

## CONTROL DE POSICIÓN DE UNA LÁMINA DE ACERO FLEXIBLE SUSPENDIDA MAGNÉTICAMENTE

### Control position of a flexible steel sheet magnetically suspended

#### RESUMEN

En este artículo se presenta los resultados obtenidos a partir del diseño de un controlador para la suspensión magnética de una lámina flexible ferromagnética, tomando como base el modelo matemático obtenido de un prototipo construido en una primera fase. El trabajo se centra en el diseño de un control robusto usando la función de sensibilidad calculada para la planta.

**PALABRAS CLAVES:** Sensibilidad, Perturbación, Linealización por realimentación

#### ABSTRACT

*This article shows the results about the design of a controller for the magnetic suspension of a ferromagnetic flexible sheet metal using the mathematical model of a prototype. Such model was presented in a first phase. This work focuses in the design of robust control using sensitivity function calculated for the system.*

**KEYWORDS:** Sensitivity, Disturbance, Feedback linearization.

#### FABIO A. OCAMPO MUÑOZ

Ingeniero Electricista, M. Sc.  
Profesor Asociado  
Universidad Tecnológica de Pereira  
faom@utp.edu.co

#### ANDRÉS ESCOBAR MEJÍA

Ingeniero Electricista, M. Sc.  
Profesor Auxiliar  
Universidad Tecnológica de Pereira  
andreses1@utp.edu.co

#### LUCAS PAUL PÉREZ

Ingeniero Electricista.  
Profesor Catedrático  
Estudiante Maestría Ing. Eléctrica.  
Universidad Tecnológica de Pereira  
lucaspaulp@gmail.com

## 1. INTRODUCCIÓN

La suspensión magnética es importante en aquellos procesos en donde se requiere manipular y posicionar objetos metálicos sin que estos tengan contacto con elemento alguno y también donde se requiera trasladar piezas o equipos sin que se presente rozamiento [1]. En este artículo se muestra el procedimiento de diseño de un sistema de control de posición de una lámina flexible ferromagnética, cuyo modelamiento matemático fue presentado en [2]. El prototipo presentado en la figura 1, fue construido en la Universidad del Valle como resultado de la tesis de Maestría en la línea de Automática en el programa de Ingeniería Eléctrica y presentada en [3].

Se pretende mostrar el diseño de una estrategia de control robusto basado en el modelo obtenido del sistema [2], y la cual está en capacidad de manejar las grandes incertidumbres que se presentan.

Las especificaciones robustas de control, cuya teoría ha sido presentada en [4], se ha agrupado en bloques que actúan sobre la sensibilidad complementaria, sobre la función de sensibilidad incluida la planta y sobre el esfuerzo de control. Para cada uno de los requisitos, se ha deducido formalmente la influencia de la incertidumbre y el valor de especificación del modelo, así como el nivel de exigencia de la planta.

## 2. MODELO DEL SISTEMA

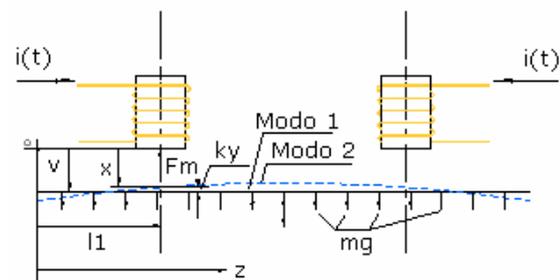


Figura 1. Descripción del sistema a controlar.

El modelo matemático del sistema a controlar y mostrado en la figura 1 se representa mediante el conjunto de ecuaciones diferenciales presentadas en la ecuación 1. La formulación del modelo a partir de leyes físicas se hace conociendo la dinámica de la planta [2], [3].

$$y = -2\zeta\omega_n \dot{y} - \omega_n^2 y + \alpha \left( \frac{i}{1+x/a} \right)^2 + c$$

$$v = \alpha_1 \left( \frac{i}{1+x/a} \right)^2 + c_1 \quad (1)$$

$$\dot{x} = \dot{v} - k y$$

En donde:

$$\alpha_1 = -51.0093$$

$$\alpha = -13.0048$$

$$a = 0.0067$$

$$c_1 = 9.816$$

$$c = 3.1024$$

$$k = 0.1984$$

$$\omega_n = 38.67$$

$$\zeta \in [5 \cdot 10^{-4} \dots 5 \cdot 10^{-2}]$$

Como puede notarse se maneja una gran incertidumbre en el término  $\zeta$ , el cual es llamado coeficiente de amortiguamiento. Inicialmente se linealizan las ecuaciones (1) por realimentación de la salida convirtiendo los términos  $\alpha_1(i/1+x/a)^2 + c_1$  y  $\alpha(i/1+x/a)^2 + c$  en una expresión lineal [4]. Para lograr esto, se selecciona la corriente  $i$  de la bobina como una función no lineal de una variable auxiliar  $u_c$ .

