

ENFOQUE ESTOCÁSTICO DE LA INCERTIDUMBRE EN LA SELECCIÓN DE CARTERAS DE PROYECTOS

FÁTIMA PÉREZ GARCÍA

f_perez@uma.es

Universidad de Málaga

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)

Campus el Ejido s/n, 29071, Málaga

Recibido (17/09/2013)

Revisado (20/09/2013)

Aceptado (30/09/2013)

RESUMEN: En este trabajo desarrollamos un modelo de programación entera 0-1 multiobjetivo para seleccionar y planificar, simultáneamente, una cartera de proyectos, de entre un conjunto de propuestas iniciales. Se permite que los proyectos que conforman la cartera se inicien en distintos instantes de tiempo, de acuerdo con las disponibilidades de recursos en cada periodo u otros requisitos de carácter estratégico, político, etc. Además, dado que el centro decisor habitualmente tiene un conocimiento impreciso de ciertos parámetros que aparecen tanto en las funciones objetivo como en las restricciones del modelo, tratamos esta incertidumbre utilizando el enfoque proporcionado por la programación estocástica. La funcionalidad del modelo es probada sobre un ejemplo ilustrativo, así como sobre un conjunto de 5.760 instancias de prueba.

Palabras clave: Carteras de proyectos, programación estocástica, multiobjetivo, planificación.

ABSTRACT: In this paper we develop a 0-1 integer multiobjective programming model to simultaneously select and plan a portfolio of projects from a set of initial proposals. Projects in the portfolio are allowed to start at different moments of time, according to the resources available at each period and according to other requirements of strategic and/or political character, for example. Furthermore, given that the decision maker usually has an imprecise knowledge of certain parameters appearing in both, the objective functions and constraints of the model, we treat this uncertainty using stochastic programming. The functionality of the model is tested by means of an illustrative example, and using a set of 5,760 test instances.

Keywords: Project portfolio, stochastic programming, multiobjective, scheduling.

EXTENDED SUMMARY:

The problem of selecting a project portfolio arises from the everyday dilemma faced by public and private organizations of finding the best possible way to distribute a limited budget among projects that normally need a higher, and unavailable, budget. This decision-making process is crucial, since making the wrong decisions during this process may have two negative consequences: resources are wasted and the benefits derived from allocating such resources to better projects are also lost. During the project selection stage, the organization has a set of objectives to be fulfilled, but there are also technical, political and social limitations to be taken into account. It is a difficult task and requires far more than just the insights and intuition of the managers, given that there is a vast amount of information to manage and the level of uncertainty involved is often high. This has motivated the development of quantitative methods to support or facilitate the task of project assessment and selection in decision making (Martino, 1995).

There is a wealth of literature on the various methods used in this field (Heidenberger and Stummer, 1999; Iamratanakul et al., 2008). Some models rank investment proposals and then distribute the budget until it is completely spent (e.g. financial methods (Silvola, 2006), scoring (Lawson et al. 2006), analytical hierarchy process (Feng et al. 2011) and multi-attribute utility theory (Duarte and Reis, 2006)). However, these approaches are not always feasible (they only take into account one budget constraint, there may be complementarity and incompatibility relationships as well as synergies between the projects...). This has led to growing interest in other techniques derived from mathematical programming. This interest is also driven by advances in the technical procedures used to solve the optimization problems generated.

Our study is framed within mathematical programming methods, under the assumption that projects are not fractionable, i.e., that decision variables are binary variables and represent the selection or rejection of each investment proposal. This is a standard assumption (Stummer and Heidenberger, 2003) and does not lead to a loss of generality regarding the problem, since it is possible to have several "versions" of the same project by changing the options on funds or resources. These options are included as separate projects, while taking into account that only one of the versions will be executed.

As stated above, there may be synergies between the projects, such that the best set of individual projects may not necessarily be the best set when all these interactions are taken into account (Chien, 2002). Due to this, interdependencies between projects are included in our model too. We follow Carazo et al. (2010) approach, where the synergies are generalized to sets of projects.

Organizations seek solutions that enable them to plan their resources over several periods of time. In other words, they seek to develop stable, ongoing policies that allow them to reach their overall economic, social and environmental objectives in the medium to long term. For this reason, managers face the task of having to simultaneously select projects and plan them within a given planning horizon. The literature on this topic is scarce, probably due to the complexity involved in dealing simultaneously with selection and scheduling. There can also be precedence relationships between some projects; in other words, some projects can only start if their predecessors have already been completed, or a certain number of periods have passed since the predecessor project started. This issue is considered in our model also.

The multiobjective nature of project selection and planning is evident. When organizations need to assign their scarce resources to a set of projects, they wish to simultaneously optimize several measures or criteria, such as benefits, risks, the value of the portfolio chosen, and so on. The simultaneous optimization of all the objectives provides a set of solutions called efficient or Pareto optimal. This is the set of feasible non-dominated portfolios, i.e., there is no other portfolio able to yield higher values in at least one objective without making any other worse. In this paper, we have chosen the approach that demands the least information from the decision maker, i.e., to generate the set of efficient portfolios. This still remains a major challenge (Doerner et al., 2006; Medaglia et al., 2007) in the context of a non-linear problem with variables 0-1. Obtaining this set allows us to identify the trade-offs between the objectives, which helps the DM to understand the situation better.

Thus, given a set of projects that may be carried out by an organization, a multiobjective approach allows us to take into account several aspects that are relevant for the organization during selection and planning, such as maximizing benefits, minimizing risks or maximizing utility. Furthermore, the possibility of incorporating constraints in the model allows us to include other important factors, such as the availability of resources, forcing the execution of certain projects, interaction between projects, or any other technical, economic, political or legal limitations the organization wishes to take into account.

However, given the nature of portfolio selection and planning, organizations do not always know all the factors that need to be handled, since some of them are subject to the changes in the labour or financial markets and on social conditions. In particular, the resources required by each

project and the benefits to be obtained may be highly variable, since their value is simply estimated before the projects are running. If this variability is not taken into account it can cause overuse of resources or misevaluation of the profits finally obtained. On the other hand, uncertainty can affect the available resources if, for example, funds depending on public budgets are delayed or reduced by political incidences. Therefore, uncertainty regarding certain parameters in the model has to be taken into account, and we model them by using random variables.

Most studies focussing on optimization in the presence of random variables can be grouped into two broad approaches (see Prékopa, 1995, and Ruszczyński and Shapiro, 2003). The first approach is based on programming with recourse. In this case, randomness is given by a set of scenarios, where each scenario has a given associated probability and decisions are taken in two or more stages (two-stage or multistage stochastic programming). The second approach, called probabilistic programming, requires that the problem constraints are verified with a given probability (chance constrained) and a criterion is chosen to transform the stochastic objective(s). This transformation is carried out by using some statistical parameters of the random objectives, which replace the stochastic objective functions. The resulting problem is called a deterministic equivalent problem and its optimal (efficient when the problem is multiobjective) solution is considered an optimal (efficient) solution of the original problem. The transformation criterion chosen determines the type of deterministic equivalent problem obtained. The greatest difficulty derived from applying the chance constrained criterion to the feasible set, as well as the minimum risk and Kataoka criteria to the objective function, is that their application requires knowing the probability distribution of the constraint and/or the stochastic objective. In other cases, it is possible to use the Monte Carlo simulation as an approximation of the distribution function.

In this paper, we assume that the coefficients that represent running costs or benefits are not completely known (neither in the objective functions nor in the resource constraints), and are thus considered as random variables which follow the normal distribution. So, we use Probabilistic Programming, such that both stochastic objectives and constraints are transformed into their deterministic equivalent. The general model introduced in this paper enables the selection and scheduling of project portfolios to achieve the different objectives set by the organization for the given planning horizon. We have incorporated different interactions between some of the candidate projects, the possibility of transferring cash resources not consumed in one period to the next period, and the different temporal availability of resources or other requirements of a strategic or political nature. In addition, we assume that some parameters in the objective functions and/or in the constraints are random variables. To transform this problem into its deterministic equivalent, the chance constrained criterion has been applied to the constraints of the problem, with the condition that such constraints are verified with at least one probability vector set by the DM a priori. On the other hand, the stochastic objective functions, which we assume follow the normal distribution, are transformed into their deterministic equivalent using the Kataoka criterion, thereby obtaining a set of probability efficient solutions. Based on the results of Caballero et al. (2000, 2001), we can further state that these solutions are also minimum risk efficient solutions and that they are efficient solutions-expected value standard deviation if the probability is set "high".

Consequently, we present in Section 2 a new model which simultaneously combines the selection and scheduling of project portfolios, under a stochastic multicriteria decision-making framework with which we try to cover the lacks we have found in the literature in this field.

In Section 3, we use an illustrative example to show the application of the model described above. The results obtained showed the changes that occur in the values achieved in the objective functions when using different probabilities in the transformations. Because of this, the analyst has to work with the decision-maker to reach a trade-off between risk and the values achieved by the objective functions.

Then, in Section 4, we analyze the computational experiments conducted to test the functionality and behaviour of the model. To this end, a set of randomly generated instances are used to address all the possible scenarios that can arise in real life when selecting and scheduling project portfolios. We used the instance generator described in Carazo et al. (2010), but it has been modified to provide the additional information required by the model, i.e. data regarding the uncertainty parameters. Thus, the generator randomly produces the expected values that the coefficients may take and calculates the variances from different deviations of such expected values. Moreover, there are instances whose objective functions are all to be maximized, and others instances where some objective functions are to be maximized and other minimized. In this way, we obtained 5.760 instances that were solved. In addition, instances of the model that did not include uncertainty were solved. In this case, the model's coefficients are deterministic and their values are the same as the corresponding expected values of the random variables in

the stochastic model. The purpose of this analysis is to compare the performance of the model when uncertainty is not taken into account.

Regarding the results obtained, the two main characteristics of the stochastic model (data variability and probability chosen in the transformation from the stochastic model to the deterministic one) are observed to produce significant changes in the computational times. These probabilities are especially relevant in cases with a high allowed variability, generating so variable computational times too. Consequently, in the level of uncertainty is high the organization must be guided on the importance of choosing some high enough probabilities able to ensure reliable results, taking into account previous considerations about computational times.

On the other hand, we can observe how number of projects and number of objectives are also critical aspects in the computational costs, independently of uncertainty level of the problem. Besides, multiobjective character of the problem is also a source of variability in the computational times, due mainly to different levels of conflict among the objectives.

In addition, computational times are always shorter in models that do not include variability, given that the introduction of variations implies that the algorithm has to accommodate more possibilities and this obviously increases computational times. On the other hand, in terms of the number of projects, the mean density of efficient frontiers is similar in the models with or without variability, except in some larger groups. These results also show how problems with higher probabilities have a lower number of efficient solutions.

To sum up, the resolution of these kinds of problems is largely determined, firstly, by the variability permitted to the data; thus, relatively small variations do not produce large changes in the results and computational times, whereas larger variations translate into larger changes in the results. Regarding the probabilities used when transforming the stochastic problem into its deterministic equivalent, high probabilities normally have a negative effect on computational times, as well as in the number of efficient solutions found. Therefore the decision maker may have to decide whether to take risks and obtain results faster or decrease risk at the expense of longer computational times.

Thus, the results support the efficiency of the proposed model to solve problems with very different characteristics. This makes it suitable to apply in the field of project portfolio selection and planning where uncertainty is always present.

1. Introducción

Seleccionar, de entre un conjunto de proyectos, aquéllos que más se ajustan a las necesidades, requerimientos y objetivos de una organización es una tarea compleja. Existen múltiples factores que deben ser considerados a lo largo del proceso. Debido a esto, en las últimas décadas han surgido diferentes técnicas cuantitativas que posibilitan la resolución de este tipo de problemas (Martino (1995)). Sin embargo, muchas de ellas se han desarrollado bajo hipótesis de entornos deterministas, sin considerar el problema de la incertidumbre que presenta el proceso.

Habitualmente, las organizaciones persiguen la consecución de objetivos amplios, los cuales no pueden obtenerse llevando a cabo únicamente un proyecto. En esta línea surgen las carteras de proyectos, que son grupos de proyectos que comparten unos recursos escasos en un período de tiempo determinado (Archer y Ghasemzadeh (1999)). Bajo este esquema, la selección de una cartera de proyectos es la determinación del conjunto de proyectos que conduce, de la mejor forma posible, al fin buscado.

En la literatura podemos encontrar una gran diversidad de métodos y técnicas que se pueden aplicar en este contexto (Heidenberger y Stummer (1999); Iamratanakul et al. (2008)). Un bloque de técnicas muy utilizado lo constituyen aquéllas que llevan a cabo una ordenación o ranking de las propuestas de inversión, a partir del cual se distribuye el presupuesto hasta agotarlo (los métodos financieros (Silvola (2006)), de scoring (Lawson et al. (2006)), the analytical hierarchy process (Feng et al. (2011)), la teoría de la utilidad multiatributo (Duarte y Reis (2006)), entre otros). Ahora bien, este planteamiento no siempre es aplicable por tres razones fundamentales:

- Sólo considera la limitación presupuestaria, sin incluir limitaciones de personal, equipos, etc., ni aspectos sociales o políticos, del entorno (Mavrotas et al. (2008)).
- No considera el carácter dinámico del proceso. La limitación presupuestaria está referida a un instante de tiempo, y los proyectos seleccionados se inician al mismo tiempo. Ello es bastante restrictivo, porque la flexibilidad en cuanto al momento de ejecución, puede favorecer una mejor distribución de los recursos (Archer and Ghasemzadeh (1999)).
- Pueden existir relaciones de complementariedad, incompatibilidad y sinergias entre los proyectos candidatos, que hacen que éstos no sean independientes entre sí, y que las mejores peticiones, individualmente consideradas, no necesariamente conformen el mejor grupo de proyectos (Chien (2002)).

Todo lo anterior ha motivado que, de manera paralela, haya crecido el interés por utilizar otro bloque de técnicas procedentes del campo de la programación matemática, las cuales permiten incorporar los aspectos anteriormente señalados. En este segundo bloque, es donde podemos enmarcar nuestro trabajo.

La utilización de modelos de programación matemática en este ámbito se remonta al trabajo de Weingartner (1966) que generaliza el trabajo previo de Lorie y Savage (1955), formalizándolo como un modelo de programación lineal. Además, estudia ciertas interdependencias entre proyectos debidas a relaciones de incompatibilidad o complementariedad entre ellos, las cuales se incorporan en el modelo mediante restricciones adicionales. Posteriormente, se comienzan a considerar también relaciones de sinergias motivadas por compartir costes y/o beneficios derivados de la realización de más de un proyecto a la vez. Estas relaciones se modelizan mediante la inclusión de términos adicionales en la valoración de una cartera y pueden afectar a las funciones objetivo y/o a las restricciones que recogen el consumo de recursos, tal y como se recoge en los trabajos de Czajkowski y Jones (1986), Schmidt (1993), Dickinson et al. (2001), Zuluaga et al. (2007), Medaglia et al. (2007), Rabbani et al. (2010), Solak et al. (2010), entre otros. En estos trabajos se contemplan sólo sinergias entre dos proyectos. Frente a ellos, Santhanam y Kyparisis (1995) y, de forma más genérica, Stummer y Heidenberger (2003) y Carazo et al. (2010) plantean modelos en los que las sinergias se generalizan a grupos de proyectos, resultando modelos que ya no son lineales. El planteamiento realizado en este último trabajo será el que seguiremos para nuestra formalización del modelo en el epígrafe siguiente.

Por otro lado, las organizaciones demandan soluciones en este campo que les permitan una planificación de sus recursos a la vista de un cierto número de periodos temporales. Es decir, poder desarrollar políticas de estabilidad y continuidad que les lleven a alcanzar sus objetivos generales (económicos, sociales, ambientales,...) a medio-largo plazo. Es así como surge la necesidad de realizar, al mismo tiempo que la selección, una planificación de los proyectos de la cartera, en el marco temporal que determine la organización. En este contexto, debido a la complejidad resultante, son escasos los trabajos que podemos encontrar en la literatura (Sun y Ma, (2005)). La incorporación de este aspecto temporal permite flexibilizar el momento de inicio de los proyectos en el horizonte temporal considerado, y ello conlleva que puedan aparecer relaciones de precedencia entre algunos proyectos (Ghasemzadeh et al. (1999), Rabbani et al. (2010) y Solak et al. (2010)). Asimismo, este aspecto temporal facilita una mejor distribución de los recursos monetarios, ya que los que no sean utilizados en un periodo del horizonte temporal se pueden trasvasar al periodo siguiente, como se recoge en Zuluaga et al. (2007) y Medaglia et al. (2008). Cabe señalar que también podemos encontrar trabajos que consideran un horizonte temporal para la selección de proyectos, pero asumen que todos los proyectos comienzan en el primer periodo, como los de Dickinson et al. (2001), Stummer y Heidenberger (2003) y Doerner et al. (2004, 2006).

