

UN PROBLEMA LOGÍSTICO DE PROGRAMACIÓN DE VEHÍCULOS CON VENTANAS DE TIEMPO(VRPTW)

A logistic case of programming vehicle routing problem with time windows

RESUMEN

Éste documento presenta la solución a un caso logístico de programación de vehículos con ventanas de tiempo conocido como VRPTW (vehicle routing problem with Time Windows). En este problema se utiliza como ventana de tiempo el tiempo prometido. Para determinar el orden en que cada vehículo debe visitar a sus clientes que minimiza los costos de transporte, usamos la heurística R. El algoritmo fu implementado en Visual Basic para Excel.

PALABRAS CLAVES: Programación de vehículos con ventanas de tiempo, heurística R

ABSTRACT

This document presents the solution to a logistic case of programming vehicle routing problem with time windows. We used the due date as time window. We used the R heuristic for determining a sequence with transport minim cost.

KEYWORDS: VRPTW (vehicle routing problem time windows), R heuristic.

JORGE HERNAN RESTREPO

Ingeniero Industrial, M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jhrestrepoco@utp.edu.co

PEDRO DANIEL MEDINA V

Ingeniero Mecánico, M. Sc.
Profesor Especial
Universidad Tecnológica de Pereira
pmedin@utp.edu.co

EDUARDO ARTURO CRUZ T

Ingeniero Industrial, M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ecruz@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Todos los días se entregan productos en diferentes puntos de una ciudad, teniendo como referencia un origen que es el punto de distribución. Uno de los objetivos de los distribuidores es determinar el número de vehículos que se requieren para la entrega de bienes a los clientes con el objetivo de minimizar el costo de transporte. Este documento presenta un caso de estudio de una empresa distribuidora de comestibles en la ciudad de Santa Rosa de Cabal Risaralda que desea determinar el número de vehículos minimizando sus costos de transporte. El problema tiene un almacén y 20 clientes para atender con requerimientos definidos. Los vehículos tienen una capacidad de 100 unidades del producto de entrega y los clientes restringen las entregas a unas ventanas de tiempo. El problema se modela como un VRPTW (VRP with Time Windows) donde se tienen vehículos de capacidad (carga) finita. Para determinar la solución se utiliza la heurística R. El algoritmo se implementa en Visual Basic para Excel.

2. TEORÍA

El VRP(vehicle routing problem) tiene diferentes variaciones[1]. Estas variaciones son:

2.1 CVRP(capacited VRP)

Es el VRP más general y consiste en uno o varios vehículos con capacidad limitada y constante encargados de distribuir los productos según la demanda de los clientes.

2.2 MDVRP (Multi-Depot VRP)

Es el VRP con múltiples depósitos. Cada depósito (con su flota de vehículos) debe servir a todos los clientes.

2.3 PVRP (Period VRP)

Contempla en su planteamiento un horizonte de operación de M días, periodo durante el cual cada cliente debe ser visitado una vez.

2.4 SDVRP (Split Delivery VRP)

Contempla entrega dividida, donde se permite que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos si el costo total se reduce, lo cual es importante si el tamaño de los pedidos excede la capacidad de un vehículo.

2.5 SVRP (Stochastic VRP)

Contempla uno o varios componentes aleatorios; clientes, demanda y tiempos pueden ser estocásticos.

2.6 VRPPD (VRP pickup and Delivery)

Contempla entrega y recogida. Es aquel donde cabe la posibilidad de que los clientes pueden devolver determinados bienes, por tanto se debe tener presente que el vehículo tenga capacidad para las dos acciones. Esta restricción hace el problema más complejo y puede causar una mala utilización de los vehículos. Sí el problema tiene una restricción de culminar todas las entregas antes de iniciar las recogidas da lugar a un VRPB (VRP Backhauls).

2.7 MFVRP (Mix Fleet VRP)

Contempla vehículos con distintas capacidades, por lo tanto hay que considerar estas capacidades en la ruta que seguirá cada recurso, ya que un vehículo con mayor capacidad podrá cubrir una ruta más amplia (mayor demanda).

2.8 VRPTW (VRP with Time Windows)

En el se incluye una restricción adicional donde se asocia una ventana de tiempo a cada cliente, es decir, cada cliente sólo está dispuesto a recibir la visita del vehículo durante un intervalo de tiempo dado.

