ALGUNOS RESULTADOS DE OPERADORES LINEALES CONTINUOS

Some results of lineal continue operators

RESUMEN
En este artículo se presentan dos resultados interesantes de operadores continuos en un espacio de Hilbert.

PALABRAS CLAVES: Espacio de Hilbert y Operador continuo.

ABSTRACT
In this article presents two interesting results of continuos operators in a space of Hilbert.

KEYWORDS: Space of Hilbert and continuos Operator

EDGAR ALIRIO VALENCIA

Profesor Auxiliar, Magíster en Ciencias Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
evalencia@utp.edu.co

FERNANDO MESA
Profesor Titular, Magister en Instrumentación Física
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

PEDRO PABLO CÁRDENAS ALZATE
Profesor Asistente, Magíster en Enseñanza de las Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Dado un espacio de Hilbert, siempre podemos encontrar una base ortonormal, teniendo encuenta este resultado del análisis funcional y conociendo algunas condiciones que cumplen ciertos operadores lineales vamos a demostrar es este articulo, la continuidad de dichos operadores.

Ahora, uno de los espacios de Hilbert mas estudiados en el análisis, es $L^2(\Omega, \Im, \mu)$ donde $(\Omega, \Im, \mu)$ es un espacio de medida (terna compuesta por un espacio muestral, una sigma algebra del espacio muestral y una medida) ver definición en [1]. $L^2(\Omega, \Im, \mu)$ se conoce como el conjunto de todas las funciones cuadrado integrables, es decir,

$$L^2(\Omega, \Im, \mu) = \left\{ f : \int_\Omega |f|^2 \, d\mu < \infty \right\}. \qquad (1)$$

La norma que utilizaremos en este espacio es :

$$\|f\| = \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

En este contexto, demostraremos que bajo ciertas condiciones que cumple un operador lineal, este operador es continuo.

Este artículo consiste básicamente en demostrar los dos resultados mencionados anteriormente.

Definición 1 Un operador lineal es, simplemente, una aplicación lineal de un espacio vectorial en otro, lógicamente ambos sobre el mismo cuerpo k. Para ver mas detalles ver [2] y [3]

La continuidad de un operador lineal entre espacios normados puede caracterizarse de varias maneras, entre las que destacamos la más apropiada para nuestros resultados posteriores.

Fecha de Recepción: 15 de Septiembre de 2009.
Fecha de Aceptación: 22 de Octubre de 2009.

Teorema 2 Sean X y Y dos espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si, y sólo si, existe una constante $M \geq 0$ tal que:

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

La demostración se puede ver en [4].

Teorema 3 Sean $(\Omega, \Im, \mu)$ un espacio de medida dotado de una medida μ y una función $\mu \oplus \mu$ -medible $k: \Omega \times \Omega \rightarrow C$ donde C es un campo. Suponga que existen constantes a y b tales que

$$\int_\Omega |k(x,y)| d\mu(y) \leq a \quad c.t.p$$
y
$$\int_\Omega |k(x,y)| d\mu(x) \leq b \quad c.t.p$$

Demuestre que el operador $f \rightarrow K(f)$ definido por $K(f)(x) = \int_\Omega k(x,y) f(y)\mu(y)$ es un operador continuo de $L^2(\mu)$ en $L^2(\mu)$ y $\|K\| \leq (ab)^{1/2}$.

Demostración Sabemos que $L^2(\mu)$ es el conjunto de las funciones $f: \Omega \rightarrow C$ tales que

$$\int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty$$, donde

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}.$$

Ahora si $k: \Omega \times \Omega \rightarrow C$ es una función $\mu \oplus \mu$ medible y existen constantes a y b tales que

$$\int_\Omega |k(x,y)| d\mu(y) \leq a \quad c.t.p$$
y
$$\int_\Omega |k(x,y)| d\mu(x) \leq b \quad c.t.p$$

entonces la función $|k(x,y)|^{1/2}$ es cuadrado integrable. En efecto

$$\int_\Omega \left| |k(x,y)|^{1/2} \right|^2 d\mu(y) =$$

$$\int_\Omega |k(x,y)| d\mu(y) \leq a \quad c.t.p \qquad (3).$$

Demostremos ahora que el operador $f \rightarrow K(f)$ donde

$$K(f)(x) = \int_\Omega k(x,y) f(y)\mu(y) \qquad (4)$$

Es un operador continuo de $L^2(\mu)$ en $L^2(\mu)$ y $\|K\| \leq (ab)^{1/2}$.