El último de los aspectos claves de esta selección involucra la imprecisión o desconocimiento que la organización pueda tener en relación a determinados aspectos del problema. Así, dado que el proceso de selección se realiza con anterioridad a la puesta en marcha de los proyectos, la información de la que se dispone puede venir afectada tanto por imprecisión como por desconocimiento. En particular, los datos relacionados con los presupuestos disponibles o las necesidades de recursos requeridas por cada proyecto para su ejecución, así como los beneficios que se esperan obtener, son los que pueden resultar más afectados. Debido a esto, es necesario introducir algún tipo de tratamiento de la información que permita incorporar la incertidumbre en el problema y que las soluciones obtenidas sean sólidas, aun cuando el ambiente en el que se desarrollen sea cambiante.

En los últimos años son cada vez más habituales los trabajos de selección y planificación temporal de carteras de proyectos en los que se utilizan técnicas estocásticas para tratar con la incertidumbre del problema. La teoría estocástica permite incluir la incertidumbre asociada a determinados parámetros de un problema determinista considerando que éstos son variables aleatorias acerca de los cuales se dispone de cierta información, por lo que la forma en la que trata con las imprecisiones se realiza siempre de una forma coherente y sistemática. En función a la cantidad y calidad de dicha información, los procedimientos a utilizar para plantear y resolver el problema estocástico que se origina son variados. En esta línea, la mayor parte de los trabajos desarrollados en optimización con incertidumbre desde el punto de vista estocástico pueden agruparse en dos grandes enfoques (Prékopa (1995), Ruszczyński y Shapiro (2003), Sahinidis (2004)): problemas con restricciones de recursos y programación probabilística.

En los problemas de recursos, la aleatoriedad viene dada por un conjunto de escenarios, cada escenario lleva asociada una probabilidad y las decisiones se llevan a cabo en dos o más etapas. En particular, estos problemas comprenden una clase especial de modelos de programación estocástica que permiten enfrentar la presencia de parámetros aleatorios mediante el uso de dos grupos de variables de decisión, un primer grupo elegido entre aquellas variables cuyo valor se toma independiente de la realización (futura) de los parámetros inciertos y, el otro, entre aquellas decisiones en respuesta a esa realización (recurso), que permiten dar la flexibilidad necesaria al modelo para evitar posibles infactibilidades debidas a dicha realización, tomando en consideración para la elección de una solución óptima las desviaciones o el valor esperado asociado a este recurso. Habitualmente, el objetivo que se persigue es elegir las variables del primer grupo de forma que la suma de los costes originados en la primera etapa y los valores esperados de los costes aleatorios de la segunda etapa sea mínima. Cabe señalar que la formulación estándar que se utiliza para este tipo de problemas es la dada por Kall y Wallace (1994) y Birge y Louveaux (1997). Por otro lado, este tipo de procedimiento se ha aplicado tanto a problemas lineales como no lineales de programación, aunque debemos tener presente que, habitualmente, las aplicaciones reales que se realizan, en su mayor parte en el ámbito de la ingeniería de diseño, suelen venir dadas por problemas que son no lineales en su formulación. Sin embargo, el mayor

inconveniente que presenta este enfoque es que no siempre es fácil conocer todas las probabilidades asociadas a cada escenario posible, así como que el número de escenarios puede crecer de forma exponencial cuando el problema que se resuelve presenta varios objetivos en su formulación, lo que conlleva a que estudiar todos los escenarios que aparecen se hace prácticamente imposible.

Este enfoque ha sido empleado en diversos trabajos aplicados al problema de la selección y planificación temporal de carteras de proyectos. Así, en Solak et al. (2010) encontramos un modelo de programación estocástica entera monobjetivo en varias etapas, en el que se incluye la incertidumbre endógena asociada a los parámetros estocásticos. En Klerides y Hadjiconstantinou (2010) se considera el problema de decidir cómo y cuándo ejecutar las distintas actividades de un proyecto para minimizar bien el tiempo de ejecución de éste, bien el coste total con respecto a la duración de dichas actividades, presuponiendo que la duración de las actividades es altamente incierta. En el trabajo de Liesiö y Salo (2011), encontramos un modelo que extiende el análisis de escenarios a problemas donde varios proyectos se seleccionan al mismo tiempo y no se tiene información completa acerca, tanto de las probabilidades de los escenarios, como de las preferencias del riesgo.

Por último, cabe resaltar el trabajo de Escudero et al. (2007), el cual, aunque es aplicado para resolver un problema de selección de carteras de valores (Mortgage-Backed Securities Portfolio Structuring Problem), es de interés pues utilizan esta metodología de forma que, en la primera etapa, hacen uso de variables binarias 0-1 y variables continuas, mientras que, en la segunda etapa, sólo consideran variables continuas. En este sentido, aunque los problemas de selección de carteras de proyectos y carteras de valores poseen ciertas características propias, no cabe duda acerca de la innegable relación que existe entre ellos en su formulación, lo que conlleva que compartan en gran medida tanto las metodologías que utilizan como los enfoques sobre los que se plantean los modelos teóricos que los originan.

El segundo enfoque, denominado programación probabilística, exige, por un lado, que las restricciones del problema se verifiquen con una determinada probabilidad y, por otro, ofrece la posibilidad de elegir un criterio para transformar la función o funciones objetivo, el cual ha de recoger una característica estadística del problema: valor esperado, desviación estándar, probabilidad máxima para un determinado cuantil (criterio mínimo riesgo), optimización del cuantil correspondiente a una probabilidad fijada (criterio de Kataoka),... El problema que resulta de aplicar la transformación, tanto en el/los objetivo/s, como en las restricciones, se denomina problema determinista equivalente y su solución óptima (eficiente cuando el problema es multiobjetivo) se considera solución óptima (eficiente) del problema original. La elección del criterio de transformación del objetivo estocástico determina qué problema determinista equivalente se obtiene, si bien, si se verifican determinadas hipótesis (Prékopa (1995)), es posible obtener la función de distribución del objetivo estocástico.

En cuanto a la transformación de la o las funciones objetivo, son varios los criterios definidos en la literatura, generando cada uno de ellos, de manera natural, un concepto de solución eficiente para un mismo problema estocástico (Caballero et al. (2002)), aunque existe una estrecha relación entre ellos (Caballero et al. (2000, 2001)). Así, los criterios de transformación de las funciones objetivo más utilizados son:

- (1) Eficiencia valor esperado: La idea básica es sustituir cada objetivo estocástico por su valor esperado, manteniendo el criterio de optimización del problema de partida. Su uso es apropiado cuando la dispersión de la función objetivo es pequeña, pero no lo es en los casos en los que la dispersión de la distribución es alta (Prékopa (1995)).
- (2) Eficiencia valor esperado mínima varianza: Este criterio, propuesto por Markowitz (1952) propone la búsqueda de soluciones eficientes valor esperado mínima varianza, de forma que se sustituye cada objetivo estocástico por su valor esperado y su varianza.
- (3) Máxima probabilidad: En este caso podemos distinguir dos criterios, que se basan en la idea de obtener soluciones buenas en términos de probabilidad. Se definen a partir de la función de

distribución de cada objetivo estocástico y su aplicación depende del criterio de optimización del problema de partida. En el caso de un problema de mínimo, sin pérdida de generalidad, tendríamos:

- (a) Eficiencia mínimo riesgo: El decisor fija un nivel de aspiración para cada objetivo estocástico y se maximiza la probabilidad de que dicho objetivo estocástico no supere dicho nivel. Este concepto de eficiencia fue formulado por Stancu-Minasian (1984) a partir de los trabajos de programación estocástica monobjetivo de Charnes y Cooper (1963), y Bereanu (1964).
- (b) Eficiencia en probabilidad: En este caso el decisor fija una probabilidad para cada objetivo estocástico y se minimiza el nivel que puede alcanzar el objetivo con la probabilidad fijada. Este criterio no es más que la extensión del concepto de óptimo de Kataoka (Kataoka (1963)) para problemas estocásticos monobjetivo.

Así pues, dado que cada uno de los criterios de eficiencia expuestos recoge unas características estadísticas concretas de cada función objetivo, la elección del criterio influye en el tipo de soluciones que se obtengan y, por tanto, debe hacerse de acuerdo con las preferencias del decisor. Esto implica que, cuando se resuelve un problema multiobjetivo estocástico, el decisor debe realizar una elección antes de resolver el problema, y, de entrada, debe facilitar información al analista, aun en el caso en el que se deseen aplicar técnicas sin información a priori. Sin embargo, aunque la tarea de decidir el criterio de transformación a utilizar puede parecer complicada de inicio para el decisor, sin disponer de información alguna acerca de la resolución del problema, ésta puede simplificarse a partir de las relaciones entre los conceptos de solución que se obtienen con cada uno de los procesos señalados anteriormente, lo que nos permite concluir que la aplicación del criterio de eficiencia en probabilidad con distintas probabilidades, lleva a poder presentar al centro decisor conjuntos de soluciones eficientes del problema con características estadísticas diferentes, que se corresponden con otros conceptos de eficiencia. De esta forma, se soslaya la necesidad de elegir a priori un criterio de transformación para los objetivos estocásticos.

Ahora bien, tal y como indican Muñoz y Ruiz (2009), el agente decisor debe tener en conocimiento, por un lado, que las funciones objetivo son variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas, es decir, los valores que realmente alcanzarán dichas funciones vendrán dados por las realizaciones de los datos estocásticos del problema. Y, por otro, que en un problema estocástico, existe una compensación entre el riesgo asumido y el nivel alcanzado por la función objetivo, por lo que la elección de una solución de entre dos soluciones eficientes con distintas probabilidades, dependerá del nivel de riesgo que el decisor esté dispuesto a asumir.

Por otro lado, en relación a la transformación de las restricciones estocásticas que presente el problema, también nos encontramos con que son varias las técnicas empleadas para ello en la literatura (Abdelaziz (2012)), destacando:

- Modelos que penalizan la violación de las restricciones (Prékopa (1995)) de forma que ésta se interpreta como un coste extra o una pérdida debida a la posible infactibilidad de la solución del problema, una vez que se han llevado a cabo las variables aleatorias del mismo.
- Modelos que consideran las restricciones como probabilísticas o de azar, donde se fija una probabilidad y se exige que se verifiquen las restricciones estocásticas con dicha probabilidad (Charnes et al. (1958)).

Cabe señalar que la mayor dificultad que genera la exigencia de la verificación de las restricciones con una cierta probabilidad, así como los criterios de transformación en las funciones objetivo, es que su aplicación pasa necesariamente por conocer la distribución de probabilidad de los parámetros implicados en el proceso. Esto es posible sólo en determinados casos y, por ello, se han desarrollado métodos de resolución basados en la simulación de Monte Carlo, aplicables cuando estas distribuciones de probabilidad no se conocen exactamente pero sí pueden ser simuladas a partir de otra información disponible.

Por otro lado, este enfoque de transformación estocástica también ha dado lugar a la generación de modelos de programación estocástica por metas, que fueron introducidos por Keown (1978) y Keown y Taylor III (1980). En general, en los problemas estocásticos de programación por metas se considera que el decisor no conoce con exactitud el valor de las metas, lo cual da lugar a que éstas sean consideradas como variables aleatorias.

Tal y como puede comprobarse en la literatura existente, la mayor parte de los trabajos que se han realizado en la selección de carteras de proyectos, desde la visión estocástica del problema, han seguido el segundo enfoque dado. Así, en el trabajo de Medaglia et al. (2007), se plantea un problema multiobjetivo de selección de proyectos en el que algunos datos del problema (costes, ingresos,...) se considera que son variables aleatorias. Para la interpretación del problema, se apoyan en el concepto de solución eficiente definido en Graves et al. (2000), en el que se transforma cada objetivo estocástico en su determinista equivalente aplicando, a la vez, los criterios valor esperado y de Kataoka. En el trabajo de Graves et al. (2000), sin embargo, se presupone que los coeficientes de las funciones objetivo son variables aleatorias con distribuciones de probabilidad que, o bien son conocidas, o bien pueden ser aproximadas fácilmente, por lo que no se hace necesario utilizar ningún método de simulación para ello.

Por otro lado, Gabriel et al. (2006) plantean un problema multiobjetivo para la selección de proyectos en el que el coste de cada proyecto es una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad conocida. Para abordar la incertidumbre inherente al problema, los autores generan valores de estas variables aleatorias mediante una simulación Monte Carlo que incorporan en las restricciones. En Laslo (2010) encontramos nuevamente la idea de planificar actividades dentro de los proyectos que intervienen en la cartera, haciendo uso, para ello, de la programación probabilística y técnicas de simulación para resolver el problema planteado. Shakhisi-Niaei et al. (2011) dividen el problema en dos etapas. En la primera, tratan de encontrar aquellas incertidumbres que presentan un mayor impacto en el ranking de los proyectos. En la segunda fase, el pre orden completo obtenido anteriormente se utiliza a través de una nueva simulación de Monte Carlo combinada con un módulo de programación entera para obtener la cartera final que satisfaga tanto las restricciones presupuestarias como otras restricciones lógicas que se incluyan en el proceso.

En el trabajo de Abdelaziz et al. (2007), se propone un modelo multiobjetivo en el que los parámetros estocásticos que intervienen son variables aleatorias normalmente distribuidas. En Aouni et al. (2005), la transformación del problema planteado al determinista equivalente se realiza utilizando el concepto de funciones de satisfacción, introducido por Martel y Aouni (1990), para el modelo de programación por metas. Así, presuponen que las metas están normalmente distribuidas y, en función a ello, realizan la transformación. Por otro lado, en el trabajo de Hasuike et al. (2009) encontramos un modelo en el que utilizan conceptos tanto de programación estocástica como difusa. Así, toman como variables aleatorias normalmente distribuidas los coeficientes de beneficios que aparecen en la función objetivo y, al mismo tiempo, consideran que las medias de dichos coeficientes vienen dadas por una función de pertenencia difusa.

En los trabajos de Sefair y Medaglia (2005, 2008) podemos encontrar modelos biobjetivo en los que se considera que el riesgo se puede medir a través de la varianza que sufren los valores netos actuales de los proyectos. En otra línea, el trabajo de Bendavid y Golany (2009) planifica actividades dentro de un proyecto en las que se considera que su duración es estocástica. Dichas duraciones se toman como variables aleatorias discretas con una función de probabilidad asociada desconocida pero limitada por unos intervalos dados.

Aunque el número de trabajos realizados es amplio, cabe señalar que, sin embargo, de todos los comentados hasta ahora, sólo en los trabajos de, Sefair y Medaglia (2005,2008), Solak et al. (2010) y Laslo (2010) se contempla la realización de la planificación temporal de las carteras de proyectos, dedicándose el resto únicamente al problema de la selección de éstas. De entre estos últimos, sólo en Laslo (2010) no se incluyen relaciones de precedencia entre los proyectos. Sin embargo, en ninguno de

éstos modelos se incluyen las relaciones de interdependencia o sinergias que pueden presentarse, bien en las funciones objetivo, bien en las restricciones.

En consecuencia, una vez vistas las características básicas de ambos tipos de herramientas estocásticas (programación por recursos y programación probabilística), la segunda de ellas es la que mejor se adapta al problema que vamos a plantear ya que, dado que éste presenta un carácter multiobjetivo, estudiar todos los escenarios posibles, así como obtener sus probabilidades, se antoja prácticamente imposible. Por tanto, utilizaremos la programación probabilística para incluir la incertidumbre en el problema de selección y planificación temporal de carteras de proyectos, de forma que obtendremos tanto un conjunto de funciones objetivo estocásticas como un conjunto de restricciones estocásticas, las cuales necesitarán ser transformadas a sus deterministas equivalentes para poder obtener las soluciones del problema.

Por último, en relación a los parámetros del problema que vamos a considerar que pueden presentar incertidumbre, supondremos que éstos pueden aparecer tanto en las funciones objetivo como en las restricciones de recursos renovables, por ser las más proclives a padecer variaciones a lo largo del horizonte temporal de ejecución de la cartera de proyectos. Además, tal y como hemos visto, la práctica totalidad de los trabajos existentes en la literatura, consideran habitual que la incertidumbre en este tipo de problemas aparezca en algunas de dichas expresiones.

Así, en el epígrafe dos realizamos una exposición del modelo teórico desarrollado, analizando en detalle tanto la función objetivo utilizada como las restricciones incluidas. En el epígrafe tres, mostramos el funcionamiento de dicho modelo aplicándolo a un ejemplo ilustrativo, analizando los resultados obtenidos. A continuación, en el epígrafe cuatro presentamos un estudio del funcionamiento del modelo a través de un conjunto aleatorio de 5.760 instancias. Y, por último, en el epígrafe cinco, concluimos las características más relevantes del estudio realizado y su aplicabilidad a este campo.

2. Modelo matemático

Tal y como hemos comentado anteriormente, el modelo que presentamos para la selección y planificación temporal de carteras de proyectos se enmarca dentro de la programación matemática estocástica multiobjetivo y, en particular, de la programación probabilística. En esta línea, consideramos que la incertidumbre puede presentarse en dos ámbitos bien diferenciados. Por un lado, en las funciones objetivo, a través tanto de los coeficientes de los proyectos (ventas, utilidad, beneficios, gastos, riesgo,...); como de los coeficientes que, dentro de las sinergias, indican el incremento o decremento que la activación de dichas sinergias produce en las funciones objetivo.

