

# CONSTRUCCION DE MODELOS DE COMPETENCIA ARTIFICIALES QUE EXHIBEN LA BIFURCACIÓN ZIP.

## Construction of artificial models of competition that exhibit bifurcation Zip.

### RESUMEN

En el presente artículo de investigación se exhibe un modelo artificial a partir de la combinación lineal de un modelo natural y un modelo degenerado que presenta el fenómeno de la bifurcación de Zip para un sistema tridimensional no lineal de ecuaciones diferenciales que satisface las condiciones planteadas por [1, 3] las cuales modelan la competición de dos especies predatoras por una presa singular que se regenera. Esta construcción es interesante ya que los modelos artificiales no son muy abundantes en la literatura relacionada con la bifurcación Zip.

**PALABRAS CLAVES:** Respuesta funcional, modelo natural, modelo artificial, modelo degenerado

### ABSTRACT

*In the present investigation article one exhibits an artificial model from the linear combination of a natural model and a degenerated model that the phenomenon of the bifurcation of Zip for nonlinear a three-dimensional system of differentials equations that satisfy the conditions raised by [ 1, 3 ] which model to the competition of two species of predator by a singular prey that regenerates. This construction is interesting since the artificial models are not very abundant in the Literature related to the bifurcation zip.*

**KEYWORDS:** *Functional response, natural model, artificial model, degenerated.*

CARLOS MARIO ESCOBAR  
CALLEJAS

Profesor Asistente, Magíster en Matemáticas  
Ingeniero Civil  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
ccescobar@utp.edu.co

JOSÉ RODRIGO GONZALEZ  
GRANADA

Profesor Asistente, Ph.D  
Matemático  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
jorodryy@utp.edu.co

### 1. Introducción

La respuesta funcional del predador hace alusión a la forma como responden los predadores a variaciones de la cantidad de presa modificando el consumo habitual de la presa por cada predador. Para el caso de dos especies predatoras compitiendo por una presa que se regenera, el siguiente modelo ha sido considerado por varios autores [1-4]

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \gamma s g(s, k) - x_1 p(s, a_1) - x_2 p(s, a_2), \\ \dot{x}_1 &= x_1 p(s, a_1) - p(\lambda, a_1) x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2 p(s, a_2) - p(\lambda, a_2) x_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde

$$p(s, a) = \frac{s}{a + s}; g(s, k) = 1 - \frac{s}{k},$$

donde  $s(t)$  representa la población de especie de la presa y  $x_1(t); x_2(t)$  describen las poblaciones de las especies predatoras que compiten por la presa;  $p(s, a_i); i = 1, 2$ ; representa la tasa de nacimiento o respuesta funcional  $i$ ; y  $g(s, k)$  es la resistencia ambiental logística del medio al crecimiento de la presa.

Las constantes  $\gamma$ ;  $d_i > 0$ , son la tasa de crecimiento maximal de la presa y la tasa de muerte de la especie predadora  $i$ ; respectivamente, y  $a_i > 0$ ; representan los parámetros de escala en la respuesta funcional del predador  $i$ . En este modelo las constantes  $d_i$  representan la tasa natural de muerte de cada predador

$$d_i = p(\lambda, a_i), \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

y  $\lambda$ , es un parámetro umbral que se introducen teniendo el siguiente significado:  $x_i$  se incrementa si y solo si  $s > \lambda$ ; según sea  $x_i$  positivo, llegando a ser cero en  $s = \lambda$ . En [7] se introduce un tipo de clasificación de la respuesta funcional en modelos del tipo (1) como modelos naturales, artificiales y degenerados teniendo en cuenta la dominancia de las especies predatoras en la dinámica del sistema. Si suponemos que el sistema satisface las condiciones Butler-Farkas [6,7] y adicionalmente la condición

$$\begin{aligned} a_1 > a_2 > 0, \\ p(s, a_1) < p(s, a_2), \quad \forall s > 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

y el modelo es natural uno espera que la especie uno sea r-estratega y gane la competencia al k-estratega motivo por el cual este tipo de modelos se consideran de mayor interés sobre los modelos llamados degenerados y artificiales en dinámica de poblaciones; lo cual puede explicar en parte la escasa literatura de modelos artificiales y degenerados, sin embargo en [5] el autor a mostrado una conexión entre la dinámica de los modelos

naturales y artificiales con la dinámica de los modelos degenerados en el caso de la bifurcación Zip. En el presente artículo se muestra una nueva conexión en el sentido de que es posible construir modelos artificiales a partir de combinación de modelos naturales y degenerados.