$$i(t) = \sqrt{\frac{u_c(t) + \Delta g - c_1}{\alpha_1}} (1 + x/a) \quad (2)$$

Se reemplaza la ecuación (2) en las ecuaciones (1) y se obtiene el siguiente nuevo conjunto de ecuaciones

$$\dot{v} = u_c + \Delta g$$

$$y = -2\zeta\omega_n \dot{y} - \omega_n^2 y + \alpha_2 u_c + c_2 \quad (3)$$

$$\dot{x} = \dot{v} - k y$$

Siendo:

$\Delta g$  : La incertidumbre en el valor de la fuerza gravedad

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{\alpha_1}$$

$$c_2 = \frac{\alpha}{\alpha_1} (\Delta g - c_1) + c$$

### 3. ESTRATEGIAS DE CONTROL

Teniendo el modelo de la planta ya linealizado [2], se diseña el controlador para la función de transferencia

$X(s)/U_c(s)$  y el cual entrega la señal de control  $u_c(t)$  que es función de la señal de error  $x_d - x$ ; con este valor de  $u_c(t)$  y el valor medido de  $x(t)$  se calcula, utilizando la ecuación (2), la corriente  $i(t)$  que debe circular por la bobina.

En la figura 2 se muestra el diagrama del sistema junto con la estrategia de control implementada.

Al analizar el nuevo conjunto de ecuaciones se nota que se pueden asumir las constantes  $c_2, \Delta g$  como funciones de disturbio del tipo escalón:

$$d_1(t) = \Delta g, \text{ para } t \geq 0$$

$$d_2(t) = c_2, \text{ para } t \geq 0$$

(4)

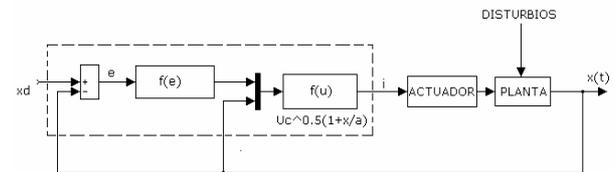


Figura 2. Diagrama de bloques de la estrategia de control.

Ahora se aplica la transformada de Laplace al conjunto de ecuaciones (4)

$$s^2 V(s) = \alpha_1 U_c(s) + d_1(s)$$

$$s^2 Y(s) = 2\zeta\omega_n s Y(s) - \omega_n^2 Y(s) + \alpha_2 U_c(s) + d_2(s)$$

$$X(s) = V(s) - k Y(s) \quad (5)$$

Y sabiendo que:

$$L\{d_1(t)\} = d_1(s) = \frac{\Delta g}{s} \quad (6)$$

$$L\{d_2(t)\} = d_2(s) = \frac{c_2}{s}$$

Y operando (6) en las ecuaciones (5) se obtiene:

$$X(s) = \left( \frac{1}{s^2} - \frac{k\alpha_2}{s + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) U_c(s) + \frac{d_1(s)}{s^2} - \frac{k d_2(s)}{s + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7)$$

Escribiendo la ecuación (7) en notación matricial se tiene que:

$$X(s) = \left( \frac{1}{s^2} - \frac{k\alpha_2}{s + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) U_c(s) + \left[ \frac{1}{s^2} \quad \frac{-k}{s + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] \begin{bmatrix} d_1(s) \\ d_2(s) \end{bmatrix} \tag{8}$$

$G(s)U_c(s) + Gd(s)d(s)$

En la figura 3 se muestran las convenciones utilizadas para los nombres de las señales: referencia, disturbio, salida. Para los sistemas se tiene: controlador, actuador-planta, modelo de disturbio. El bloque  $G$  representa el modelo del actuador junto con el modelo de la planta.