Y, por otro lado, en las restricciones de recursos renovables, a través tanto de los coeficientes que indican las necesidades de recursos que cada proyecto consume o precisa para poder ejecutarse; como, igualmente, por medio de los coeficientes relativos a los incrementos o decrementos en recursos que la activación de las sinergias genera en las restricciones. Y, por último, por la variación que puedan sufrir los recursos disponibles por la organización para hacer uso de ellos a lo largo del horizonte temporal de ejecución de la cartera de proyectos.

Por tanto, todos estos elementos que acabamos de describir los tomaremos como variables aleatorias en nuestro problema, para lo que, dado que en este contexto carecemos de datos históricos sobre los que poder determinar el tipo de variación que dichos elementos pueden sufrir, supondremos, de forma general, que estas variaciones siguen distribuciones de probabilidad normal, tal y como podemos encontrar en varios trabajos en la literatura (Aouni et al. (2005), Abdelaziz et al. (2007), Hasuike et al. (2009), Abdelaziz (2012)). Por tanto, el problema resultante es un problema estocástico multiobjetivo con variables aleatorias continuas cuya resolución pasa por la transformación del mismo en su determinista equivalente.

Así, dado un horizonte temporal de T periodos y un conjunto de I proyectos sobre los que realizar la selección, definimos las variables de decisión, x_{it} , de la siguiente forma:

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{si el proyecto } i \text{ comienza en el instante } t \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

donde $i = 1, 2, \dots, I$, $t = 1, 2, \dots, T$

Por tanto, de forma general, una cartera de proyectos viene representada por el vector $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1T}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2T}, \dots, x_{I1}, x_{I2}, \dots, x_{IT})$, de $T \cdot I$ variables binarias. Además, notamos como d_i ($i = 1, 2, \dots, I$) la duración temporal de cada uno de los proyectos implicados en el proceso, respectivamente, en meses, semestres, años,...

El modelo teórico que vamos a exponer a continuación, debido a su extensión y complejidad en algunas expresiones, lo dividiremos en dos bloques. En primer lugar, planteamos los aspectos relacionados con las funciones objetivo que definimos y los elementos estocásticos que aparecen en ellas; y, en segundo lugar, analizamos lo concerniente a las restricciones.

2.1. Funciones objetivo

La finalidad del modelo es seleccionar y planificar las mejores carteras en base a un conjunto de atributos u objetivos (productividad, beneficios, riesgos, etc...). Por tanto, se hace necesario conocer la información acerca de la contribución individual que cada uno de los proyectos que intervienen en las carteras proporciona a cada atributo considerado. Supongamos, pues, que esta contribución presenta incertidumbre en su formulación, por lo que notamos como \tilde{c}_{qiv} a la variable aleatoria que representa la aportación individual del proyecto i ($i = 1, 2, \dots, I$), en su instante de ejecución v ($v = 1, 2, \dots, d_i$), al objetivo q ($q = 1, 2, \dots, Q$). Suponemos, además, que dichas variables aleatorias siguen distribuciones normales con media y varianza conocidas, de forma que, para cada una de ellas, tenemos que

$$\tilde{c}_{qiv} \sim N(\bar{c}_{qiv}, \sigma_{\tilde{c}_{qiv}}^2) \quad (2)$$

De esta forma, en cada instante temporal k , el valor que se alcanza para el objetivo q -ésimo lo podemos calcular como:

$$Opt \tilde{F}_{qk}(x) = \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^k \tilde{c}_{q,i,k+1-t} \cdot x_{it} \quad (3)$$

ya que si el proyecto i es seleccionado y comienza a ejecutarse en el instante temporal t , entonces, se encuentra en su instante de ejecución $k + 1 - t$ en el periodo de tiempo k .

Ahora bien, no sólo debemos incluir las aportaciones individuales de cada proyecto a la cartera, ya que las sinergias o interrelaciones que pueden darse entre los proyectos seleccionados para conformarla producen, a su vez, variaciones (incrementos o decrementos) en los objetivos a considerar. Así, a fin de que dichas sinergias puedan producirse entre grupos de más de dos proyectos, consideramos conjuntos A_j , $j = 1, 2, \dots, s$, de proyectos en los que el decisor establece tanto el número mínimo (m_j) como el máximo (M_j) de éstos que han de estar activos para que dicha sinergia tenga lugar, en un cierto instante temporal k y para un cierto objetivo q . Así, la variación que producen se establece a través de los coeficientes N_{qjk} , que representan la variación porcentual con respecto a la contribución individual de cada proyecto del conjunto A_j , que se ha de producir en el objetivo q -ésimo al activarse dicha sinergia.

De esta forma, los objetivos anteriores quedan como sigue

$$Opt \tilde{F}_{qk}(x) = \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Z} g_{jk}(x) \cdot N_{qjk} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{c}_{q,i,k+1-t} \cdot x_{it} \right] \quad (4)$$

donde las funciones $g_{jk}(x)$ toman el valor '1' si el número de proyectos activos en el instante k está comprendido entre los valores m_j y M_j (es decir, la sinergia j -ésima se activa), y el valor '0' en otro caso. Obsérvese que, para cada proyecto i , su aportación individual a la función ha de verse modificada por todos los grupos de sinergias en los que participa y que son activos, por lo que, de ello, se sigue que $Z = \{j \in \{1, 2, \dots, s\} / i \in A_j\}$.

Notemos que, en el caso en el que la organización desee agregar la información por instantes temporales, podemos igualmente definir las funciones objetivo como sigue:

$$Opt \tilde{F}_q(x) = \sum_{k=1}^T w_{qk} \cdot \left(\sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Z} g_{jk}(x) \cdot N_{qjk} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{c}_{q,i,k+1-t} \cdot x_{it} \right] \right) \quad (5)$$

donde los elementos w_{qk} sirven al decisor para ponderar la agregación temporal, posibilitando así, por ejemplo, la inclusión de tasas de interés que permitan la agregación de valores en los distintos instantes temporales.

Por tanto, tenemos dos bloques de objetivos, de la siguiente forma:

$$Opt \begin{cases} \tilde{F}_q(x) = \sum_{k=1}^T w_{qk} \cdot \left(\sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Z} g_{jk}(x) \cdot N_{qjk} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{c}_{q,i,k+1-t} \cdot x_{it} \right] \right) & q = 1, 2, \dots, Q \\ \tilde{F}_{qk}(x) = \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Z} g_{jk}(x) \cdot N_{qjk} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{c}_{q,i,k+1-t} \cdot x_{it} \right] & q = Q + 1, \dots, \tilde{Q}, \\ & k = 1, 2, \dots, T \end{cases} \quad (6)$$

En el resto del proceso que describimos a continuación se considera que la agregación temporal se realiza, por lo que tratamos con funciones que presentan la formulación del primer bloque descrito anteriormente. Sin embargo, cabe señalar que el estudio, para el caso en el que dicha agregación no se realice, es análogo.

A fin de simplificar la notación a utilizar en la transformación de los objetivos estocásticos, agruparemos tanto coeficientes como variables en vectores de la siguiente forma: $(\tilde{C}_{qik})' = (\tilde{c}_{q,i,k}, \tilde{c}_{q,i,k-1}, \dots, \tilde{c}_{q,i,1})$ y $(X_{ik})' = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$, $q = 1, 2, \dots, Q$, $i = 1, 2, \dots, I$, $k = 1, 2, \dots, T$. Por tanto, en primer lugar tenemos que:

$$\sum_{t=1}^k \tilde{c}_{q,i,k+1-t} \cdot x_{it} = (\tilde{C}_{qik})' \cdot X_{ik} \sim N((\tilde{C}_{qik})' \cdot X_{ik}, (X_{ik})' \cdot \sigma_{\tilde{c}_{qik}}^2 \cdot X_{ik}) \quad (7)$$

donde $(\tilde{C}_{qik})' = (\tilde{c}_{q,i,k}, \tilde{c}_{q,i,k-1}, \dots, \tilde{c}_{q,i,1})$ y $\sigma_{\tilde{c}_{qik}}^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{c}_{qik}}^2 & \dots & \sigma_{\tilde{c}_{qik(1,k)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\tilde{c}_{qik(k,1)}} & \dots & \sigma_{\tilde{c}_{qik}}^2 \end{pmatrix}$ contienen, respectivamente, las medias y varianzas-covarianzas asociadas a cada uno de los elementos \tilde{c}_{qik} .

Por tanto, y a partir de las hipótesis anteriores, tenemos que las funciones objetivo estocásticas siguen la distribución normal $\tilde{F}_q(x) \sim N(\bar{F}_q(x), \sigma_{\tilde{F}_q}^2(x))$ donde

$$\bar{F}_q(x) = \sum_{k=1}^T w_{qk} \cdot \left(\sum_{i=1}^I \left(1 + \sum_{j \in Z} g_{jk}(x) \cdot N_{qjk} \right) \cdot (\bar{C}_{qik})' \cdot X_{ik} \right) \quad (8)$$

$$\sigma_{\tilde{F}_q}^2(x) = \sum_{k=1}^T (w_{qk})^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^I \left(1 + \sum_{j \in Z} g_{jk}(x) \cdot N_{qjk} \right)^2 \cdot (X_{ik})' \cdot \sigma_{\tilde{c}_{qik}}^2 \cdot X_{ik} \right) \quad (9)$$

Una vez llegados a este punto, se hace necesario que transformemos las funciones objetivo estocásticas que hemos obtenido en sus deterministas equivalentes. Los resultados comentados anteriormente nos llevan a elegir el criterio de eficiencia en probabilidad para nuestro problema, ya que, aplicando este criterio con distintas probabilidades, podemos presentar al decisor conjuntos de soluciones eficientes del problema con características estadísticas diferentes, que se corresponden con los otros conceptos de eficiencia, soslayando la necesidad de elegir a priori un criterio de transformación para los objetivos estocásticos.

Consideremos pues, sin pérdida de generalidad, el problema de minimización multiobjetivo estocástico:

$$\begin{aligned} & \text{Min } (\tilde{F}_1(x), \dots, \tilde{F}_Q(x)) \\ & \text{s. t. } x \in D \end{aligned} \quad (10)$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}^{T \cdot I}$ es el conjunto factible.

Dado un vector de probabilidades, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_Q)$, se dice que una solución factible $x^* \in D$ es eficiente con probabilidades α , si existe $\delta \in \mathbb{R}^Q$ tal que (x, δ) es una solución eficiente del problema determinista siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Min } (\delta_1, \dots, \delta_Q) \\ & \text{s. t. } P[\tilde{F}_q(x) \leq \delta_q] = \alpha_q, \quad q = 1, 2, \dots, Q \\ & \quad x \in D \end{aligned} \quad (11)$$

Dado que las funciones $\tilde{F}_q(x)$ siguen la distribución normal, es claro que, en este problema:

$$\delta_q = \bar{F}_q(x) + \phi^{-1}(\alpha_q) \cdot \sqrt{\sigma_{\tilde{F}_q}^2(x)}, \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (12)$$

donde ϕ^{-1} es la función de distribución normal estandarizada y el problema anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \left(\bar{F}_1(x) + \phi^{-1}(\alpha_1) \cdot \sqrt{\sigma_{\tilde{F}_1}^2(x)}, \dots, \bar{F}_Q(x) + \phi^{-1}(\alpha_Q) \cdot \sqrt{\sigma_{\tilde{F}_Q}^2(x)} \right) \\ & \text{s. t. } x \in D \end{aligned} \quad (13)$$

Y, de esta forma, las funciones objetivo estocásticas quedan transformadas en sus deterministas equivalentes al nivel de probabilidad fijado. Por tanto, pasamos a describir a continuación el conjunto de restricciones que van a definir el espacio de posibles carteras de proyectos a seleccionar.

2.2. Restricciones

3.1.1. Con elementos inciertos

En cuanto a las restricciones en las que intervienen elementos inciertos, éstas son aquéllas que involucran los recursos renovables de que dispone la organización para hacer uso de ellos en la ejecución del problema. Cabe mencionar que estas restricciones pueden llevarse a cabo tanto para distintas categorías de recursos ($u = 1, 2, \dots, U$), como para cada uno de los instantes temporales ($k = 1, 2, \dots, T$).

Supongamos que las cantidades de recursos mínimas y máximas de que dispone la organización en cada instante temporal para cada categoría, así como los recursos necesarios para la ejecución de cada proyecto, no son completamente conocidos. Por tanto, tomamos, por un lado, a $\bar{R}\bar{S}_{uk}$ como la variable aleatoria que representa los recursos máximos disponibles para la categoría u en el instante de tiempo k , de forma que sigue la distribución normal $\bar{R}\bar{S}_{uk} \sim N(\bar{R}\bar{S}_{uk}, \sigma_{\bar{R}\bar{S}_{uk}}^2)$ con valores conocidos. De igual forma, sea $\bar{R}\bar{I}_{uk}$ la variable aleatoria que representa los recursos mínimos que la organización quiere

emplear en la categoría u en el instante de tiempo k , de forma que sigue la distribución normal $\bar{R}I_{uk} \sim N(\bar{R}I_{uk}, \sigma_{\bar{R}I_{uk}}^2)$ con valores conocidos.

Y, por otro lado, tomemos a \tilde{r}_{uiv} como la variable aleatoria que representa los recursos que necesita, en la categoría u ($u = 1, 2, \dots, U$), el proyecto i ($i = 1, 2, \dots, I$) en su instante de ejecución v ($v = 1, 2, \dots, d_i$). De igual forma, consideramos que dichas necesidades siguen distribuciones normales con media y varianza conocidas, de forma que para cada una de ellas, tenemos que $\tilde{r}_{uiv} \sim N(\tilde{r}_{uiv}, \sigma_{\tilde{r}_{uiv}}^2)$.

Así, cada una de las restricciones de recursos queda definida de la siguiente forma:

$$\bar{R}I_{uk} \leq \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^k \tilde{r}_{u,i,k+1-t} \cdot x_{it} \leq \bar{R}S_{uk} \quad u = 1, 2, \dots, U, \quad k = 1, 2, \dots, T \quad (14)$$

Al igual que ocurre en las funciones objetivo, si el proyecto i es seleccionado y comienza a ejecutarse en el instante temporal t , entonces, se encuentra en su instante de ejecución $k + 1 - t$ en el periodo de tiempo k .

Ahora bien, no debemos olvidar que, cuando varios proyectos son llevados a cabo al mismo tiempo, es altamente probable que aparezcan relaciones de sinergias, ya que, por ejemplo, éstos pueden compartir determinados tipos de recursos. Estas interacciones las recogemos de forma equivalente a la formulación empleada en las funciones objetivo, por lo que definimos conjuntos A_j , $j = s + 1, s + 2, \dots, \hat{s}$, con las mismas características que los descritos en el epígrafe anterior. Por tanto, las restricciones formuladas anteriormente quedan de la siguiente forma:

$$\bar{R}I_{uk} \leq \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{r}_{u,i,k+1-t} \cdot x_{it} \right] \leq \bar{R}S_{uk} \quad (15)$$

$$u = 1, 2, \dots, U, \quad k = 1, 2, \dots, T$$

donde, en este caso, la cuantía porcentual sobre los recursos consumidos por el proyecto i -ésimo, en el instante temporal k , que cada conjunto de sinergias proporciona viene dada por P_{ujk} . De esta forma, los recursos precisados por dicho proyecto en ese instante temporal se ven modificados por los porcentajes marcados por cada grupo de sinergias que quede activo y en el que él participe, es decir, $Y = \{j \in \{s + 1, s + 2, \dots, \hat{s}\} / i \in A_j\}$.

Por último, no olvidemos que hay ocasiones en las que los recursos dispuestos por la organización en un instante temporal determinado no son agotados completamente, por lo que ésta puede plantearse trasvasar los sobrantes al instante temporal posterior, de forma que puedan ser consumidos en éste. Esto nos lleva a que los recursos disponibles en un instante temporal se vean incrementados por la diferencia entre los recursos disponibles y los utilizados en el instante temporal anterior, siendo necesario utilizar, en algunas ocasiones, tasas de interés que capitalicen su valor en el tiempo. Así, incluyendo la posibilidad de trasvasar recursos, las restricciones anteriores quedan como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{R}I_{uk} &\leq \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{r}_{u,i,k+1-t} \cdot x_{it} \right] \leq \bar{R}S_{uk} + \\ &+ \gamma_u \cdot \left[\bar{R}S_{u,k-1} - \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Y} g_{j,k-1}(x) \cdot P_{u,j,k-1} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{r}_{u,i,k-t} \cdot x_{it} \right] \right] \cdot (1 + tasa_u(k)) \quad (16) \end{aligned}$$

$$u = 1, 2, \dots, U, \quad k = 1, 2, \dots, T$$

donde el operador γ_u será igual a '1' si se permite trasvasar recursos de un instante temporal al siguiente en la categoría de recursos u , e igual a '0' en caso contrario. Así como $tasa_u(k)$ representa la tasa de interés aplicada al trasvase en el instante temporal k para la categoría de recursos u ; y definimos $\bar{R}S_{u0}$ y

P_{uj0} como iguales a cero ya que, en el primer instante temporal de planificación, no pueden existir recursos que se trasvasen del instante anterior.