Demostremos que si f es cuadrado integrable entonces $K(f)$ es cuadrado integrable.

$$|K(f)(x)| \leq \int_\Omega |k(x,y)||f(y)| d\mu(y) =$$

$$\int_\Omega |k(x,y)|^{1/2} |k(x,y)|^{1/2} |f(y)| d\mu(y). \qquad (5)$$

Entonces por la desigualdad de Hölder ver [5] para integrales $(p = q = 2)$ por ser $|k(x,y)|^{1/2}$ cuadrado integrable y $f \in L^2(\mu)$ tenemos que

$$|K(f)(x)| \leq$$

$$\left(\int_\Omega |k(x,y)| d\mu(y)\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |k(x,y)||f(y)|^2 d\mu(y)\right)^{1/2}. \ (6)$$

Luego

$$|K(f)(x)| \leq (a)^{1/2} \left(\int_\Omega |k(x,y)||f(y)|^2 d\mu(y)\right)^{1/2} \ c.t.p.$$

Entonces

$$|K(f)(x)|^2 \leq a \int_\Omega |k(x,y)||f(y)|^2 d\mu(y) \quad c.t.p.$$

Ahora al integral con respecto a la variable x, obtenemos

$$\int_\Omega |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq a \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)||f(y)|^2 d\mu(y)\right) d\mu(x)$$

y por el Teorema de Fubini, entonces

$$\int_\Omega |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq a \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)||f(y)|^2 d\mu(x)\right) d(y)$$

$$\int_\Omega |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq a \int_\Omega \left(|f(y)|^2 \int_\Omega |k(x,y)| d\mu(x)\right) d(y) \quad (7)$$

Por lo tanto

$$\int_\Omega |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq a \int_\Omega \left(|f(y)|^2 b\right) d(y) = ab \int_\Omega |f(y)|^2 d(y),$$

Finalmente llegamos a que

$$\int_\Omega |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq ab \|f\|_2^2, \qquad (8)$$

Esta desigualdad demuestra que $K(f) \in L^2(\mu)$.
Ahora es inmediato que $K(f)$ es un operador continuo ya que

$$\|K(f)\|_2 = \left(\int_\Omega |K(f)(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} \leq (ab)^{1/2}\|f\|_2 . (9)$$

Teorema 4 Sean E y G espacios de Hilbert, $(b_t)_{t\in T}$ una base ortonormal de E y $f : E \to G$ una función lineal tal que $\sum_t \|f(b_t)\| < \infty$. Entonces f es un operador continuo.

Demostración Si E espacios de Hilbert, y $(b_t)_{t\in T}$ una base ortonormal de E, entonces para todo $x \in E$

$$x = \sum_{t\in T}(\langle x, b_t\rangle)b_t = \lim_F \sum_{t\in F}(\langle x, b_t\rangle)b_t \quad \text{donde}$$

$$F \subseteq T \text{ y } \|x\| = \left(\sum_{t\in T}|\langle x, b_t\rangle|^2\right)^{1/2}.$$

Si $f : E \to G$ lineal tal que $\sum_t \|f(b_t)\| < \infty$, entonces

$$f(x) = \sum_{t\in T}(\langle x, b_t\rangle)f(b_t), \text{ luego}$$

$$\|f(x)\| \leq \sum_{t\in T}|\langle x, b_t\rangle|\|f(b_t)\| \quad (10).$$

Sea F un subconjunto finito de T entonces por la desigualdad de Hölder , tenemos que

$$\sum_{t\in F}|\langle x, b_t\rangle|\|f(b_t)\| \leq \left(\sum_{t\in F}|\langle x, b_t\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{t\in F}\|f(b_t)\|^2\right)^{1/2}$$

y como $\|f(b_t)\| \geq 0$ entonces

$$\sum_{t\in F}\|f(b_t)\|^2 \leq \left(\sum_{t\in F}\|f(b_t)\|\right)^2. \quad (11)$$

Luego

$$\sum_{t\in F}|\langle x, b_t\rangle|\|f(b_t)\| \leq \left(\sum_{t\in F}|\langle x, b_t\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{t\in F}\|f(b_t)\|\right)$$

Por consiguiente, aplicando limite a F ; obtenemos

$$\sum_{t\in T}|\langle x, b_t\rangle|\|f(b_t)\| \leq \left(\sum_{t\in T}|\langle x, b_t\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{t\in T}\|f(b_t)\|\right), (12)$$

Entonces

$\|f(x)\| \leq \|x\|\sum_{t\in T}\|f(b_t)\|$; como $\sum_{t\in T}\|f(b_t)\| = M < \infty$, entonces $\|f(x)\| \leq \|x\|M$. Hemos así demostrado que f es continua.

4. CONCLUSIÓN GENERAL

En este artículo obtuvimos dos conclusiones: La primera es que si el operador

$$K(f)(x) = \int_\Omega k(x, y)f(y)\mu(y)$$

es integrable en cada variable, entonces este operador es continuo. Y la segunda conclusión se refiere a que si un operador lineal esta definido en los elementos de la base de un espacio de Hilbert y la suma de sus valores en la base forman una serie convergente, entonces el operador es continuo.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] P Ibarrola, L. Pardo y V. *Quesada. Teoría de la Probabilida. Editorial Sìntesis, S. A. Madrid 1997.*

[2] Erwin Kreyszing. *Introductory Functional Analysis With Applications.*

[3] W. Rudin. *Anàlisis functional. Revertè. 1979*

[4] B. P. Rynne and M. A. Martin Youngson. *Linear Functional Analysis. Springer Verlang. 2000.*

[5] A. E. Taylor and D.C. *Lay. Introduction to functional Analysis. John Wiley 1980.*