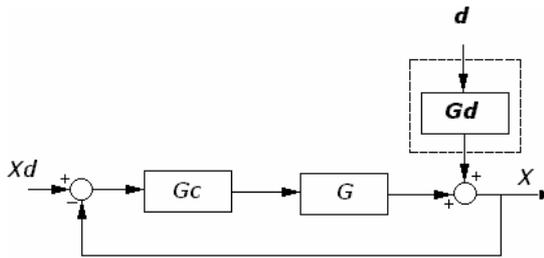


Figura 3. Convención de señales y bloques.

A partir de la figura 3 se puede deducir la función de transferencia de lazo cerrado.

$$X(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} X_d(s) + (1 + G_c(s)G(s))^{-1} Gd(s)d(s) \tag{9}$$

Desarrollando las matrices se obtiene:

$$X(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} X_d(s) + (1 + G_c(s)G(s))^{-1} \frac{d_1(s)}{s^2} + (1 + G_c(s)G(s))^{-1} \frac{-kd_2(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{10}$$

#### 4. CALCULO DEL CONTROLADOR

Para un correcto funcionamiento del sistema de lazo cerrado debe garantizarse:

Que la función de transferencia  $(1 + G_c(s)G(s))^{-1}$  (obsérvese que coincide con la función de sensibilidad presentada en la ecuación(11) tenga un derivador de orden tres con el fin de lograr que la función de transferencia que determina la salida del sistema con la entrada de uno de los disturbios,  $Y(s)/d_1(s)$ , tenga ganancia cero a frecuencia cero y así el sistema rechace el disturbio tipo escalón,  $d_1(s)$  en estado estacionario.

$$\frac{X(s)}{d_1(s)} = (1 + G_c(s)G(s))^{-1} \frac{1}{s^2} \tag{11}$$

Que la función de sensibilidad  $(1 + G_c(s)G(s))^{-1}$  tenga una ganancia lo suficientemente baja, del orden de 0.01, alrededor de  $\omega_n$ , puesto que el factor  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$  que aparece en el denominador de  $X(s)/d_2(s)$ , ecuación (10), amplifica los componentes de frecuencia  $\omega_n$  presentes en  $d_2(s)$ . El disturbio  $d_2(s)$  al igual que el disturbio  $d_1(s)$  son asumidos del tipo escalón.

$$\frac{X(s)}{d_2(s)} = (1 + G_c(s)G(s))^{-1} \frac{-k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{12}$$

El cumplimiento del último requerimiento garantiza además que el sistema de lazo cerrado sea poco sensible ante variaciones del sistema de lazo abierto alrededor de la frecuencia  $\omega_n$  [4]. Lo anterior es deseable porque precisamente alrededor de esta frecuencia tiene su máxima incidencia la incertidumbre en el coeficiente de amortiguamiento.

De acuerdo a los requerimientos impuestos a la función de sensibilidad  $S(s)$  se escogen los parámetros del controlador.

$$S(s) = (1 + G_c(s)G(s))^{-1}$$

$$\frac{1}{S(s)} = (1 + G_c(s)G(s)) \tag{13}$$

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \left( \frac{1}{S(s)} - 1 \right)$$

$$G_c(s) = \frac{1 - S(s)}{G(s)S(s)}$$

Se toma la función de sensibilidad complementaria como se presenta en [5]:

$$T(s) = 1 - S(s) \tag{14}$$

Y se reemplaza en la ecuación (13).

$$G_c(s) = \frac{T(s)}{G(s)S(s)} \tag{15}$$

El controlador resultante  $G_c(s)$  debe ser estable y causal. Para garantizar la causalidad la función de transferencia  $T(s)/S(s)$  debe tener un grado relativo (mayor número

de polos que de ceros), inverso al grado relativo de  $1/G(s)$  [6]. En este caso la planta  $G(s)$  tiene un grado relativo igual a dos, por lo tanto el grado relativo de  $1/G(s)$  es de menos dos (-2) y  $T(s)/S(s)$  debe tener por consiguiente un grado relativo dos (dos polos más que el número de ceros). Si se toman  $N_s(s)$  como el numerador y  $D_s(s)$  como el denominador de la función de sensibilidad  $S(s)$ , se tiene:

$$\frac{T(s)}{S(s)} = \frac{1 - \frac{N_s(s)}{D_s(s)}}{\frac{N_s(s)}{D_s(s)}} \tag{16}$$

$$\frac{T(s)}{S(s)} = \frac{D_s(s) - N_s(s)}{N_s(s)}$$

Ahora bien si:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{17}$$

Y:

$$G_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \tag{18}$$

La función de sensibilidad (13) se puede expresar como:

$$S(s) = (1 + G_c(s)G(s))^{-1} = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \tag{19}$$