Cada una de las restricciones anteriormente formuladas puede descomponerse en dos restricciones de la forma:

$$\bar{R}I_{uk} \leq \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{r}_{u,i,k+1-t} \cdot x_{it} \right] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{r}_{u,i,k+1-t} \cdot x_{it} \right] \leq \bar{R}\bar{S}_{uk} + \\ & + \gamma_u \cdot \left[\bar{R}\bar{S}_{u,k-1} - \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Y} g_{j,k-1}(x) \cdot P_{u,j,k-1} \right) \cdot \sum_{t=1}^k \tilde{r}_{u,i,k-t} \cdot x_{it} \right] \right] \cdot (1 + tasa_u(k)) \quad (18) \\ & u = 1, 2, \dots, U, \quad k = 1, 2, \dots, T \end{aligned}$$

Y, cada una de estas dos, las podemos escribir, respectivamente, de forma equivalente como:

$$\tilde{z}_{uk}(x) = \bar{R}I_{uk} - \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk} \right) \cdot (\tilde{R}_{uik})' \cdot X_{ik} \right] \leq 0 \quad (19)$$

$$\tilde{y}_{uk}(x) = \sum_{i=1}^I (\tilde{R}_{uik})' \cdot D_{uik}(x) - (\bar{R}\bar{S}_{uk} + \gamma_u \cdot \bar{R}\bar{S}_{u,k-1} \cdot (1 + tasa_u(k))) \leq 0 \quad (20)$$

$$u = 1, 2, \dots, U, \quad k = 1, 2, \dots, T$$

donde:

- $(\tilde{R}_{uik})' = (\tilde{r}_{u,i,k}, \tilde{r}_{u,i,k-1}, \dots, \tilde{r}_{u,i,1})$
- $D_{uik}(x) = \begin{pmatrix} x_{i1} \cdot (1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk}) \\ x_{i2} \cdot (1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk}) + x_{i1} \cdot (1 + \sum_{j \in Y} g_{j,k-1}(x) \cdot P_{u,j,k-1}) \cdot \gamma_u \cdot (1 + tasa_u(k)) \\ \vdots \\ x_{ik} \cdot (1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk}) + x_{i,k-1} \cdot (1 + \sum_{j \in Y} g_{j,k-1}(x) \cdot P_{u,j,k-1}) \cdot \gamma_u \cdot (1 + tasa_u(k)) \end{pmatrix}$

Y, por tanto, cada $\tilde{z}_{uk}(x)$ sigue una distribución normal con media y varianza conocidas:

$$\bar{z}_{uk}(x) = \bar{R}I_{uk} - \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk} \right) \cdot (\bar{R}_{uik})' \cdot X_{ik} \right] \quad (21)$$

$$\sigma_{\tilde{z}_{uk}}^2(x) = \sigma_{\bar{R}I_{uk}}^2 + \sum_{i=1}^I \left[\left(1 + \sum_{j \in Y} g_{jk}(x) \cdot P_{ujk} \right)^2 \cdot (X_{ik})' \cdot \sigma_{\tilde{R}_{uik}}^2 \cdot X_{ik} \right] \quad (22)$$

Y, de la misma forma, cada $\tilde{y}_{uk}(x)$ sigue una distribución normal con media y varianza conocidas:

$$\bar{y}_{uk}(x) = \sum_{i=1}^I (\bar{R}_{uik})' \cdot D_{uik}(x) - (\bar{R}\bar{S}_{uk} + \gamma_u \cdot \bar{R}\bar{S}_{u,k-1} \cdot (1 + tasa_u(k))) \quad (23)$$

$$\sigma_{\tilde{y}_{uk}}^2(x) = \sum_{i=1}^I (D_{uik}(x))' \cdot \sigma_{\tilde{R}_{uik}}^2 \cdot D_{uik}(x) + (\sigma_{\bar{R}\bar{S}_{uk}}^2 + \gamma_u^2 \cdot \sigma_{\bar{R}\bar{S}_{u,k-1}}^2 \cdot (1 + tasa_u(k))^2) \quad (24)$$

con, $(\bar{R}_{uik})' = (\bar{r}_{u,i,k}, \bar{r}_{u,i,k-1}, \dots, \bar{r}_{u,i,1})$ y $\sigma_{\bar{r}_{uik}}^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{\bar{r}_{uik}}^2 & \cdots & \sigma_{\bar{r}_{ui(1,k)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\bar{r}_{ui(k,1)}} & \cdots & \sigma_{\bar{r}_{ui1}}^2 \end{pmatrix}$ que recogen, respectivamente, las medias y varianzas-covarianzas de los elementos \bar{r}_{uik} .

Es decir, obtenemos un conjunto de restricciones estocásticas que, mediante las técnicas de programación estocástica, requiere la transformación de cada una de ellas en su determinista equivalente.

En nuestro caso, para que la transformación esté orientada en la misma dirección que la realizada en las funciones objetivo, optamos por considerar las restricciones como probabilísticas o de azar. Así, dados $\beta_{uk} \in (0, 1)$, $u = 1, 2, \dots, U$, $k = 1, 2, \dots, T$, determinados por la organización, la transformación de las restricciones se realiza buscando que éstas se verifiquen con una probabilidad de, al menos, β_{uk} . Por tanto, la restricción estocástica se transforma en:

$$P[\bar{z}_{uk}(x) \leq 0] \geq \beta_{uk} \quad \text{y} \quad P[\bar{y}_{uk}(x) \leq 0] \geq \beta_{uk} \quad (25)$$

Por lo que, sabiendo que cada $\bar{z}_{uk}(x)$ y cada $\bar{y}_{uk}(x)$ siguen la distribución normal, podemos transformar las expresiones anteriores, llegando a:

$$\bar{z}_{uk}(x) + \phi^{-1}(\beta_{uk}) \cdot \sqrt{\sigma_{\bar{z}_{uk}}^2(x)} \leq 0 \quad (26)$$

$$\bar{y}_{uk}(x) + \phi^{-1}(\beta_{uk}) \cdot \sqrt{\sigma_{\bar{y}_{uk}}^2(x)} \leq 0 \quad (27)$$

De esta forma, el conjunto de restricciones estocásticas queda transformado en su determinista equivalente. Como, cada restricción estocástica de partida, posee tanto cotas superiores como inferiores, su transformación ha dado lugar a un conjunto de restricciones deterministas equivalentes cuyo número es igual al doble del que teníamos originalmente. Sin embargo, aunque pueda parecer que esto implique mayor carga computacional para el problema, esto no es del todo cierto puesto que, aunque originalmente las teníamos formuladas como una única restricción, implicaban una doble comparación que, igualmente, es lo que realizamos ahora con las transformadas, sólo que de forma independiente.

3.1.2. Sin elementos inciertos

El resto de restricciones del modelo propuesto se corresponden con las especificadas a continuación:

- *Restricciones relativas a las sinergias entre proyectos*

Estas dos restricciones son de tipo técnico, y nos aseguran que las funciones $g_{jk}(x)$ tomen el valor '1' cuando el número de proyectos activos se encuentre dentro de las cotas m_j y M_j definidas por el decisor.

Para ello, se definen dos funciones que aseguren el cumplimiento de estas cotas, respectivamente, de la forma siguiente:

$$g_{jk}^m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_j \leq \sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^k x_{it} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_{jk}^M(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } M_j \geq \sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^k x_{it} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (28)$$

Por tanto, $g_{jk}(x) = g_{jk}^m(x) \cdot g_{jk}^M(x)$, es decir, $g_{jk}(x)$ será igual '1' si ambas funciones son iguales a '1' o, lo que es lo mismo, si se verifican ambas cotas. Entonces, las restricciones que se definen son:

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^k x_{it} \right) - m_j + 1 &\leq I \cdot g_{jk}^m(x) \leq \left(\sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^k x_{it} \right) - m_j + I \\
 M_j - \left(\sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^k x_{it} \right) + 1 &\leq I \cdot g_{jk}^M(x) \leq M_j - \left(\sum_{i \in A_j} \sum_{t=k-d_i+1}^k x_{it} \right) + I
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$j = 1, 2, \dots, \hat{s}$$

donde, recordemos que cada d_i representa la duración temporal del proyecto i -ésimo.

- *Restricciones lineales temporales.*

En este tipo de restricciones, la organización puede incluir requisitos en relación con los proyectos que están activos en cada instante temporal k , pero que no dependen del momento interno en el que se encuentre cada proyecto seleccionado. Se definen unos límites inferiores ($\underline{b}(k)$) y superiores ($\bar{b}(k)$), además de la matriz de coeficientes ($B(k)$).

$$\underline{b}(k) \leq B(k) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{t=k-d_1+1}^k x_{1t} \\ \vdots \\ \sum_{t=k-d_j+1}^k x_{jt} \end{pmatrix} \leq \bar{b}(k) \quad k = 1, 2, \dots, T \tag{30}$$

Estas restricciones permiten, por ejemplo, que la organización limite el número de proyectos que pueden estar activos en un mismo periodo temporal o que fuerce a que un determinado porcentaje de un grupo de proyectos sí se lleve a cabo.

Este conjunto de restricciones también puede recoger la disponibilidad temporal de algunos recursos si el consumo de ellos no depende del instante de ejecución en el que se encuentre cada proyecto activo, y no existen relaciones de interdependencia entre dichos proyectos.

- *Restricciones lineales globales.*

Son equivalentes a las anteriores, pero sin depender del instante temporal en el que nos encontremos. Su formulación es la siguiente:

$$\underline{b} \leq B \cdot \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T x_{1t} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T x_{It} \end{pmatrix} \leq \bar{b} \tag{31}$$

donde \underline{b} y \bar{b} son, respectivamente, las cotas inferiores y superiores marcadas por la organización; y B es la matriz de coeficientes.

Con este conjunto de restricciones, la organización puede limitar, por ejemplo, que sólo se seleccione una única versión de entre varias de un mismo proyecto.

- *Restricciones de obligatoriedad y de unicidad.*

Estas restricciones nos aseguran que cada proyecto sólo puede comenzar una única vez y, además, a través de la cota inferior (CL_i) podemos forzar la ejecución obligatoria de los proyectos que la organización quiera llevar a cabo bajo cualquier condición.

$$CL_i \leq \sum_{t=1}^T x_{it} \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (32)$$

- *Restricciones sobre el instante de inicio.*

Dado un conjunto E de proyectos, este tipo de restricciones restringe los periodos en los que pueden iniciarse cada uno de dichos proyectos. Las cotas ρ_i y τ_i nos proporcionan el límite temporal en el que cada proyecto puede comenzar, de forma que, como conocemos la duración de cada uno de ellos (d_i), conoceremos, automáticamente, el instante de finalización. Así, dado un subconjunto E del total de proyectos, con estas restricciones podemos forzar a que determinados proyectos, de seleccionarse, lo hagan en unos determinados instantes temporales definidos por la organización. Y su formulación queda como sigue:

$$\rho_i \cdot \sum_{t=1}^T x_{it} \leq \sum_{t=1}^T t \cdot x_{it} \leq \tau_i \quad i \in E \quad (33)$$

- *Restricciones de precedencia.*

Con estas restricciones, la organización puede incluir tantas relaciones de precedencia entre los proyectos implicados como estime oportuno. Además, también puede fijar el número de instantes temporales mínimo y máximo que ha de transcurrir entre los proyectos para que éstos se lleven a cabo.

Por tanto, en primer lugar, dado un conjunto P_l de proyectos precursores para el proyecto l , estas restricciones nos aseguran que el proyecto l no puede ser seleccionado si no lo son sus precursores:

$$\sum_{t=1}^T x_{it} \geq \sum_{t=1}^T x_{lt} \quad i \in P_l \quad l \in L \quad (34)$$

donde L es el conjunto de proyectos para los que existen relaciones de precedencia.

Ahora bien, de igual forma, podemos modelizar que el proyecto l no pueda ser seleccionado si no han transcurrido, al menos, h_i períodos del inicio de sus precursores, y no más de H_i períodos, tal y como sigue:

$$\sum_{t=1}^T x_{it} \left(\sum_{t=1}^T t \cdot x_{it} + h_i \right) \leq \sum_{t=1}^T t \cdot x_{lt} \leq \sum_{t=1}^T t \cdot x_{lt} + H_i \quad i \in P_l \quad l \in L \quad (35)$$

Por tanto, el modelo final obtenido es un problema de programación matemática multiobjetivo de variables binarias en el que la formulación inicial estocástica ha sido transformada a una determinista equivalente. Cabe señalar que la información de partida que ha de poseer la organización con respecto a las variables aleatorias estocásticas que intervienen en el problema se reduce a los datos correspondientes tanto a las medias de dichas variables, como a sus varianzas. De esta forma, el problema planteado puede ser resuelto para cualesquiera probabilidades de transformaciones que dicha organización considere oportunas aplicar.

A continuación, pasaremos a mostrar la operatividad del modelo propuesto a través de un ejemplo sencillo, de forma que podamos analizar los resultados que se obtienen.

3. Ejemplo ilustrativo

Una importante entidad financiera española va a realizar un proceso de selección acerca de qué Grandes Premios de la Fórmula 1 va a patrocinar durante los próximos 4 años. En la tabla adjunta (Tabla 1) se pueden apreciar cuáles son los 10 Grandes Premios que son susceptibles de ser patrocinados, así como el número de temporadas por las que se pueden adquirir los derechos para cada uno de ellos.

Tabla 1. Grandes Premios (proyectos) candidatos a ser patrocinados

Grandes Premios (Proyectos)	Temporadas a financiar (Duración)
1. Gran Premio de Australia	2
2. Gran Premio de Bahrein	1
3. Gran Premio de China	4
4. Gran Premio de España	2
5. Gran Premio de Mónaco	4
6. Gran Premio de Europa (Valencia)	1
7. Gran Premio de Inglaterra	4
8. Gran Premio de Italia	2
9. Gran Premio de Singapur	2
10. Gran Premio de Brasil	2

La entidad determina que posee dos únicos objetivos a conseguir, de forma global para los cuatro años. Éstos son, por un lado, los beneficios directos que espera obtener a través de la publicidad y, por otro, los ingresos por ventas de productos financieros que espera colocar, a posteriori, entre la población local del lugar en el que se celebre el Gran Premio (G.P.). Ambas funciones, así como las restricciones de recursos pertinentes que veremos a continuación, las van a medir en unas ciertas unidades monetarias (u.m.) que ellos determinarán. Por otro lado, asociada a la función objetivo de ingresos por ventas de productos financieros, la entidad considera que, si patrocina los dos Grandes Premios que se celebran en España en la tercera temporada de la planificación, obtendrá unos ingresos extras en la venta de productos financieros debidos a la situación económica que atravesará el país, según sus informes, en esas fechas.

Por otro lado, las propuestas de patrocinio de cada G.P. incluyen la necesidad de dos tipos de recursos renovables. En primer lugar, para los gastos destinados a las inversiones en carteles, vallas, protecciones, ... en las que aparecerá su nombre y logotipo. Y, en segundo lugar, los recursos destinados a la contratación del personal que se encargará de colocar dicho material, así como velar por su buen estado y conservación a lo largo de las temporadas que se mantenga el patrocinio. Para cada uno de estos dos tipos de recursos, la entidad posee un presupuesto máximo que utilizar (aunque no uno mínimo) y, en caso de no agotarlo en una temporada, el sobrante no lo reinvertirá en futuras temporadas.

Además, para la segunda y tercera temporadas, la entidad quiere limitar, tanto inferior como superiormente, el importe total del gasto en entradas a los G.P. que regala a su personal de dirección para asistir al conjunto de éstos que resulten ser patrocinados en dichas temporadas. Por otro lado,

también posee unos límites presupuestarios para, de forma diferenciada, hacer frente a los gastos en vuelos, alojamiento y dietas, a lo largo del proceso completo.

La entidad no considera obligatorio tener que patrocinar ningún Gran Premio en particular, pero, sin embargo, sí impone limitaciones acerca de la temporada en la que comenzará el patrocinio para cada Gran Premio. Además, la entidad nos confirma que, debido a las condiciones del mercado, el Gran Premio de España no puede ser patrocinado si el Gran Premio de Mónaco no ha comenzado a serlo dos temporadas antes.

Por último, la entidad considera que toda la información relativa a los dos objetivos (beneficios directos y ventas de productos financieros), así como al gasto en equipamiento y al del personal, puede presentar variación a lo largo de las próximas temporadas, debido a las cambiantes condiciones del mercado financiero mundial. Por tanto, para que los resultados reflejen en la medida de lo posible la inestabilidad actual, considera que debe suponer que todos estos valores pueden sufrir cambios en torno al 25% ó 30% de sus respectivos valores dados.

Preguntada acerca de las probabilidades de las transformaciones, la entidad estima que desea que el objetivo de beneficios directos se verifique con una probabilidad de 0.75 ó 0.8, y el objetivo de ventas de productos financieros con 0.7. Y, en relación a las restricciones de recursos, considera que la restricción relativa al equipamiento debe verificarse, al menos, con probabilidad 0.8, y la de personal con 0.6.

Pues bien, a partir de esta información y de los datos correspondientes a ella, esta entidad ha de afrontar el reto de decidir qué proyectos son los que va a financiar, puesto que las limitaciones de recursos, principalmente, que presenta le hace imposible poder financiar todos los proyectos presentados.

