_n denotada $Z[a_n]$ = g(z). Un ejemplo clásico que sirve de base para obtener otras series de potencias a partir de sus derivadas es la función generatriz o transformada geométrica de la sucesión $\{a_n\} = \{1, 1, 1, 1, 1,...\}$. Esto es,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty}\frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}, \text{ si } |z| < 1.$$

Se tiene entonces el siguiente resultado básico

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}; \text{ si } |z| < 1 \qquad (1)$$

Se puede obtener la función generatriz para otras sucesiones a partir de esta simplemente derivando con respecto a z y luego multiplicando por z a ambos lados de la igualdad. Así, si se deriva (1) y se multiplican ambos miembros por z, se obtiene,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}; \text{ si } |z| < 1. \qquad (2)$$

Al derivar (2) y multiplicar por z,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}; \text{ si } |z| < 1. \qquad (3)$$

Si se deriva (3) y se multiplica por z,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z^3+4z^2+z}{(1-z)^4}; \text{ si } |z| < 1. \qquad (4)$$

Derivando (4) y multiplicando por z,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n = \frac{z^4+11z^3+11z^2+z}{(1-z)^5}; \text{ si } |z| < 1. \qquad (5)$$

A partir de los resultados (1) a (5) se puede conjeturar una fórmula genérica para las funciones generatrices de la forma $\{a_n\} = \{n^k\}$, es decir una fórmula genérica para la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}\sum_{m=1}^{k} a_{km} z^m; \; k = 1, 2, \cdots; \text{ si } |z| < 1. \qquad (6)$$

Los coeficientes $a_{k1}, a_{k2}, \cdots; a_{km}$ son constantes a determinar explícitamente. En un trabajo anterior [1], se demuestra la validez de la expresión (6), se obtiene una fórmula para determinar los coeficientes asociados de manera explícita, así mismo se muestra que estos coeficientes forman un triángulo numérico. En este trabajo se demuestra que la suma de los términos en cada fila del triangulo numérico mencionado arriba es un factorial.

2. CONTENIDO

2.1 Coeficientes Polinomiales y un triangulo numérico

Teorema 1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ converge para $|z| < 1$ a $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}\sum_{m=1}^{k} a_{km} z^m$; $k = 1, 2,\ldots$ con $a_{km} = (k-m+1)a_{(k-1)(m-1)} + ma_{(k-1)m}$.

Demostración. Ver [1]

Los coeficientes a_{km} obtenidos mediante la expresión $(k-m+1)a_{(k-1)(m-1)} + ma_{(k-1)m}$ para los polinomios de z en los numeradores del lado derecho de la igualdad cada vez que se deriva y se multiplica por z forman un triángulo numérico como el de la Fig. 2

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & 1 & 0 & & & \\
 & & 0 & 1 & & 4 & & 1 & 0 & & \\
 & 0 & 1 & 11 & & & & 11 & 1 & 0 & \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & & & \cdots & & & & & a_{km}
\end{array}$$

Fig. 2 Triángulo numérico generado por los coeficientes a_{km}

Cada fila k del triángulo es obtenida con los términos de la fila anterior k–1 así: En la fila k hay k+2 números incluyendo los ceros de los extremos y en la fila k-1 hay k+1 números de la forma $a_{(k-1)0}, a_{(k-1)1}, a_{(k-1)2} \cdots a_{(k-1)(k-1)}, a_{(k-1)k}$ y se tiene que $a_{km} = (k-m+1)a_{(k-1)(m-1)} + ma_{(k-1)m}$ para $m = 1, 2,\ldots, k$ con $a_{(k-1)0} = a_{(k-1)k} = 0$. Por ejemplo si se quieren obtener los coeficientes de la quinta fila el procedimiento es el siguiente: Los términos de la fila 4 son $a_{41} = 1$, $a_{42} = 11$, $a_{43} = 11$, $a_{44} = 1$. Con estos se obtiene los términos de la fila 5 considerando que $a_{40} = a_{45} = 0$. De modo que

$$a_{51} = (5-1+1)a_{40} + a_{41} = 5(0) + 1 = 1,$$
$$a_{52} = (5-2+1)a_{41} + 2a_{42} = 4(1) + 2(11) = 26,$$
$$a_{53} = (5-3+1)a_{42} + 3a_{43} = 3(11) + 3(11) = 66,$$
$$a_{54} = (5-4+1)a_{43} + 4a_{44} = 2(11) + 4(1) = 26,$$
$$a_{55} = (5-5+1)a_{44} + 5a_{45} = 1(1) + 5(0) = 1.$$

2.2 El triangulo numérico y la suma de sus filas

Una propiedad interesante de este Triángulo se tiene en el siguiente teorema.

