UNA NOTA SOBRE EL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BANACH EN LA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES ALGEBRAICAS

A note about the Banach's fixed point theorem in the system solution of lineal algebraic equations

PEDRO PABLO CÁRDENAS A.
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Estudiante de Doctorado en Ingeniería Matemática-Chile
Profesor Asistente - Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

ALEXANDER GUTIERREZ G.

Matemático.
Magíster en Matemáticas.
Estudiante de Doctorado en Matemáticas – España.
Profesor Auxiliar – Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira
alexguti@utp.edu.co

RESUMEN

En el presente artículo se muestra una nota sobre el teorema de punto fijo de Banach en la solución de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas y las condiciones que debe cumplir un operador asociado a dichos sistemas para que sea una contracción en $\mathbb{R}^n$ y por tanto tenga solución única.

PALABRAS CLAVES: Operador, contracción, método iterativo.

ABSTRACT

In the present article a note appears on the Banach's fixed point theorem in the system solution of linear algebraic equations and the conditions that there must fulfill an operator associated with the above mentioned systems in order that it is a contraction in $\mathbb{R}^n$ and therefore it has the unique solution.

KEYWORDS: Operator, contraction, iterative method.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones importantes del teorema de punto fijo de Banach es la de resolver sistemas de ecuaciones lineales algebraicas proporcionando condiciones suficientes para la convergencia y también el error.

Se mostrara en este trabajo, las condiciones que debe tener el operador

$$Tx = Bx + y$$

para que sea una contracción en $\mathbb{R}^n$ y asi demostrar que si este operador es una contracción, entonces el sistema de ecuaciones lineales algebraicas $y = Ax$ tiene solución única.

Además se ilustran tres métodos iterativos que hacen la comparación con los métodos comunes de resolución de dichos sistemas.

2. TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BANACH

Fecha de Recepción: 8 de Diciembre de 2008.
Fecha de Aceptación: 26 de Diciembre de 2008.

Definición 2.1. Sea (E, d) un espacio métrico y A un subconjunto de E. $T: A \to A$ es una contracción si

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1: \ d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

Teorema 2.1 (Banach**).** Sea (E, d) un espacio métrico completo, A un subconjunto cerrado de E y $T: A \to A$ una contracción, entonces T tiene un único punto fijo, o sea, existe un $y \in A$ tal que $Ty = y$.

3. CONDICIONES PARA QUE EL OPERADOR *T* SEA UNA CONTRACCION

Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y sea el sistema de ecuaciones lineales algebraicas $y = Ax$ o su equivalente

$$y = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ ; i = 1, \dots, n$$

donde $A = [a_{ij}]$ es una matriz cuadrada de orden *n*, $x = [x_i]$ y $y = [y_i]$ son vectores columna de orden $n \times 1$.

Puede verse que resolver el sistema $y = Ax$, es equivalente a resolver o encontrar los puntos fijo del operador *T* definido en $\mathbb{R}^n$ el cual está dado por

$$Tx = (I - A)x + y \tag{3.1}$$

donde $(I - A) = B$, la cual es una matriz cuadrada de orden *n*. Acá, *I* es la matriz idéntica de orden *n* y $B = [b_{ij}]$.

Ahora bien, las condiciones para que el operador (3.1) sea una contracción en $\mathbb{R}^n$, depende de la elección de la métrica definida en $\mathbb{R}^n$, es decir, si se toma por ejemplo la métrica del máximo, la métrica de la suma o la métrica euclidiana se tiene que el teorema (2.1) existe uno y solo un elemento en $x \in \mathbb{R}^n$ punto fijo del operador (3.1) donde

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + y_i$$

Las condiciones para que *T* sea un operador son:

Sean

$$u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n), p = (p_1, \dots, p_n),$$
$$q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$$

y supóngase que $p = Tu$ entonces

$$d_\infty(Tu, Tv) = \max_i |p_i - q_i|$$
$$\leq \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \right) \left(\max_j |u_j - v_j| \right)$$
$$= \gamma_\infty d_\infty(u, v)$$

es la condición con la métrica del máximo.

$$d_1(Tu, Tv) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| \leq$$

$$\left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j - v_j| \right) = \gamma_1 d_1(u, v)$$

es la condición con la métrica de la suma.

$$(d_2(Tu, Tv))^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 \right) (d(u, v))^2$$

es la condición con la métrica euclídea.