En cuanto al enunciado del problema, la primera tarea que debemos realizar es su formulación. Por tanto, y en el orden en el que aparece en el enunciado, tenemos:

- Dos funciones objetivo: beneficios y ventas.
- Una sinergia positiva entre los proyectos 4 y 6 que actúa sobre la segunda función objetivo en el tercer instante del horizonte temporal.
- Dos restricciones de recursos renovables: gastos en material y en personal (sin arrastre del presupuesto sobrante).
- Dos restricciones lineales temporales (gasto en entradas), una en el segundo instante del horizonte temporal y otra en el tercero.
- Tres restricciones lineales globales: vuelos, alojamientos y dietas.
- Sin proyectos de obligado cumplimiento.
- Con restricciones de instantes de inicio para los proyectos seleccionados.
- Una relación de precedencia por la que el proyecto 5 no puede comenzar si el 4 no lo ha hecho con dos instantes temporales de antelación.
- Incertidumbre en los datos que aparecen tanto en las dos funciones objetivo, como en las dos restricciones de recursos renovables.

Así, una vez planteado el problema y realizadas las cuatro resoluciones (en función a las probabilidades de las transformaciones y las variabilidades utilizadas), en la Tabla 2 podemos comprobar los tiempos de resolución que se han obtenido en cada una de ellas, así como el número de puntos eficientes obtenido en las fronteras eficientes. Los tiempos por punto eficiente obtenidos difieren entre sí, de forma que las dos resoluciones en las que la variabilidad de los datos se ha permitido que sea del 30% sobre la media, el tiempo por punto eficiente es 4 seg. menor, aproximadamente, que las resoluciones en las que la variabilidad sobre la media es del 25%.

Tabla 2. Resultados obtenidos bajo el enfoque estocástico

Probabilidades Ben / Ventas / Equip / Personal	Variabilidad	Tiempo (seg.)	Núm Ptos Eficientes	Seg/Pto
0.8/0.7/0.8/0.6	25%	34.34	3	11.45
0.8/0.7/0.8/0.6	30%	37.85	5	7.57
0.75/0.7/0.8/0.6	25%	33.38	3	11.13
0.75/0.7/0.8/0.6	30%	37.52	5	7.5

En la Tabla 3, podemos apreciar los valores alcanzados en las funciones objetivo por cada una de las carteras eficientes que hemos ido obteniendo con las distintas probabilidades de resolución utilizadas. A simple vista parece que mientras mayor es la probabilidad exigida en las transformaciones, peores son los valores obtenidos en las funciones objetivo por los puntos que conforman las fronteras eficientes. Cabe resaltar que, para el caso en los que se permite una misma variabilidad sobre la media de los datos, los valores que se alcanzan en el objetivo de ventas son los mismos para las dos probabilidades con las que se transforma la función objetivo primera, lo cual era de esperar puesto que tanto la segunda función objetivo como las dos restricciones de recursos se transforman con las mismas probabilidades.

Tabla 3. Valores alcanzados por las carteras eficientes en las funciones objetivo

Probabilidades Ben / Ventas / Equip / Personal	Variabilidad	Cartera	Beneficios	Ventas
0.8/0.7/0.8/0.6	25%	1	609.77	693.75
		2	459.38	720.9
		3	530.77	694
0.8/0.7/0.8/0.6	30%	1	494	630.43
		2	451.67	714.72
		3	495.69	613.56
		4	497.83	539.38
		5	557.3	534.59
0.75/0.7/0.8/0.6	25%	1	619.17	693.75
		2	467.04	720.9
		3	539.55	694
0.75/0.7/0.8/0.6	30%	1	505.79	613.56
		2	460.86	714.72
		3	504.49	630.43
		4	568.41	534.59
		5	507.98	539.38

Ahora bien, para poder analizar mejor la relación que puede existir entre las cuatro fronteras eficientes que hemos obtenido, vamos a dibujarlas todas en una gráfica. En consecuencia, obtenemos una gráfica como la representada en la Figura 1, en la cual podemos comprobar que, efectivamente, existe una relación entre las distintas fronteras eficientes, y es que, si las agrupamos por variabilidad permitida en los datos, éstas se dominan entre sí. Así, cuando el valor fijado como probabilidad en la transformación es

menor, a igual variabilidad en los datos, los valores obtenidos en la función objetivo primera son mayores.

Además, también podemos comprobar que los valores alcanzados por las dos funciones objetivo son mejores cuando la variabilidad permitida en los datos es menor, mientras que éstos empeoran al aumentar dicha variabilidad.

Si, por tanto, comprobamos de forma general las cuatro fronteras eficientes podemos llegar a la conclusión de que, en este caso, una menor o mayor variación de los datos de partida repercute en mayor medida en los resultados obtenidos que una variación en la probabilidad exigida en la transformación de la función objetivo de beneficios.

Por tanto, a la vista de los resultados, podemos hacerle ver a la entidad financiera que debe cerciorarse acerca de la variación que pueden sufrir los coeficientes, puesto que una variación de un 5% repercute de forma considerable en los valores alcanzados en las fronteras eficientes de forma general.

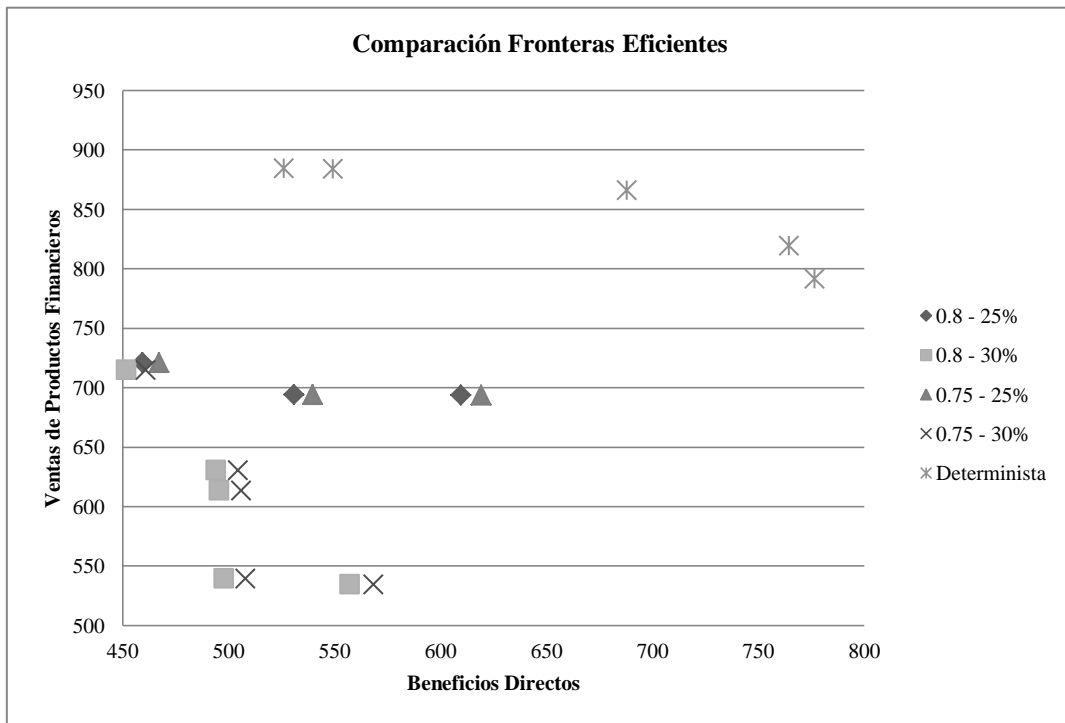


Figura 2.5. Fronteras eficientes obtenidas con distintas probabilidades en las transformaciones

Por otro lado, en la Figura 1 también hemos introducido los valores de los resultados que se obtendrían resolviendo el problema sin considerar incertidumbre en la información dada. Así, podemos comprobar que se obtienen mejores valores en las funciones objetivo, lo cual era de esperar, dado que en este caso no se consideran posibles variaciones en los coeficientes de partida.

Por último, aunque las organizaciones deben ser las que determinen y fijen las probabilidades a utilizar en las transformaciones de las funciones objetivo y/o de las restricciones, bien es cierto que este tipo de información no suele ser fácil de determinar por ellas. Debido a esto, es tarea del analista informar acerca de todas las características del problema, así como, en su caso, ofrecerle una gráfica en la que se incluyan distintas resoluciones según las posibles opciones, similar a la mostrada anteriormente, y de esta forma, hacerle ver las características principales, así como las implicaciones que cualquier decisión acerca de la probabilidad que elijan conlleva, a fin de ayudar a los responsables a tomar la determinación más acertada a sus expectativas.

Para concluir el estudio de los resultados obtenidos con el ejemplo, mostraremos la composición de las carteras de proyectos de una de las fronteras calculadas. En particular, supongamos que la entidad financiera nos indica que está interesada en ver detenidamente las carteras de proyectos asociadas a la frontera de probabilidad 0.75 para el objetivo de beneficios y con un 30% de variación sobre la media permitida en los datos. En este caso, la información que le mostramos es la que aparece en la Tabla 4.

Tabla 4. Carteras eficientes al nivel de probabilidad 0.75

Beneficios	505.79	Beneficios	460.86	Beneficios	504.49
Ventas	613.56	Ventas	714.72	Ventas	630.43
Proyecto	Inicio	Proyecto	Inicio	Proyecto	Inicio
2. G. P. Bahrein	4	3. G. P. China	3	2. G. P. Bahrein	3
3. G. P. China	3	4. G. P. España	3	4. G. P. España	3
4. G. P. España	3	5. G. P. Mónaco	1	5. G. P. Mónaco	1
5. G. P. Mónaco	1	6. G. P. Europa (Valencia)	3	6. G. P. Europa (Valencia)	3
6. G. P. Europa (Valencia)	3	7. G. P. Inglaterra	3	8. G. P. Italia	4

Beneficios	568.41	Beneficios	507.98
Impacto	534.59	Impacto	539.38
Proyecto	Inicio	Proyecto	Inicio
2. G. P. Bahrein	4	4. G. P. España	3
4. G. P. España	3	5. G. P. Mónaco	1
5. G. P. Mónaco	1	8. G. P. Italia	3
8. G. P. Italia	3	9. G. P. Singapur	3

Así, cabe destacar que hay dos proyectos que nunca se llevarían a cabo (G.P. Australia y G.P. Brasil), por lo que serían proyectos a descartar si la entidad financiera desea elegir sobre estos niveles de probabilidad y esta variabilidad. Además, los únicos proyectos que se mantienen a lo largo de todas las carteras eficientes de esta frontera son el G.P. España y el G.P. Mónaco, por lo que, al contrario que el anterior, se deben convertir en firmes candidatos a formar parte de la cartera elegida.

Si, por otro lado, comparamos los resultados aquí obtenidos con los que se obtienen con el modelo sin incertidumbre, habría que destacar que la introducción de incertidumbre en el problema lleva a que, por ejemplo, el G.P. Australia deje de formar parte de las carteras eficientes pues forma parte en tres de la cinco carteras eficientes que se obtienen con el modelo determinista, mientras que, en este caso, no aparece en ninguna de las carteras eficientes.

Sin embargo, a pesar de la introducción de incertidumbre en los datos, los Grandes Premios de España y Mónaco siguen formando parte de todas las carteras eficientes, lo cual nos llevaría a afirmar a la entidad financiera que debe patrocinarlos en cualquier caso, pues son proyectos que, independientemente de la precisión o variación que presente la información de partida, su inclusión provoca una mejora sustancial en los dos objetivos definidos.

En resumen, a la vista de los resultados obtenidos, parece que éstos varían en función, tanto a las probabilidades de transformación que fije la organización, como a la variación que puedan sufrir los datos de partida, lo cual conducirá a unas fronteras eficientes u otras. Por tanto, éstas se convierten en un

elemento fundamental y básico en este tipo de problemas ya que, de su elección, dependerá de forma contundente la forma que tomen los resultados obtenidos.

Debido a esto, parece lógico que el estudio de este problema requiere una mayor profundidad en cuanto a los cambios que ambos elementos producen en los tiempos de computación y, por ende, en los resultados obtenidos a posteriori. En consecuencia, creemos necesario realizar un estudio sobre un conjunto de instancias de prueba, lo suficientemente amplio y variado, en el que podamos analizar de forma detenida la forma en la que tanto la probabilidad elegida en las transformaciones, como la amplitud en la variación de los datos de las distribuciones normales, afectan a la resolución de los problemas.

Por otro lado, dicho estudio nos proporcionará también datos suficientemente fiables como para determinar si el modelo que hemos descrito es estable ante diferentes tipos de problemas, así como su comportamiento general cuando el número de objetivos, el de proyectos que intervienen y el de instantes que posea el horizonte temporal sobre el que se realice la planificación, aumentan de forma considerable, pues no debemos olvidar que el ejemplo que acabamos de utilizar presenta unos números relativamente bajos en estos aspectos.

4. Análisis de la Implementación en relación a las Probabilidades fijadas

Comprobaremos entonces el comportamiento del modelo presentado de selección y planificación temporal de carteras de proyectos a partir de los experimentos computacionales llevados a cabo. Tales experimentos los hemos realizado sobre un conjunto de instancias de prueba generadas de forma aleatoria, las cuales abordan múltiples factores, tales como: número de objetivos, de instantes temporales y proyectos implicados; correlaciones existentes entre los objetivos;... Para ello, hemos hecho uso de una versión más actualizada del generador de instancias descrito en Carazo et al. (2010). En particular, hemos modificado dicho generador original para que pueda proporcionar, al mismo tiempo, la información adicional que requiere el modelo propuesto, es decir, los datos relacionados con las medias y varianzas que siguen las distribuciones normales asociadas a los coeficientes de las funciones objetivo, los de las restricciones de recursos, así como los recursos totales disponibles en cada instante temporal de cada categoría.

En consecuencia, se generan tanto los valores medios que pueden tomar los coeficientes implicados, como las varianzas que pueden sufrir. Dichas varianzas se generan a partir de desviaciones con respecto a los valores medios obtenidos para los coeficientes, de forma que éstas se calculan como una variación con respecto a dichos valores en una cuantía igual al 5%, 10%, 20%, 35% y 50% de éste. Es importante mencionar que, puesto que uno de los objetivos que también perseguimos con este análisis es, como en el caso anterior, poder comparar los resultados obtenidos a través de los distintos valores otorgados y comprobar el comportamiento que presentan las instancias al ir cambiando la variación que sufren los datos, para cada instancia generada hemos tomado dicha variación en igual proporción para todos los coeficientes que intervienen en ella.

Por otro lado, en cuanto a las probabilidades que se fijan en el problema determinista equivalente para las funciones objetivo y las restricciones de recursos, las hemos tomado dentro de su rango de variación posible: $(0, 1)$ en el momento de resolver cada instancia generada, de forma que hemos usado como alternativas los valores 0.1, 0.5 y 0.9. Obsérvese que, tal y como hemos mencionado en el epígrafe anterior, dado que las funciones objetivo siguen la distribución normal, todos estos conjuntos de soluciones eficientes en probabilidad son también soluciones eficientes mínimo riesgo. Además, para probabilidad igual a 0.5, se obtiene el conjunto de soluciones eficientes valor esperado y las soluciones eficientes que se obtienen para probabilidades mayores que 0.5 son soluciones eficientes valor esperado mínima varianza. Al igual que hemos comentado anteriormente, hemos fijado e igualado todas las probabilidades que intervienen en el modelo para cada nueva instancia, de forma que éstas puedan ser comparadas entre sí en función de las distintas probabilidades asociadas.

Por tanto, atendiendo a las posibles diversificaciones comentadas, para cada conjunto de valores medios generados como coeficientes en cada instancia, obtenemos 15 instancias deterministas equivalentes, cada una de ellas caracterizada por el tanto por ciento de variación que se permite a los datos con respecto a su media, y la probabilidad fijada. El conjunto completo de éstas asciende a 5.760 instancias.

Además, las instancias también las hemos resuelto con el modelo que se obtiene si no consideramos como variables aleatorias los elementos inciertos, de forma que éstas pasan a ser todas elementos deterministas cuyo valor es igual a la media de las distribuciones normales que seguían al ser variables aleatorias. El objeto de este análisis, como en el ejemplo anterior, es poder comparar el funcionamiento del modelo en el que todos los coeficientes son ciertos con el estocástico propuesto.

Una vez comentadas las características principales acerca de la generación del conjunto de instancias que vamos a utilizar, pasamos a realizar un análisis de los resultados obtenidos. Dada la gran cantidad de información que la resolución de todas las instancias genera, comenzaremos analizando en profundidad los resultados obtenidos en las instancias más pequeñas, en cuanto a número de proyectos implicados; pasando, a continuación, a ver los resultados generales obtenidos en el resto de ellas.

De esta forma, veamos en primer lugar los resultados, en cuanto a tiempos computacionales medios por punto eficiente, obtenidos en las instancias que contienen 10 proyectos de entre los que seleccionar y planificar, y cuyas funciones objetivo son todas a maximizar. Hemos agrupado las distintas instancias en función del número de objetivos propuestos (2, 4 y 6); así como del número de instantes temporales que intervienen en la planificación temporal (4, 6 y 8). De esta forma, por ejemplo, el grupo de instancias 10.2.4 agrupa todas aquéllas que poseen 10 proyectos de partida para seleccionar, dos funciones objetivo a maximizar, y 4 instantes temporales a lo largo de los cuales realizar la planificación temporal. Por tanto, presentamos los valores de tiempos computacionales medios obtenidos en cada uno de estos grupos.