Escogiendo el orden mínimo para la función de sensibilidad se obtiene

$$S(s) = \frac{s^4 + b_3s^3}{s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0} \tag{20}$$

$$S(s) = \frac{s^3(s + b_3)}{s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}$$

La función correspondiente a la sensibilidad complementaria es la que determina directamente la forma de la respuesta de lazo cerrado [6].

$$T(s) = 1 - S(s) \tag{21}$$

$$T(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}$$

La selección de  $b_0, b_1, b_2, b_3$  no es sencilla por la restricción asociada con estos términos [7], [8], los cuales aparecen como coeficientes de  $s^2, s$  y como término independiente, tanto en el numerador como en el denominador, lo que implica que al escoger los polos de  $T(s)$ , indirectamente se escogen los ceros. Se presentan las siguientes opciones para seleccionar el denominador de  $T(s)$  [3]:

- Opción 1:  $(S + \omega_b)^4$
- Opción 2:  $(s + 0.25\omega_b)^2 (S + 4\omega_b)^2$
- Opción 3: Bessel
- Opción 4: Butter

Todas las anteriores opciones llevan a funciones de transferencia con características similares en lo referente a ancho de banda, ganancia de frecuencia cero y pendiente de cruce por cero decibeles. Igualmente en todas las opciones la ubicación de los dos ceros de lazo cerrado es cercana a la de los polos dominantes, como se aprecia en la figura 4, lo cual ocasiona respuestas con sobre-impulso apreciable pero de diferente valor en cada una, como se aprecia en la figura 5.

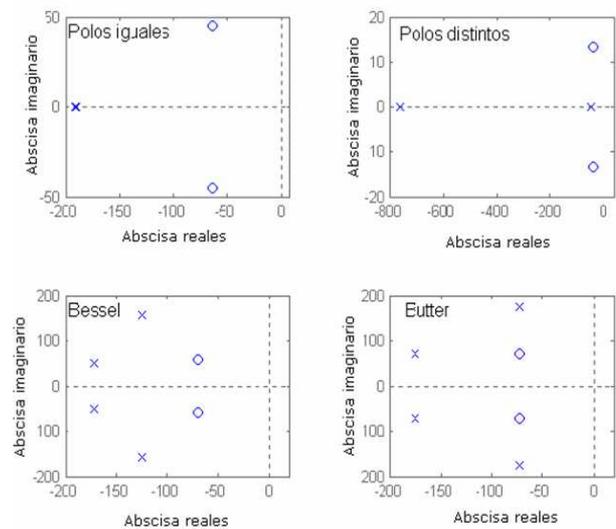


Figura 4. Comparación de la ubicación de polos y ceros de las funciones de transferencia de las diferentes opciones.

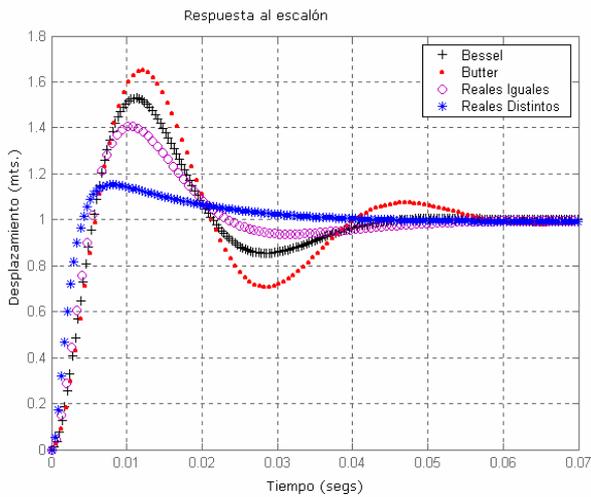


Figura 5. Respuesta de lazo cerrado, escogiendo los polos de acuerdo a las diferentes opciones.