## 2. Clase de modelos

La clase de modelos bajo nuestra consideración, serán divididos en tres subclases de acuerdo con la siguiente definición:

*Definición 2.1* Se dice que el modelo (1) bajo las condiciones de Butler-Farkas [6,7] es natural, artificial, o degenerado respectivamente si:

$$Tm(s, a_1, a_2) = \frac{\partial \left( \frac{p(s, a_2)}{p(s, a_1)} \right)}{\partial s} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \\ = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

respectivamente. La primera ecuación de (2.1) significa por continuidad, que el cociente de las tasas de nacimiento (la cual es por (1.3), más grande que la unidad) decrece en un entorno de  $s = \lambda$ , es decir la ventaja de la especie dos sobre la uno expresada por (1.3) decrece a medida que la presa se incrementa; que es lo que usualmente se espera que suceda. La segunda desigualdad de (2.1) significa que la ventaja de la especie dos sobre la uno expresada por (1.3) se incrementa a medida que la presa se incrementa.

Especial caracterización puede hacerse en el caso en que el modelo es del tipo natural, y

$$p(\lambda, a_1) < p(\lambda, a_2), \quad (2.2)$$

ya que si se tiene la desigualdad contraria trivialmente el predador dos saca de competencia al predador uno. Teniendo en cuenta (1.3) y la desigualdad (5) se tiene que:

$$\frac{p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)} < 1, \tag{2.2}$$

Por lo tanto, para  $s > \lambda$ , aplicando la primera condición de (2.1) se tiene que:

$$\frac{p(s, a_1)}{p(s, a_2)} > \frac{p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)}$$

$$\frac{p(s, a_1)}{p(\lambda, a_1)} > \frac{p(s, a_2)}{p(\lambda, a_2)}. \tag{2.3}$$

La última condición muestra que en éste caso, el predador uno tiene mayores tasas de crecimiento relativo que el predador dos. Farkas [4] ha caracterizado a la especie uno como un r-estratega, ya que su estrategia de supervivencia se basa en el mantenimiento a lo largo del tiempo de altas tasas de crecimiento relativo. Mientras en la especie dos, de las condiciones Butler-Farkas [6,7] se deduce fácilmente que hace un uso más eficiente e inteligente de la energía pues requiere menos cantidad de presa para mantener iguales tasas de nacimiento que la especie uno, por ésto Farkas [4] ha llamado a este predador un k-estratega.

### 3. Modelos en la literatura de la bifurcación Zip

Los siguientes son los modelos de respuesta funcional del predador que satisfacen las condiciones Butler-Farkas [6,7] que se conocen en la literatura del tema satisfaciendo las condiciones anteriores:

$$p(s, a) = \frac{A}{Ba + C} \frac{s}{s + a}, \tag{tipo Holling}$$

$$p(s, a) = \frac{A}{Ba + C} \left( 1 - \exp\left(\frac{-s}{a}\right) \right), \tag{tipo Ivlev}$$

$$p(s, a) = \frac{A}{Ba + C} s^q, \tag{tipo Rosenzweig}$$

Donde

$$A > 0, B \geq 0, 0 < q < 1,$$

$$C \in R.$$

Los modelos tipo Holling e Ivlev son modelos naturales, mientras que el modelo tipo Rosenzweig es un modelo degenerado.