Las gráficas que exponemos presentan la forma de tela de araña, por lo que, en cada uno de sus vértices, encontramos el aspecto a comparar en función a las características de los grupos de instancias. Dado que la mayor concentración de valores que toman cada uno de los grupos se encuentra en tiempos computacionales relativamente bajos, los ejes están situados de forma inversa (de mayor a menor valor partiendo desde el origen), a fin de poder apreciar mejor los resultados obtenidos.

El objetivo es ver el funcionamiento del modelo propuesto cuando aplicamos distinta variabilidad en los datos, así como distintas probabilidades con las que realizar la transformación del modelo estocástico al determinista equivalente. Así, en la Figura 2, podemos ver, fijando las distintas varianzas comentadas anteriormente, cómo varían los tiempos computacionales (en segundos) por punto eficiente, cuando las probabilidades cambian.

Una de las características que podemos apreciar a simple vista es que, cuando la variabilidad en los datos es baja, los tiempos computacionales por punto eficiente se mantienen relativamente estables, independientemente de la probabilidad con la que se realice la transformación estocástica.

Sin embargo, al ir aumentando el tanto por ciento de variabilidad en los datos, los tiempos computacionales sufren distorsiones entre los distintos grupos, sobre todo en los casos en los que las probabilidades de la transformación son más elevadas.

Además, podemos ver que los grupos de instancias que presentan mayores tiempos computacionales por punto eficiente son los que poseen 6 objetivos (independientemente del número de instantes temporales sobre el que se realice la planificación) y el que posee 4 funciones objetivo pero 8 instantes temporales sobre los que realizar la planificación de las carteras de proyectos. Este último grupo, además, tiende a ser más inestable cuando las probabilidades de transformación van tomando valores más elevados.

En la Figura 3 podemos apreciar, en contraposición a las gráficas anteriores, cuál es el comportamiento de los tiempos computacionales cuando, para una misma probabilidad de

transformación, alternamos la variabilidad que le permitimos a los datos. Así, podemos ver que, en general, los tiempos computacionales se mantienen estables para cada grupo de instancias en cada nivel de probabilidad, sea cual sea la variabilidad permitida en los datos. Igualmente, aquí también apreciamos que las instancias descritas anteriormente son las que ocupan los valores más altos en tiempos computacionales por punto eficiente obtenido.

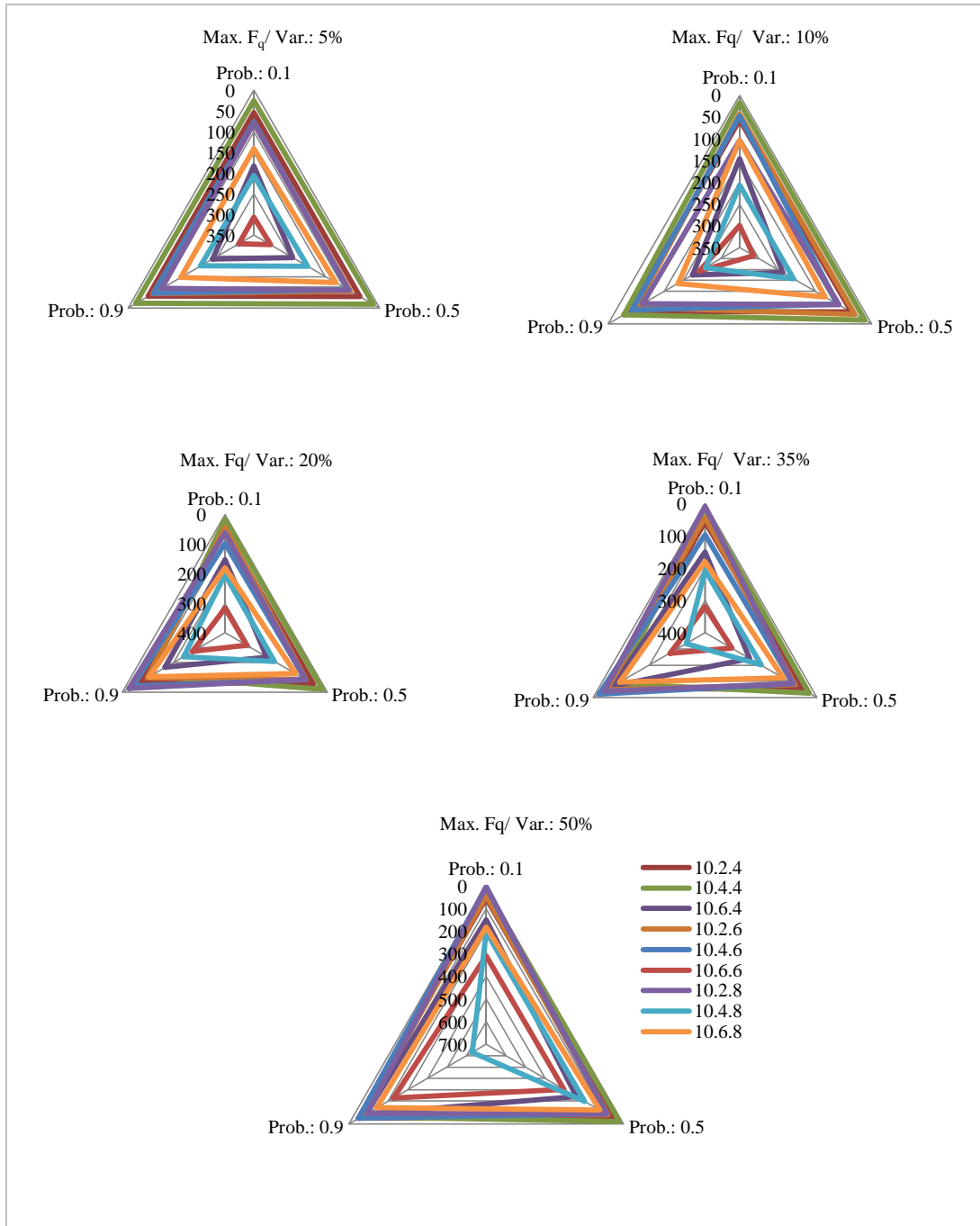


Figura 2. Análisis comparativo de probabilidades. Tiempos computacionales por punto eficiente. Funciones a maximizar.

En la segunda gráfica de la Figura 3 se han incluido, además, los tiempos empleados por el modelo de selección y planificación de carteras de proyectos que resulta cuando no permitimos la posibilidad de que

los datos varíen, es decir, el modelo determinista en el que todos los elementos son ciertos. Evidentemente, los tiempos computacionales de este modelo son mucho menores debido, principalmente, al hecho de que, tanto en la evaluación como en la comprobación de la factibilidad de las carteras de proyectos, se realizan menos operaciones, pero podemos apreciar que, al compararlo con los demás, el comportamiento obtenido es el mismo en el sentido de que los grupos de instancias que precisaban de un tiempo computacional menor/mayor en el modelo sin incertidumbre, también son las que precisan de menores/mayores tiempos en el modelo con incertidumbre.

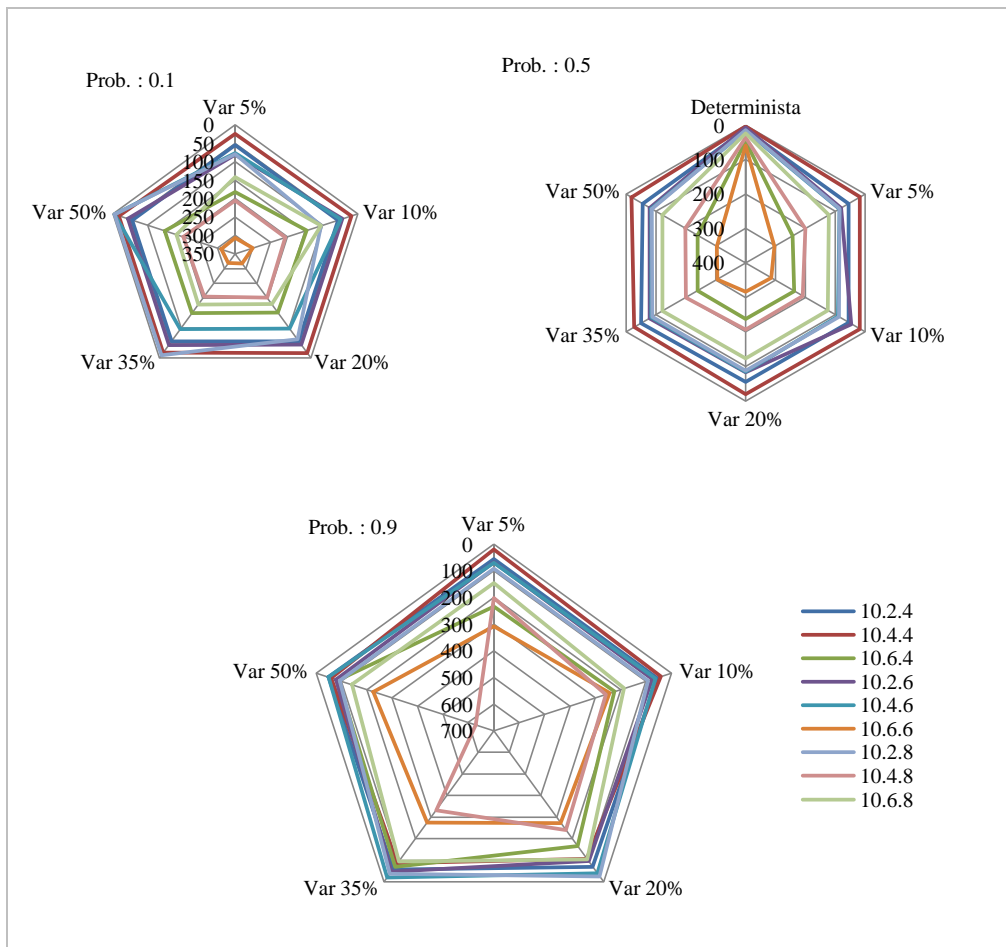


Figura 3. Análisis comparativo de variaciones. Tiempos computacionales por punto eficiente. Funciones a maximizar

Pasamos ahora a los resultados obtenidos cuando aumentamos el número de proyectos que intervienen en la selección. En este caso, a fin de no duplicar resultados, sólo introducimos los resultados obtenidos para una variabilidad en los datos del 20%, ya que, tal y como hemos visto anteriormente, para variabilidades inferiores los resultados son bastante estables, mientras que en las superiores se mantienen las incidencias que comienzan a verse para esta variabilidad. Así, en la Figura 4, podemos ver los resultados obtenidos para los grupos de 15, 20 y 25 proyectos. Cabe destacar, en primer lugar, que los tiempos computacionales por punto eficiente aumentan de forma considerable al incrementarse el número de proyectos sobre los que se realiza la selección y planificación temporal, lo cual es una muestra inequívoca de que, a medida que el número de proyectos aumenta, la complejidad del problema se incrementa también. Por otro lado, las instancias que presentan el mayor número de funciones objetivo a maximizar, siguen siendo las que obtienen un mayor tiempo medio por punto eficiente obtenido. Además, los tiempos computacionales también aumentan a medida que la probabilidad fijada por el decisor se ve incrementada.

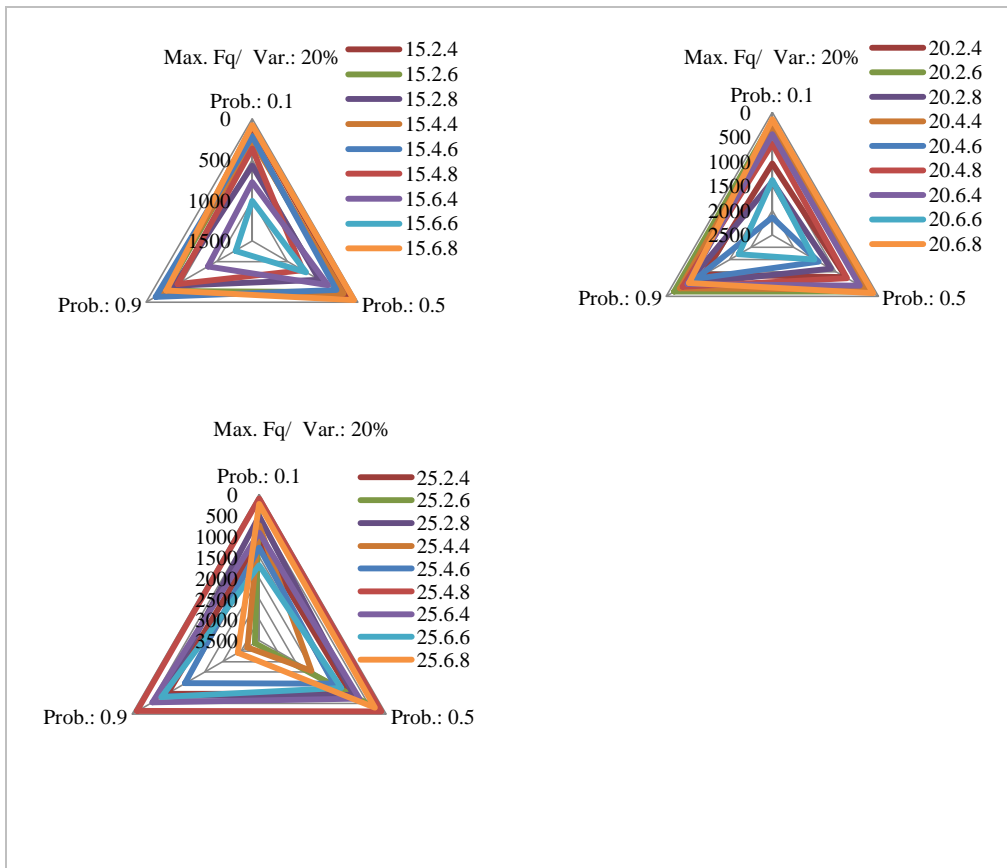


Figura 4. Tiempos computacionales. 15, 20 y 25 proyectos. Funciones a maximizar.

Analícemos ahora brevemente los resultados obtenidos en los grupos de instancias generados que poseen las mismas características que las descritas anteriormente, pero en el caso en el que las funciones objetivo que intervienen en cada instancia presentan, unas, carácter de maximización y, otras, de minimización. Los resultados en cuanto a tiempos computacionales medios obtenidos por grupos son los presentados en la Figura 5, para el caso en el que se permite una variabilidad del 20% en los datos. Al igual que hemos comprobado anteriormente, los tiempos computacionales también aumentan a medida que crece el número de proyectos implicados en la decisión.

En este caso, sin embargo, los mayores tiempos no se obtienen siempre en las instancias que tienen un mayor número de funciones objetivo, lo cual se deduce directamente del hecho de que, en este caso, independientemente del número de funciones objetivo a optimizar, la clave está en las direcciones de mejora que éstas presentan, lo cual puede llevar a que un problema con un mayor número de funciones objetivo se resuelva de una forma más sencilla que otro con un menor número de ellas, si en este último hay una fuerte contraposición entre las direcciones de mejora de las funciones objetivo.

Sin embargo, sí podemos apreciar fácilmente que, en líneas generales, los mayores tiempos los obtenemos cuando las probabilidades fijadas para realizar las transformaciones del modelo estocástico al determinista equivalente son elevadas (0.9), mientras que la frontera eficiente del problema se obtiene más rápidamente cuando dichas probabilidades son bajas (0.1).

Para concluir el análisis de los tiempos computacionales medios obtenidos a través de la ejecución del modelo planteado, incluimos las Tablas 5 y 6, en las que podemos ver los resultados medios obtenidos por grupos de instancias a partir de los cuales hemos construido las figuras presentadas anteriormente. En ellas podemos valorar, además, el número medio de puntos eficientes obtenidos para cada grupo de

instancias, observándose que, por un lado, las fronteras eficientes poseen una mayor densidad de puntos a medida que el número de proyectos a evaluar aumenta. Y, por otro, que aquellas instancias en las que se presentan funciones objetivo tanto a maximizar como a minimizar, dichas fronteras también poseen un mayor número de puntos eficientes, lo cual era de esperar.