4. METODOS ITERATIVOS

Teorema 4.1. El sistema

$$x = Hx + q \tag{4.1}$$

donde *H* es una matriz $n \times n$ tiene solución *x* siempre que $\rho(H) < 1$. Esta solución puede obtenerse por medio de la sucesión recursiva

$$x^m = Ax^{m-1} + b$$

Este resultado se usa para resolver sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b \tag{4.2}$$

por métodos iterativos.

Si se escribe $A = B + C$, donde *B* es no singular, al reemplazar en (4.2) y despejar *x* se tiene

$$Bx = -Cx + b$$

así se llega a la ecuación (4.1) con $H = -B^{-1}C$, $q = B^{-1}b$. La sucesión de aproximaciones x^m calculada con este método, la solución $\tilde{x}$ y los errores $\delta^m = x^m - \tilde{x}$ satisfacen

$$Bx^{m+1} = -Cx^m + b$$
$$B\tilde{x} = -C\tilde{x} + b$$
$$B\delta^{m+1} = -C\delta^m + b$$

La tercera ecuación se obtiene de restar la segunda con la primera. En el caso en que *B* es no singular,

$\delta^{m+1} = H\delta^m, \qquad H = -B^{-1}C$

Así que
$\delta^m = H^m\delta^0$

Como se quiere que x^m converja a $\hat{x}$ cero sin importar cual sea el error inicial δ^0, pues se tiene que $\delta^m = H^m\delta^0$, así se necesita que $\rho(H) < 1$ como lo muestra el teorema. Es decir, mientras más pequeño sea $\rho(H)$ mas rápido converge la sucesión.

Ahora se presentan tres métodos iterativos: Jacobi, Gauss-Seidel y SRS (Sobre Relajaciones Sucesivas).

Método de Jacobi

El método iterativo de Jacobi sustituye la aproximación anterior de *x* en la *i-esima* ecuación para todas las variables excepto para la *i-esima* y calcula esa variable como sigue:

$$a_{ii}x = -a_{i1}x - \cdots - a_{ii-1}x - a_{ii+1}x - \cdots - a_{in}x + b_i$$

Método de Gauss-Seidel

Sustituyendo la nueva aproximación *x* en la *i-esima* ecuación para aquellos variables *x* que se han actualizado, sustituye la aproximación anterior *x* con todas las demás variables excepto en la *i-esima* y despeja esa variable como *x*

$$a_{ii}x = -a_{i1}x - \cdots - a_{ii-1}x - a_{ii+1}x - \cdots - a_{in}x + b_i$$

Método de sobre relajaciones sucesivas (SRS)

En este método se calcula *x* así: primero calculamos una aproximación temporal $x*$ a la invariable con el método de Gauss-Seidel y después encontramos

$$x = x + \omega(x * - x)$$

para un parámetro de sobre relajación fijo ω, generalmente mayor que 1, cuyo uso tiene le propósito de mover más rápidamente la aproximación hacia la solución. esto es:

$$a_{ii}x *= -a_{i1}x - \cdots - a_{ii-1}x - a_{ii+1}x - \cdots - a_{in}x + b_i$$

o
$$x = x + \omega(x * - x)$$

5. CONCLUSIONES

En la práctica, los métodos iterativos tienen ventajas sobre los métodos directos (método de Gauss) cuando la matriz *A* es poco densa, es decir, sólo contiene un pequeño porcentaje de elementos diferentes de cero; los métodos iterativos explotan la poca densidad de la matriz y mantiene un bajo almacenamiento, entre otros requisitos computacionales.

Utilizando el teorema (2.1) se mostró que el operador *T* definido para el $y = Ax$ tenía un punto fijo (dependiendo de la métrica elegida), el cual garantiza solución única.

BIBLIOGRAFIA

[1] CÁRDENAS, P.P. Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira – Universidad de Buenos Aires (Argentina). 2004

[2] W. Keith Nicholson: *Algebra lineal (4ª edición).* McGraw Hill. 2003

[3] Introductory Functional Analysis with Applications Wiley Classics Library. 1 Edition April 1989

[4] Matrix analysis and applied linear algebra. Meyer C.D. (SIAM, 2000)(T)(727s).djvu.

[5] Linear Algebra and its Applications. Richard A. Brualdi. Elsevier. 1968.

[6] Applied Linear Algebra and Matrix Analysis by Thomas S. Shores. 2007 Springer Science. 2007.