Teorema 2. La suma de los términos de la n–sima fila del triángulo numérico anterior es igual a n!, es decir, $\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = n!$; donde los términos a_{nk} son de la forma $a_{nk} = (n-k+1)a_{(n-1)(k-1)} + ka_{(n-1)k}$ con $a_{n1} = a_{nn} = 1$.

Demostración. Para el caso n = 1, se tiene 1 = 1!; para n = 2, 1 + 1 = 2 = 2!; para n = 3, 1 + 4 + 1 = 6 = 3!. Supóngase que se cumple hasta el caso n – 1. Esto es, $\sum_{k=1}^{n-1} a_{(n-1)k} = (n-1)!$. Con esta hipótesis en mente considérese ahora el caso siguiente a n – 1. Para esto, obsérvese que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = a_{(n-1)1} + [(n-1)a_{(n-1)1} + 2a_{(n-1)2}] + [(n-2)a_{(n-1)2} + 3a_{(n-1)3}] + \cdots$$

$+[2a_{(n-1)(n-2)} + (n-1)a_{(n-1)(n-1)}] + a_{(n-1)(n-1)}$. Al reagrupar esta expresión se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = [a_{(n-1)1} + (n-1)a_{(n-1)1}] + [2a_{(n-1)2} + (n-2)a_{(n-1)2}] + \cdots + [(n-1)a_{(n-1)(n-1)} + a_{(n-1)(n-1)}]$$

De modo que factorizando los dos sumandos en cada corchete se obtiene

$$[a_{(n-1)1} + (n-1)a_{(n-1)1}] + [2a_{(n-1)2} + (n-2)a_{(n-1)2}] + \cdots + [(n-1)a_{(n-1)(n-1)} + a_{(n-1)(n-1)}] = n\sum_{k=1}^{n-1} a_{(n-1)k}$$

$$= n(n-1)!$$

$$= n!$$

Y se ha demostrado que la suma de los términos de la n–sima fila del triángulo numérico generado con los términos a_{nk} mediante una expresión de la forma $a_{nk} = (n-k+1)a_{(n-1)(k-1)} + ka_{(n-1)k}$ con $a_{n1} = a_{nn} = 1$ es igual a n!. □

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha logrado hacer una analogía con un hecho ligado al desarrollo de la potencia n-ésima de un binomio. La analogía es el hecho que es posible determinar la suma de los términos en una fila cualquiera del triángulo numérico de la Fig. 2, mediante la expresión $\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = n!$ que involucra los coeficientes polinómicos a_{nk} generados con la fórmula $a_{nk} = (n-k+1)a_{(n-1)(k-1)} + ka_{(n-1)k}$ con $a_{n1} = a_{nn} = 1$.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] Fernández, O., Martínez, L., Salas A. Coeficientes Polinomiales para Funciones Límite de Series de Potencias, una Analogía con el Triángulo de Pascal. Revista Scientia et Technica No. 43. Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, 2009.

[2] Apostol T. Calculus volumen I. Editorial Reverté. 1977.

[3] Grimaldi R. Matemáticas discreta y combinatoria. Pearson Editores. 1997.

[4] Jiménez, R. Gordillo, E., Rubiano, G. Teoría de números para principiantes. Universidad Nacional de Colombia 1999.

[5] Luque, C. Mora, L., Torres, J. Una construcción de los números reales positivos. Universidad Pedagógica Nacional. 2004.

[6] Ross, K., Wright, R. Matemáticas Discretas. Prentice-Hall. Hispanoamericana S.A. 1990.

[7] Spivak, M. Calculus, Cálculo infinitesimal. Editorial Reverté, s.a. 1977.

[8] Vinogradov, I. Fundamentos de la teoría de los números. Editorial Mir.1977.