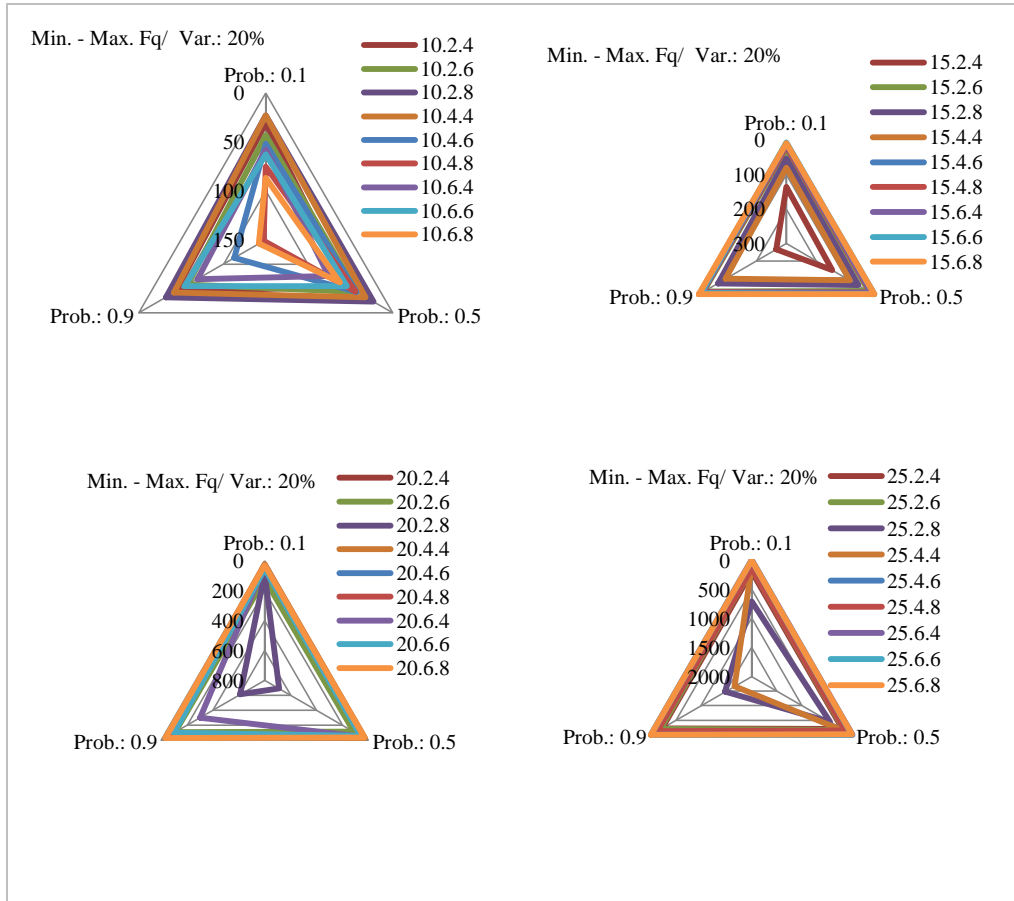


Figura 5. Tiempos computacionales. 10, 15, 20 y 25 proyectos. Funciones a minimizar y maximizar.

Además, observando dichas tablas, podemos apreciar que las resoluciones del modelo sin variabilidad en los datos siempre se obtienen en un menor tiempo, lo cual es normal debido a que la variabilidad en los datos propicia que el campo de actuación del algoritmo sea más amplio, lo que conlleva un aumento en cuanto a tiempo computacional.

Por otro lado, excepto en algunos de los grupos de instancias de mayor tamaño, en cuanto a número de proyectos, la densidad media de las fronteras eficientes es similar entre las resoluciones de los modelos con variabilidad en los datos y el modelo sin variabilidad.

A continuación, y una vez vistos los resultados generales que hemos obtenido para la batería de 5.760 instancias, tomaremos una de las instancias ejecutadas para mostrar gráficamente cómo se distribuyen las distintas fronteras eficientes que se obtienen cuando se fijan diferentes probabilidades en las transformaciones, así como la comparación de éstas cuando se permiten distintas variabilidades en los datos de partida. El objetivo es poder analizar, para un caso concreto algo más complejo que el ejemplo anterior utilizado, la información de la que se dispondría para mostrar al centro decisor, de forma que éste pudiera, por ejemplo, cuantificar más fácilmente el riesgo que asume al elegir una determinada probabilidad en la transformación estocástica.

Tabla 5. Resultados medios obtenidos con funciones de maximización

		Det		Var. 20%		Pr. 0.1		Var. 20%		Pr. 0.5		Var 20%		Pr. 0.9	
F_q	Grupo	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts
Max	10.2.4	37.88	3	224.57	4	222.20	4	209.04	3						
Max	10.2.6	36.63	5	87.73	2	82.61	1	96.10	1						
Max	10.2.8	29.31	2	250.34	4	174.83	2	75.82	3						
Max	10.4.4	41.95	11	197.54	12	209.77	11	215.66	2						
Max	10.4.6	83.86	5	391.18	4	422.33	5	160.82	4						
Max	10.4.8	147.74	4	812.11	4	825.78	4	718.47	3						
Max	10.6.4	94.00	2	611.19	4	473.99	2	498.68	3						
Max	10.6.6	58.80	1	317.10	1	316.02	1	273.15	1						
Max	10.6.8	147.50	6	361.72	2	742.86	6	520.48	5						
Max	15.2.4	64.43	2	465.71	5	823.49	8	286.31	1						
Max	15.2.6	116.43	3	719.10	3	748.20	3	842.37	3						
Max	15.2.8	82.61	1	576.16	1	549.85	1	802.31	2						
Max	15.4.4	239.42	10	1326.07	5	2925.24	14	1825.10	9						
Max	15.4.6	365.74	10	2125.29	10	2145.41	7	2553.43	19						
Max	15.4.8	338.10	3	1105.05	3	2345.86	3	3083.07	7						
Max	15.6.4	406.49	6	2331.84	3	2550.90	6	1752.24	2						
Max	15.6.6	575.05	6	3016.79	3	3671.54	5	1263.83	1						
Max	15.6.8	770.12	61	7083.31	94	8345.47	140	5667.90	20						
Max	20.2.4	310.02	4	1041.49	1	3071.22	4	1763.82	2						
Max	20.2.6	202.14	10	1864.68	10	1817.82	10	1895.97	10						
Max	20.2.8	271.47	2	1408.36	1	2228.38	2	970.47	2						
Max	20.4.4	1655.98	37	10134.28	35	9717.18	35	10010.91	31						
Max	20.4.6	667.17	5	4292.41	2	5610.12	4	702.78	1						
Max	20.4.8	2581.32	29	20540.35	32	20035.38	27	27315.48	71						
Max	20.6.4	3293.76	48	18494.03	42	18323.42	42	17056.55	34						
Max	20.6.6	1388.73	7	11034.85	8	10535.30	7	10232.45	6						
Max	20.6.8	2219.83	96	26907.86	194	23574.70	194	18777.24	35						
Max	25.2.4	1178.36	9	21020.39	19	15472.97	16	6763.11	7						
Max	25.2.6	10502.27	698	23447.30	127	24254.13	148	3378.30	1						
Max	25.2.8	989.45	11	10456.96	20	10820.36	12	6983.94	8						
Max	25.4.4	2071.29	10	10320.30	14	22630.69	11	22280.36	7						
Max	25.4.6	3667.88	21	26891.46	21	30353.07	21	30667.93	21						
Max	25.4.8	80720.38	2290	379752.98	3485	452540.95	3507	306432.40	2224						
Max	25.6.4	14753.33	271	107991.61	118	119719.13	164	137186.48	243						
Max	25.6.6	3080.28	18	62956.76	37	22323.31	18	12816.49	16						
Max	25.6.8	48426.69	879	364632.73	1561	249237.25	797	61172.76	21						

Tabla 6. Resultados medios obtenidos con funciones de maximización y minimización

F _q	Grupo	Det		Var. 20%		Pr. 0.1		Var. 20%		Pr. 0.5		Var 20%		Pr. 0.9	
		T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts	T (seg.)	Pts
Max/Min	10.2.4	53.19	13	268.43	14	265.70	12	245.49	10						
Max/Min	10.2.6	66.11	26	370.22	27	387.84	26	287.33	20						
Max/Min	10.2.8	69.45	24	451.76	27	435.46	26	418.10	20						
Max/Min	10.4.4	113.75	32	886.60	46	572.89	29	445.44	15						
Max/Min	10.4.6	201.23	30	1126.51	40	897.65	30	671.34	15						
Max/Min	10.4.8	222.87	29	1284.73	35	1038.32	33	1028.56	22						
Max/Min	10.6.4	226.60	21	1463.16	29	1413.02	21	1222.38	21						
Max/Min	10.6.6	257.20	118	1531.69	139	1034.91	116	516.58	48						
Max/Min	10.6.8	332.18	23	1921.71	39	1240.16	26	1190.60	12						
Max/Min	15.2.4	64.69	3	1328.79	50	1362.85	36	617.08	2						
Max/Min	15.2.6	301.65	134	2768.05	135	2530.58	118	2222.56	106						
Max/Min	15.2.8	345.00	58	2638.70	56	3024.92	58	2836.40	54						
Max/Min	15.4.4	579.43	57	4298.44	65	4286.29	58	3655.31	45						
Max/Min	15.4.6	1951.81	853	9163.07	1038	8384.30	867	6344.63	638						
Max/Min	15.4.8	2151.30	742	12255.50	831	10315.38	690	7767.85	531						
Max/Min	15.6.4	1789.51	659	12841.41	1056	10500.08	659	4571.87	259						
Max/Min	15.6.6	6410.12	2582	46758.18	5861	17393.99	2638	9118.45	609						
Max/Min	15.6.8	10429.72	3934	31736.52	3330	25179.78	3925	27045.54	3400						
Max/Min	20.2.4	750.04	76	7352.52	90	8151.23	77	4069.14	48						
Max/Min	20.2.6	884.09	54	6964.94	57	6166.32	54	6135.32	58						
Max/Min	20.2.8	1470.95	174	20626.61	234	2071.44	3	1831.76	3						
Max/Min	20.4.4	2620.88	648	20136.90	910	16616.70	598	16066.71	287						
Max/Min	20.4.6	2610.26	403	18871.24	412	16816.63	396	17111.94	278						
Max/Min	20.4.8	38581.90	3466	177526.99	3769	157352.70	3463	97032.47	1914						
Max/Min	20.6.4	303.49	3	43317.83	1461	7758.57	200	5965.17	20						
Max/Min	20.6.6	5967.63	656	39675.95	726	38026.77	656	40313.45	416						
Max/Min	20.6.8	12370.56	2069	57601.71	1932	66148.65	2053	63010.50	2113						
Max/Min	25.2.4	1324.41	69	20240.78	103	14408.62	73	8975.71	40						
Max/Min	25.2.6	3445.82	217	40289.11	273	37254.53	219	35698.65	183						
Max/Min	25.2.8	2133.90	22	15734.47	22	9713.13	22	4417.58	3						
Max/Min	25.4.4	177200.90	9324	948277.79	9791	94980.99	9245	4985.13	3						
Max/Min	25.4.6	9044.75	1091	70585.28	1091	71069.73	1099	65754.87	1051						
Max/Min	25.4.8	10700.39	819	108814.55	737	107087.20	732	87577.69	659						
Max/Min	25.6.4	3903.39	9937	13949.86	9956	11106.31	9978	12527.00	9932						
Max/Min	25.6.6	53767.65	9923	53701.97	9955	53640.03	9911	53568.44	9956						
Max/Min	25.6.8	17948.38	9910	81816.03	9936	81512.01	9964	42476.33	9969						

Así pues, hemos considerado una instancia en la que sólo intervienen dos funciones objetivo (una de minimizar y otra de maximizar) para poder representar gráficamente las fronteras eficientes que se obtienen. A fin de mostrar la influencia que, tanto la variabilidad en los datos de partida, como las probabilidades que se fijan para realizar las transformaciones de las funciones objetivo y las restricciones de recursos, tienen en los resultados obtenidos, presentamos dos gráficas. En la primera de ellas (Figura 6) podemos observar la comparación entre las fronteras de puntos eficientes que se obtienen cuando se le otorga un 5% de variabilidad a los datos que presentan incertidumbre en su formulación, y se van asignando distintas probabilidades en las transformaciones (0.1, 0.3, 0.5, 0.7 y 0.9). Podemos comprobar que, a lo largo de la gráfica, la frontera correspondiente a la probabilidad de 0.1 en las transformaciones es la que obtiene valores mejores en las funciones objetivo. Sin embargo, a medida que las probabilidades van aumentando, las fronteras eficientes correspondientes devuelven valores, para las funciones objetivo, menos atractivos. En este sentido, parece claro que cuando el decisor está dispuesto a asumir riesgos en las probabilidades que fija para realizar las transformaciones, obtiene resultados mejores en cuanto a las funciones objetivo; mientras que éstos van empeorando a medida que el centro decisor se muestra más reacio a asumir riesgos en cuanto a las transformaciones.

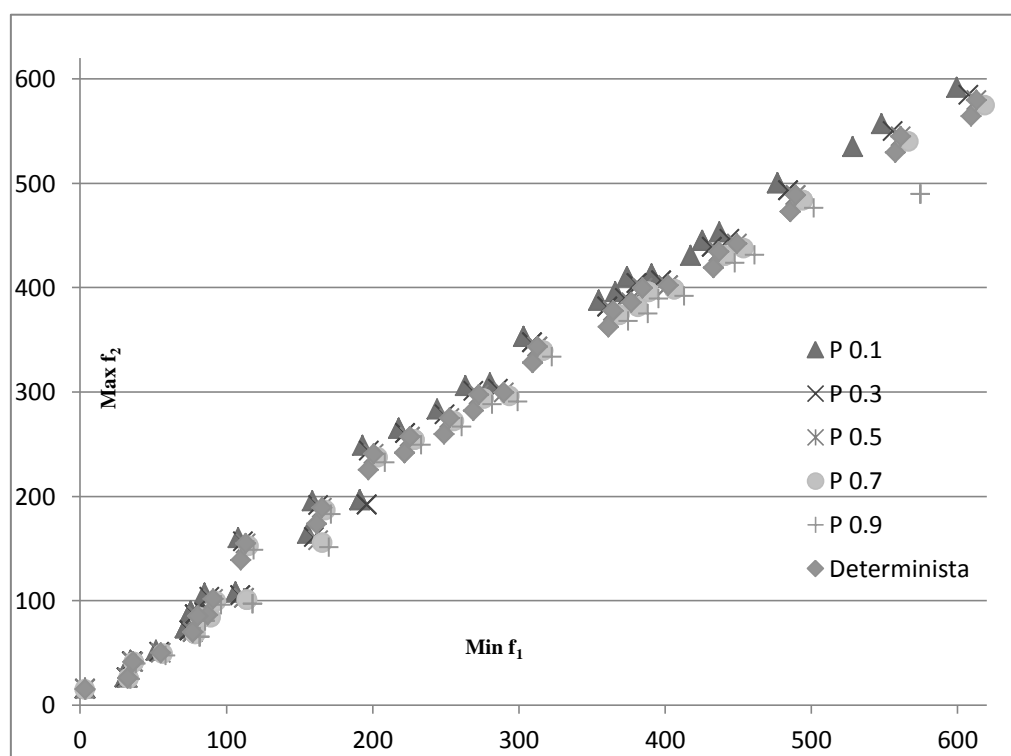


Figura 6. Fronteras eficientes con un 5% de variabilidad en los datos

Por otro lado, otra característica que podemos apreciar claramente a la vista de la Figura 6, es que la frontera eficiente correspondiente al problema en el que no aparece incertidumbre en los datos coincide, prácticamente, con la que sí incluye incertidumbre en los datos y cuya transformación se realiza con probabilidad 0.5. Esto es debido a que, como ya comentamos anteriormente con el ejemplo del epígrafe anterior, el factor de corrección de la varianza que aparece en las formulaciones teóricas se anula, por lo que ésta no influye en la esperanza de la función o restricción correspondiente.

En la Figura 7 podemos observar, igualmente, una comparación entre las distintas fronteras eficientes que se obtienen, según las probabilidades fijadas en las transformaciones, para una instancia cuyas medias

de los valores inciertos son las mismas que las de la Figura 6 pero a las que, en este caso, les permitimos una variabilidad del 50% de su valor. Aquí podemos observar, al igual que ocurriera en la Figura 6, que las fronteras eficientes van obteniendo mejores valores en las funciones objetivo a medida que las probabilidades utilizadas en las transformaciones van disminuyendo. En la misma línea que lo expuesto anteriormente, las fronteras eficientes correspondientes al problema en el que no se permite variabilidad en los datos y la del problema en el que se realiza la transformación del problema estocástico a su determinista equivalente utilizando una probabilidad igual a 0.5, son prácticamente iguales nuevamente.