La mejor respuesta es la presentada en la opción 2 ya que es la que tiene el menor sobre-impulso. La función de transferencia correspondiente está dada por:

$$T(s) = \frac{(s + 40.9589 - 13.629j)(s + 40.9589 + 13.629j)}{(s + 773.4)^2(s + 48.34)^2} \quad (22)$$

Y la función de sensibilidad es:

$$S(s) = \frac{s^3(s + 1643)}{(s + 773.4)^2(s + 48.381)^2} \quad (23)$$

Una vez se han determinado  $S(s), T(s)$ , se calcula el controlador. Debido a las incertidumbres presentes en la determinación de los parámetros de la función de transferencia de la planta, se toma el estimado de  $G(s)$  cómo  $\hat{G}(s)$ . Reemplazando el estimado  $\hat{G}(s)$  en la ecuación (15) se obtiene:

$$G_c(s) = \frac{1}{\hat{G}(s)} \left( \frac{T(s)}{S(s)} \right)$$

$$G_c(s) = \frac{s^2(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}{(\alpha_1 - k\alpha_2)s^2 + 2\alpha_1\xi\omega_n s + \alpha_1\omega_n^2} \dots$$

$$\dots \times \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3(s + b_3)} \quad (24)$$

$$G_c(s) = \frac{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(b_2s^2 + b_1s + b_0)}{s((\alpha_1 - k\alpha_2)s^2 + 2\alpha_1\xi\omega_n s + \alpha_1\omega_n^2)(s + b_3)}$$

Al evaluar las constantes, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{(s + 40.96 - 13.63j)(s + 40.96 + 13.63j)}{s(s + 1643.5)(s + 0.2 - 39.7j)(s + 0.2 + 39.7j)} \times \dots$$

$$\dots \times (s + 0.1933 - 38.7j)(s + 0.1933 + 38.7j)$$

La función de trayectoria directa es la siguiente:

$$G(s)G_c(s) = \frac{G(s)T(s)}{\hat{G}(s)S(s)} \approx \frac{T(s)}{S(s)} \quad (25)$$

En la ecuación (25) se han tenido en cuenta los errores de modelamiento y por lo tanto el cociente  $G(s)/\hat{G}(s)$  no es exactamente igual a uno ( $1 \angle 0^\circ$ ) para todas las frecuencias. En la figura 6 se muestran las funciones sensibilidad y función de transferencia de lazo cerrado. Según el modelo de la planta, ecuaciones (4) y (6), la región de mayor incertidumbre está alrededor de la frecuencia  $\omega_n$ , donde ocurre el pico de resonancia el cual es función del coeficiente de amortiguamiento. Este es el parámetro con mayor rango de incertidumbre ( $\zeta \in [5 * 10^{-4} \dots 5 * 10^{-2}]$ ).

A pesar de esta incertidumbre, su efecto en el sistema de lazo cerrado es mínimo. Como puede apreciarse en la figura 6, la función sensibilidad tiene un valor aproximado de -28dB (0.04 veces) alrededor de  $\omega_n = 38.66 \text{ rad / seg}$ , lo cual significa que una variación del 30% de  $G(j\omega)$  en lazo abierto con respecto a su valor nominal, representa una variación del  $30\% * 0.04 = 1.2\%$  en la función de transferencia de lazo cerrado alrededor de esta misma frecuencia ( $\omega = \omega_n$ ).

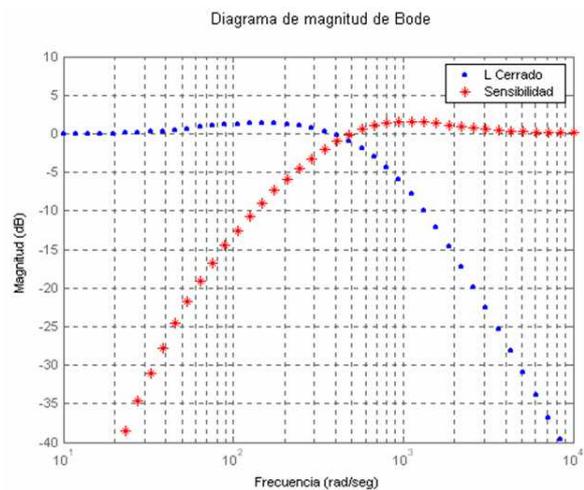


Figura 6. Diagrama de Bode de las funciones sensibilidad y lazo cerrado.