### 4. Modelo Original del tipo Exponencial algebraico.

A continuación se exhiben modelos numéricos artificiales como combinación de modelos naturales tipo Holling y modelos degenerados tipo Rosenzweig. Estos modelos se construyen como casos particulares de una clase de modelo en dinámica de poblaciones del tipo exponencial algebraico el cual es una generalización del modelo tratado por varios autores en [1-4]. éste parte de la hipótesis, de que el ecosistema consiste de tres especies; dos predadores y una presa singular, la cual se regenera. En este modelo se nota el punto encima de la letra como diferenciación con respecto al tiempo.

$$\dot{s} = \gamma g(s, k) - \sum_{i=2}^n p(s, a_i) x_i$$

$$\dot{x}_i = p(s, a_i) x_i - d_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$g(s, k) = \left( 1 - \left( \frac{s}{k} \right)^m \right),$$

$$p(s, a_i) = \left( \frac{As^n}{Ba_i^r + D} + \frac{cqs}{(a_i^{-v} + F)(qs + a_i)} \right), \tag{4.1}$$

$$\left( \begin{array}{l} m > 0, k > 0, s \geq 0, a_i > 0, A \geq 0, c \geq 0, \\ B > 0, F \geq 0, v \leq 0, q \geq 0, 0 \leq n \leq 1 \end{array} \right),$$

donde  $p(s, a_i)$  representa la tasa de nacimiento o respuesta funcional del predador  $i$  como una combinación lineal de la respuesta funcional tipo Holling y tipo Rosenzweig generalizadas,  $g(s, k)$  significa la resistencia ambiental del medio al crecimiento de la presa tipo Gilpin y  $a_i$  representan los parámetros de escala en la respuesta funcional del predador  $i$ . Las demás variables y parámetros tienen idéntico significado que en el sistema (1.1). Se presume además que en el modelo se ha mostrado que la tasa de desarrollo de la presa  $g$  y la respuesta funcional del depredador  $p$  son funciones arbitrarias que satisfacen ciertas condiciones naturales denominadas de Butler-Farkas [6,7] las cuales son condiciones suficientes para la existencia de la bifurcación de zip en esta clase de modelos [5]

La expresión (2.1) para el modelo propuesto adopta la forma

$$Tm(s, a_1, a_2) = \frac{\left( \frac{As^n}{a_1^r B + D} + \frac{Cqs}{(a_1^r + F)(sq + a_1)} \right) \left( \frac{Ans^{n-1}}{a_2^r B + D} + \frac{Cqa_2^{v+1}}{(Fa_2^v + 1)(sq + a_2)} \right)}{\left( \frac{As^n}{a_1^r B + D} + \frac{Cqs}{(a_1^{-v} + F)(sq + a_1)} \right)^2} - \frac{\left( \frac{As^{n-1}}{a_1^r B + D} + \frac{Cqa_1^{v+1}}{(Fa_2^v + 1)(sq + a_1)^2} \right) \left( \frac{As^n}{a_2^r B + D} + \frac{Cqs}{(a_2^{-v} + F)(sq + a_2)} \right)}{\left( \frac{As^n}{a_1^r B + D} + \frac{Cqs}{(a_1^{-v} + F)(sq + a_1)} \right)^2}$$

En el modelo tipo Rosenzweig,  $C = 0$ , en el espacio de parámetros del modelo lo que implica  $Tm(s, a_1, a_2) = 0$ , lo que muestra que los modelos tipo Rosenzweig son en efecto modelos degenerados. Si  $A = 0$ , en el espacio de parámetros en la respuesta funcional tipo Holling se tiene que:

$$Tm(\lambda, a_1, a_2) = -\frac{a_1^{-v} a_2^v (a_1 - a_2) q (Fa_2^v + 1)}{(Fa_2^v + 1)(\lambda q + a_1)^2} < 0,$$

lo cual demuestra que los modelos tipo Holling son modelos naturales. Para considerar modelos artificiales se considera, entre una de las muchas posibilidades del modelo hallado, la definida por los valores de los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} A = 1; B = 1; D = 1; C = 1; \\ F = 0; m > 0; 0 < n < 1; \\ u = 0; v = 0; \lambda = 10; \gamma = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

$$d_1 = \frac{4 + 4^n 5^{n+1} + 4 \times 5^r}{5(1 + 5^r)};$$

$$d_2 = \frac{40 + 21 \times 2^{2n} 5^n}{42}.$$

Realizando la gráfica (1) de  $Tm(n, r)$  como función de los parámetros  $n, r$  y considerando los demás como aparecen en (9) se tiene  $Tm(n, r)$  igual a:

$$Tm(\lambda, a_1, a_2) = \frac{-64 + 20^n \left( \frac{-1}{250} + \frac{1}{441(1+5^r)} + \left( \frac{1}{50} - \frac{1}{21(1+5^r)} \right) n \right)}{\left( \frac{4}{5} + \frac{20^r}{1+5^r} \right)^2}$$