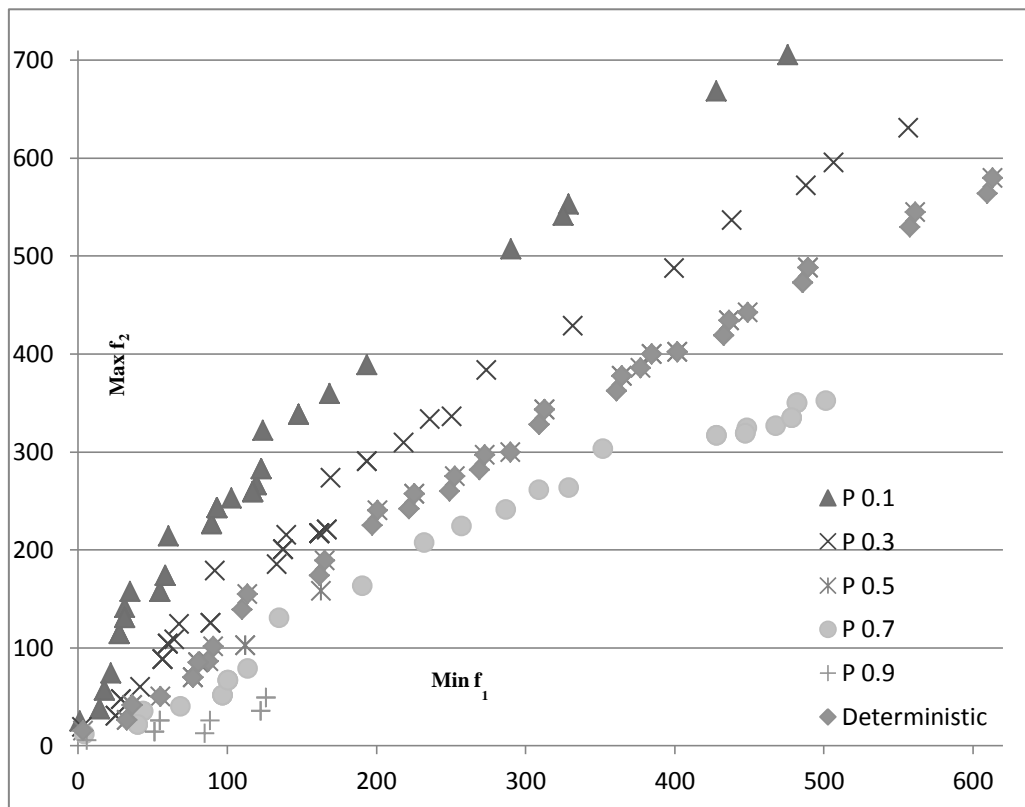


Figura 7. Fronteras eficientes con un 50% de variabilidad en los datos

Así mismo, y a la vista de ambas gráficas, podemos comprobar que cuando la variabilidad que se otorga a los datos de partida es mayor, mayor es también la distancia existente entre las fronteras eficientes que se obtienen según las distintas probabilidades. Este dato es significativo pues nos lleva a que, cuando el centro decisor se encuentre ante un problema en el que la variabilidad que ofrezcan sus datos sea relativamente pequeña, la decisión que se tome en cuanto al riesgo en las transformaciones no será especialmente relevante. Sin embargo, cuando el centro decisor se enfrente a un problema en el que la variabilidad que pueden sufrir sus datos sea relativamente alta, debe ser consciente de que la decisión que tome en cuanto al riesgo a asumir sí va a influir de forma directa en los resultados que obtenga, puesto que realizar todas sus previsiones a medio plazo en base a una cartera tomada de una frontera eficiente obtenida con una probabilidad relativamente baja, puede conducir a un grave problema en su desarrollo si los datos de partida llegan a sufrir una variación cercana a su límite con respecto al valor que tenían de inicio.

Por tanto, es primordial hacer ver al centro decisor las distintas alternativas de que dispone, así como la influencia real y directa que las decisiones que tome tendrán en su devenir a lo largo del horizonte de ejecución de la cartera de proyectos que pretende llevar a cabo.

5. Conclusiones

El problema de la selección de carteras de proyectos involucra multitud de aspectos y consideraciones que lo convierten en un problema complejo desde su planteamiento hasta la obtención de la cartera de proyectos finalmente seleccionada. Así, dada la trascendencia que una buena selección de la cartera de proyectos a implantar plantea, se hace imprescindible elaborar modelos matemáticos sólidos y fundamentados que conduzcan a la organización, de forma inexorable, hacia el objetivo final propuesto. Para ello, dichos modelos han de reflejar de la forma más fielmente posible la realidad en la que se desenvuelve la organización, así como interpretar, lo más rigurosamente posible, sus pretensiones y deseos.

Sin embargo, dado que los procesos de selección y puesta en funcionamiento de las carteras de proyectos se realizan en ambientes reales, y no en laboratorios, la imprecisión o desconocimiento de la información siempre está presente en este tipo de procedimientos, debido a la alta dependencia que ésta posee con respecto a las condiciones políticas, económicas, sociales, legales, ... en las que se desarrolle. Por tanto, cualquier problema de selección de carteras de proyectos lleva aparejado, implícitamente, un problema de tratamiento de la incertidumbre.

En este caso, la incertidumbre ha sido incluida en todos los elementos que aparecen tanto en las funciones objetivo como en las restricciones de recursos renovables en forma de variables aleatorias normalmente distribuidas. Así, una vez planteado el modelo, lo hemos transformado en su determinista equivalente, utilizando el criterio de eficiencia en probabilidad, para las funciones objetivo, y tomando las restricciones como probabilísticas o de azar. En ambos casos, pues, se permite fijar las probabilidades con las que la organización desea que se realicen las variables aleatorias y, a partir de ellas, transformamos el modelo estocástico en su determinista equivalente. Esta transformación da lugar a la obtención de un problema de programación multiobjetivo no lineal de variables binarias.

En una primera aproximación al funcionamiento del modelo y los resultados obtenidos, hemos utilizado un ejemplo ilustrativo de un proceso de selección de carteras de proyectos que nos ha permitido comprobar el tipo de resultados obtenidos, así como la influencia de la incertidumbre en la fiabilidad de éstos.

Ahora bien, la complejidad del modelo determinista equivalente resultante, la variedad permitida en la elección en cuanto a las probabilidades utilizadas en las transformaciones, así como la variabilidad permitida en los datos, propicia que la resolución de este problema se vea afectada por tales circunstancias. Debido a esto, hemos considerado necesario probar el funcionamiento y comportamiento del modelo, con el objetivo de comprobar su adaptabilidad a diversas situaciones, así como posibilitar comparaciones en relación a los cambios que pueden sufrir los resultados en función a las probabilidades fijadas para las transformaciones. En consecuencia, hemos generado un conjunto de 5.760 instancias de prueba, de diferentes características y complejidad, a partir de las cuales hemos podido observar la forma en la que, tanto las probabilidades elegidas para las transformaciones, como las variabilidades permitidas en los datos, afectan a las distintas fronteras eficientes que se obtienen en la resolución del problema.

Por otro lado, en cuanto a los tiempos computacionales por punto eficiente obtenidos en las instancias resueltas, hemos visto que, en líneas generales, éstos resultan especialmente afectados cuando el número de objetivos del problema es alto, independientemente del número de instantes temporales involucrados en la planificación, así como en aquellas instancias en las que la planificación temporal se realiza sobre un número elevado de instantes temporales.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada en parte por los *Incentivos para la formación de personal docente e investigador predoctoral en las Universidades Públicas de Andalucía, en áreas de conocimiento consideradas deficitarias por necesidades docentes* (Convocatoria 2008); y por los proyectos “Programación Multiobjetivo: Métodos metaheurísticos y aplicaciones”, Plan Nacional de I+D+I (2008-2011) y “Métodos metaheurísticos en la resolución de problemas multiobjetivo complejos. Aplicaciones”, Junta de Andalucía, Proyectos de Excelencia TIC-06618.

Gracias especialmente al Dr. Rafael Caballero Fernández y la Dra. Trinidad Gómez Núñez por sus comentarios y sugerencias en la elaboración de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

1. Martino, J. P. *Research and development project selection*, (Wiley Series in Engineering & Technology Management, New York, 1995).
2. Heidenberger, K. Stummer, C. Research and development project selection and resource allocation: a review of quantitative modelling approaches. *International Journal of Management Reviews* **1** (1999) 197-224.
3. Iamratanakul, S. Patanakul, P. Milosevic, C. Project portfolio selection: from past to present. *IEEE Management of Innovation and Technology* **21-24** (2008) 287-292.
4. Silvola, H. Low-Intensity R&D and capital budgeting decisions in it firms. *Advances in Management Accounting* **15** (2006) 21-49.
5. Lawson, C. P. Longhurst, P. J. Ivey, P. C. The application of a new research and development project selection model in SMEs. *Technovation* **26** (2) (2006) 242-250.
6. Feng, B. Ma, J. Fan, Z-P. An integrated method for collaborative R&D project selection: Supporting innovative research teams. *Expert Systems with Applications* **38** (2011) 5532-5543.
7. Duarte, B. P. M. Reis, A. Developing a project evaluation system based on multiple attribute value theory. *Computers & Operations Research* **33** (5) (2006) 1488-1504.
8. Stummer, C. Heidenberger, K. Interactive R&D portfolio analysis with project interdependencies and time profiles of multiple objectives. *IEEE Transactions on Engineering Management* **50**(2) (2003) 175-183.
9. Carazo, A. F. Gómez, T. Molina, J. Hernández-Díaz, A. Guerrero, F. Caballero, R. Solving a comprehensive model for multi-objective project portfolio selection. *Computers and Operations Research* **37** (2010) 630-639.
10. Doerner, K. F. Gutjahr, W. J. Hartl, R. F. Strauss, C. Stummer, C. Pareto ant colony optimization with ILP preprocessing in multiobjective portfolio selection. *European Journal of Operational Research* **171** (3) (2006) 830-841.
11. Medaglia, A. L. Graves, B. S. Ringuest, J. L. A multiobjective evolutionary approach for linearly constrained project selection under uncertainty. *European Journal of Operational Research* **179** (3) (2007) 869-894.
12. Prékopa, A. *Stochastic programming*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995).
13. Ruszczyński, A. Shapiro, A. *Stochastic Programming Models*. (Handbooks in Operations Research and Management Science. Elsevier, 2003).
14. Caballero, R. Cerdá, E. Muñoz, M. Rey, L. *Relations among Several Efficiency Concepts in Stochastic Multiple Objective Programming*. Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making. Y. Y. Haimes y R. E. Steuer, (Springer Berlin Heidelberg, 2000).
15. Caballero, R. Cerdá, E. Muñoz, M. Rey, L. Stancu-Minasian, I. M. Efficient Solution Concepts and Their Relations in Stochastic Multiobjective Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications* **110**(1) (2001) 53-74.
16. Archer, N. P. Ghasemzadeh, F. An integrated framework for project selection. *International Journal of Project Management* **17** (4) (1999) 207-216.
17. Mavrotas, G. Diakoulaki, D. Kourentzis, A. Selection among ranked projects under segmentation, policy and logical constraints. *European Journal of Operational Research* **187** (2008) 177-192.
18. Chien, C. A portfolio-evaluation framework for selecting R&D projects. *R&D Management* **32**(4) (2002) 359-368.
19. Weingartner, H. M. Capital budgeting of interrelated projects: survey and synthesis. *Management Science* **12** (1966) 485-516.
20. Lorie, J. H. Savage, L. J. Three problems in Rationing Capital. *Journal of Business* **28** (1955) 229-239.

21. Czajkowski, A. F. Jones, S. Selecting interrelated R&D projects in space technology planning. *IEEE Transactions on Engineering Management* **33** (1) (1986) 17–24.
22. Schmidt, R. T. A model for R&D project selection with combined benefit, outcome a resource interactions. *IEEE Transactions on Engineering Management* **40** (4) (1993) 403–410.
23. Dickinson, M. W. Thornton, A. C. Graves, S. Technology portfolio management: optimizing interdependent projects over multiple time periods. *IEEE Transactions on Engineering Management* **48**(4) (2001) 518–527.
24. Zuluaga, A. Sefair, J. A. Medaglia, A. L. Model for the selection and scheduling of interdependent projects. *Systems and Information Engineering Design Symposium. SIEDS 2007, IEEE* (2007) 1–7.
25. Rabbani, M. Aramoon, M. Khoshkhou, G. A multiple-objective particle swarm optimization for project selection problem. *Expert Systems with Applications* **37** (1) (2010) 315–321.
26. Solak, S. Clarke, J. B. Johnson, E. L. Barnes, E. R. Optimization of R&D project portfolios under endogenous uncertainty. *European Journal of Operational Research* **207** (2010) 420–433.
27. Santhanam, R. Kyparisis, J. A multiple criteria decision model for information system project selection. *Computers Operations Research* **22** (8) (1995) 807–818.
28. Sun, H. Ma, T. A packing-multiple-boxes model for R&D project selection and scheduling. *Technovation* **25** (11) (2005) 1355–1361.
29. Ghasemzadeh, F. Archer, N. Iyogun, P. A zero-one model for project portfolio selection and scheduling. *Journal of the Operational Research Society* **50** (7) (1999) 745–755.
30. Medaglia, A. L. Hueth, D. Mendieta, J. C. Sefair, J. A. A multiobjective model for the selections and timing of public enterprise projects, *Socio-Economic Planning Sciences* **42** (1) (2008) 31–45.
31. Doerner, K. F. Gutjahr, W. J. Hartl, R. F. Strauss, C. Stummer, C. Pareto ant colony optimization: a metaheuristic approach to multiobjective portfolio selection. *Annals of Operations Research* **131** (1–4) (2004) 79–99.
32. Sahinidis, N. V. Optimization under uncertainty: state-of-the-art and opportunities. *Computers & Chemical Engineering* **28**(6–7) (2004) 971–983.
33. Kall, P. Wallace, S. W. *Stochastic programming*, (Wiley, New York, 1994).
34. Birge, J. R. Louveaux, F. V. *Introduction to stochastic programming*. (Springer, New York, 1997).
35. Klerides, E. Hadjiconstantinou, E. A decomposition-based stochastic programming approach for the project scheduling problem under time/cost trade-off settings and uncertain durations. *Computers & Operations Research* **37**(12) (2010) 2131–2140.
36. Liesiö, J. Salo, A. Scenario-based portfolio selection of investment projects with incomplete probability and utility information. *European Journal of Operational Research* **217**(1) (2011) 162–172.
37. Escudero, L. Garín, A. Merino, M. Pérez, G. A two-stage stochastic integer programming approach as a mixture of Branch-and-Fix Coordination and Benders Decomposition schemes. *Annals of Operations Research* **152**(1) (2007) 395–420.
38. Caballero, R. Cerdá, E. Muñoz, M. Rey, L. Analysis and comparisons of some solution concepts for stochastic programming problems. *TOP* **10**(1) (2002) 101–123.
39. Markowitz, H. M. Portfolio selection, *The Journal of Finances* **7** (1952) 77–91.
40. Stancu-Minasian, I. M. *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*. (D. Reider Publishing Company, Dordrecht, 1984).
41. Charnes, A. Cooper, W. W. Deterministics equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints. *Operations Research* **11**(1) (1963) 18–39.
42. Boreanu, B. Programme de risque minimal en programmation linéaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **259** (1964) 981–983.
43. Kataoka, S. A stochastic programming model. *Econometrica* **31**(1–2) (1963) 181–196.
44. Muñoz, M. M. and Ruiz, F. ISTMO: An interval reference point-based method for stochastic multiobjective programming problems. *European Journal of Operational Research* **197**(1) (2009) 25–35.
45. Abdelaziz, F. B. Solution approaches for the multiobjective stochastic programming. *European Journal of Operational Research* **216**(1) (2012) 1–16.
46. Charnes, A. Cooper, W. W. Symonds, G. H. Cost horizons and certainty equivalents: an approach to stochastic programming of heating oil. *Management Science* **4**(3) (1958) 235–263.
47. Keown, A. J. A chance-constrained goal programming model for bank liquidity management. *Decision Sciences* **9**(1) (1978) 93–106.
48. Keown, A. J. Taylor, B. W. III A chance-constrained integer goal programming model for capital budgeting in the production area. *Journal of the Operational Research Society* **31**(7) (1980) 579–589.
49. Graves, S. B. Ringuest, J. L. Medaglia, A. L. *A Sampling-Based Method for Generating Nondominated Solutions in Stochastic MOMP Problems*, Models & Methods for Project Selection, (Springer, US, 2000).

50. Gabriel, S. A. Kumar, S. Ordóñez, J. Nasserian, A. A multiobjective optimization model for project selection with probabilistic considerations. *Socio-Economic Planning Sciences*, **40(4)** (2006) 297-313.
51. Laslo, Z. Project portfolio management: An integrated method for resource planning and scheduling to minimize planning/scheduling-dependent expenses. *International Journal of Project Management*, **28(6)** (2010) 609-618.
52. Shakhshi-Niaei, M. Torabi, S. A. Iranmanesh, S. H. A comprehensive framework for project selection problem under uncertainty and real-world constraints. *Computers & Industrial Engineering*, **61(1)** (2011) 226-237.
53. Abdelaziz, F. B. Aouni, B. Fayedh, R. E. Multi-objective stochastic programming for portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, **177(3)** (2007) 1811-1823.
54. Aouni, B. Abdelaziz, F. B. Martel, J. M. Decision-maker's preferences modeling in the stochastic goal programming. *European Journal of Operational Research*, **162(3)** (2005) 610-618.
55. Martel, J. M. Aouni, B. Incorporating the decision maker's preferences in the goal programming model. *Journal of the Operational Research Society*, **41(12)** (1990) 1121-1132.
56. Hasuike, T. Katagiri, H. Ishii, H. Portfolio selection problems with random fuzzy variable returns. *Fuzzy Sets and Systems* **160(18)** (2009) 2579-2596.
57. Sefair, J. A. Medaglia, A. L. Towards a model for selection and scheduling of risky projects. *Systems and Information Engineering Design Symposium*, (2005).
58. Sefair, J. A. Medaglia, A. L. Mean-Semivariance model for project selection: an illustration from the oil and gas industry. (Universidad de Los Andes, Colombia, 2008).
59. Bendavid, I. Golany, B. Setting gates for activities in the stochastic project scheduling problem through the cross entropy methodology. *Annals of Operations Research* **172(1)** (2009) 259-276.