## 5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

Se simula el sistema no lineal, incluyendo las respectivas saturaciones, inicialmente durante un corto tiempo, aplicándole una señal de referencia tipo escalón de 0.01, cuyo resultado se observa en la figura 7. Para la prueba final de simulación al sistema se utiliza una señal de referencia tipo escalón de sumada con una señal aleatoria que cambia de valor cada segundo. Como se puede ver en la figura 8 se obtiene una excelente respuesta del sistema y un limitado esfuerzo de control.

En este artículo se presenta una forma simple de diseñar en el dominio de la frecuencia un controlador de un grado de libertad para un sistema de suspensión magnética. La técnica de diseño propuesta por los autores parte de los requerimientos que debe cumplir la función sensibilidad en cuanto a: rechazo a disturbios, sensibilidad ante errores de modelamiento y velocidad de respuesta [8].

El diseño se realizó suponiendo el sistema SISO, cuando en realidad es MIMO: las variables manipuladas son el voltaje en cada una de las bobinas y las variables a controlar son las posiciones de cada uno de los extremos de la lámina.

A pesar de que el controlador se diseñó considerando el sistema linealizado, las simulaciones se realizaron considerando las saturaciones existentes; los resultados, sin embargo fueron satisfactorios.

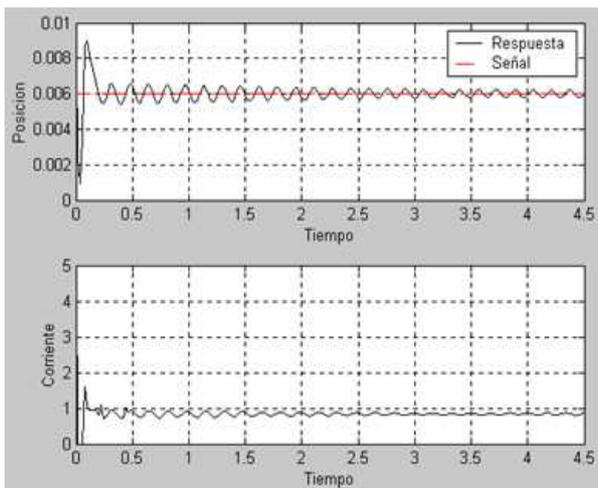


Figura 7. Comportamiento del Sistema ante una Señal tipo escalón.

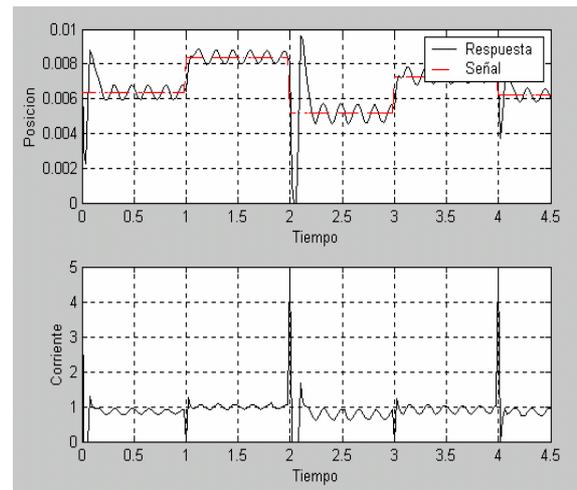


Figura 8. Comportamiento final del sistema.

## 6. BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. Yamakuchi, "Magneto Science: Fundamentals and applications", Springer series in materials science, Hiroshima University, first edition, 2007.
- [2] F. Ocampo, A. Escobar, J. Saenz, "Construcción de un sistema para el modelamiento de una lámina de acero flexible suspendida magnéticamente", Scientia et technica año XIV, No 38, Junio de 2008, Universidad Tecnológica de Pereira.
- [3] F. A. Ocampo M., "Suspensión magnética controlada de una lamina flexible". Monografía elaborada para obtener el grado de Maestría en Automática, Universidad del Valle, 2003.
- [4] J. J. Slotine E. and Li Weiping. "Applied Nonlinear Control" Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- [5] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky "Signal And Systems" Prentice Hall signal processing series.
- [6] P. R. Bélanger "Control Engineering" A modern approach. Saunders College Publishing.
- [7] C.J. Harris and C.G. Moore, "Phase Plane Analysis Tools for a Class of Fuzzy Control Systems", in the International Conference on Fuzzy Systems, EEUU, 1992, pp. 511-518.
- [8] J. Jantzen, "Design of fuzzy controllers", Technical University of Denmark, department of automation, lyngby Denmark, technical report no 98-E 864, 1998.