Como se puede observar de la gráfica [4.1] existe un subdominio del cuadrante positivo  $n - r$  con la restricción de parámetros mostrada arriba, donde  $Tm(n, r) > 0$ , lo que muestra la existencia de modelos numéricos artificiales en un dominio amplio del espacio de parámetros. Analíticamente puede demostrarse con la restricción de parámetros mostrada arriba que si

$$.5 \leq n \leq 1,$$

$$.5 \leq r,$$

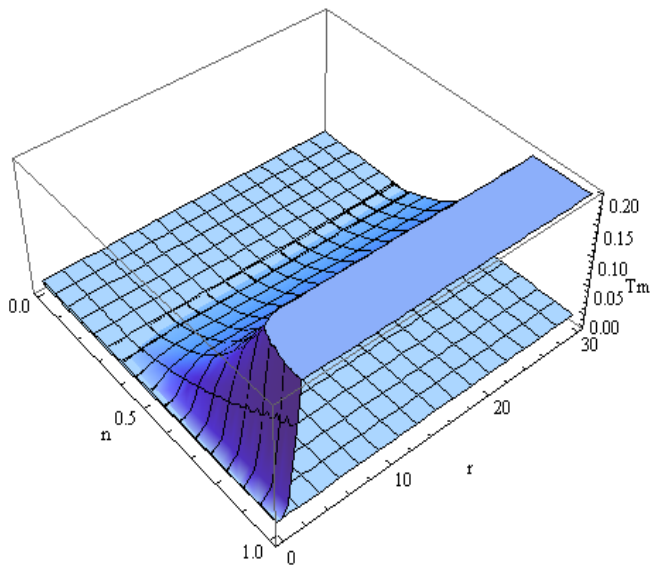
entonces

$$Tm(n, r) < 0, \text{ si } n = 0, r \geq 0.5$$

$$Tm(n, r) > 0, \text{ si } n = 1, r \geq 0.5$$

$$\frac{\partial Tm(n, r)}{\partial n} > 0, \text{ si } 0 \leq n \leq 1, 0.5 \leq r,$$

lo que demuestra que  $Tm(n, r) > 0$ , en el espacio de parámetros  $0 \leq n \leq 1, 0.5 \leq r$ , con las restricciones dadas en (9).



[Figura 4.1]

## 5. CONCLUSIÓN GENERAL

Se ha construido modelos artificiales que exhiben la bifurcación de Zip como combinación lineal de modelos naturales tipo Holling y modelos tipo Rosenzweig los cuales son escasos en la literatura sobre el tema y se muestra la existencia de una conexión entre los modelos artificiales y naturales con los modelos degenerados que tradicionalmente son considerados de poco interés.

**4. AGRADECIMIENTOS:** Agradecimiento al Profesor Miklós Farkas por su amable y acertada orientación en esta investigación

## 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] KOCH A. Coexistence resulting from an alteration of density dependent and density independent growth. *J. theoret. Biol.* 44: 373-386. 1974a.
- [2] SMITH, H. L. The interaction of steady state and Hopf bifurcations in a two predator-one prey competition model, *SIAM J. appl. Math.* 42: 27-43. 1982.

[3] WILKEN D. R. Some remarks on a competing predators problem, *SIAM J. appl. Math.* 42: 895-902. 1982.

[4] FARKAS, M. “Zip bifurcation in a competition model, *Nonlinear analysis*”. *TMA* 1984, vol 8. p. 1295-1309.

[5] C. ESCOBAR, Modelo original de tipo exponencial algebraico que exhibe la bifurcación zip. Tesis Mg. Universidad de Antioquia, 2003.

[6] BUTLER, G. J. Competitive predator-prey systems and coexistence, in *population Biology Proceedings, Edmonton: Lecture Notes in Biomathematics.* 52: 210-299. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[7] FARKAS, M. A zip bifurcation arising in population dynamics, in *10th Int. Conf. On, Nonlinear Oscillations, Varna 1984.* 150-155. Sofia: Bugarian Academy of Science., 1985.