3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

3.1 INDICES

Los índices del modelo son:

i = nodo de partida i (1,2,...,n)

j = nodo de llegada j (1,2,..., n)

n = nodos totales

k = Vehículo k (1,2,..., K)

3.2 Variables

Las variables que se definen son:

$x_{i,j}^k = 1$ si se asigna el vehículo k para recorrer el arco del nodo i al nodo j . cero(0) de lo contrario.

$y_{i,j} = 1$ si se realiza el recorrido desde i hasta j o cero (0) de lo contrario.

K = Número de vehículos a utilizar.

p_i = tiempo de inicio del servicio para el cliente i

3.3 PARÁMETROS

Los parámetros del problema son:

$C_{i,j}$ = Costo de transporte del nodo i al nodo j

d_i = Demanda en el nodo j

u = capacidad del recurso k

n = número de clientes

H = Costo del vehículo

s_i = tiempo de servicio H para el cliente i

$[e_i, l_i]$ = ventana de tiempo para el cliente i

a_i = tiempo de inicio de la ventana de tiempo para el cliente i

b_i = tiempo de cierre de la ventana de tiempo para cliente i

3.4 MODELO [2].[3]

$$\text{Minimizar } \sum_{j \in A} H y_{0,j} + \sum_{(i,j) \in A} C_{i,j} y_{i,j} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{1 \leq k \leq K} x_{i,j}^k = y_{i,j}; \quad \forall i, j \quad (2)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq n} y_{i,j} = 1; \quad \forall i \quad (3)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} y_{i,j} = 1; \quad \forall j \quad (4)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq n} y_{0,j} = k \quad (5)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} y_{i,0} = k \quad (6)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} d_i x_{i,j}^k \leq u ; \forall k \quad (7)$$

$$x_{i,j}^k (p_i + s_i + t_{i,j}) \leq p_j \quad \forall k \quad (8)$$

$$a_i \sum_{1 \leq j \leq n} x_{i,j}^k \leq p_i \leq b_i \sum_{1 \leq j \leq n} x_{i,j}^k \quad \forall i \text{ y } k \quad (9)$$

$$e_i \leq p_i \leq l_i \quad \forall k \quad (10)$$

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in Q} y_{i,j} \leq |Q| \quad (11)$$

\forall subconjunto Q de $(1,2,\dots,n)$

$$k \leq K \quad (12)$$

$$y_{i,j} \in \{0,1\} ; \forall (i,j) \in A \quad (13)$$

$$x_{i,j}^k \in \{0,1\} ; \forall (i,j) \in A, \forall k \quad (14)$$

El conjunto A se define como $A = \{ (i,j) : y_{i,j} = 1 \}$

La restricción (2) se encarga de hacer obligatoria la asignación de un vehículo a la ruta (i,j) , 1 si esta es recorrida, y 0 si no.

Las restricciones (5) y (6) indica que k es la cantidad de vehículos utilizados en la solución y que todos los que parten del almacén deben regresar al mismo.

La restricción (7) garantiza que los vehículos no sobrepasen su capacidad.

La restricción (8) garantiza que el vehículo k cumpla con las ventanas de tiempo.

La restricción (9) obliga a que $p_i = 0$ cada vez que el vehículo k no visita al cliente i

La restricción (10) vigila que la solución no contenga ciclos usando los nodos $1,2,\dots,n$.

La restricción (11) limita el número de vehículos a usar.

Las restricciones (12) y (13) indican que las variables son binarias.

4. DATOS DEL PROBLEMA

- Numero de clientes: 20
- Cada vehículo tiene una capacidad d_i de 100 unidades
- Costo por vehículo : 1000
- Tiempo de servicio: 10

La tabla 1 presenta los requerimientos de los clientes

Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Requerimiento	15	9	24	35	23	32	45	17	49	2
Cliente	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Requerimiento	13	36	15	16	37	21	49	46	10	29

Tabla 1. Requerimientos de los clientes

La tabla 2 presenta los tiempos comprometidos para la entrega y los tiempos de servicio.

Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo	2435	1952	2990	2440	1798	2873	2469	2787	2547	1768
Entrega										
T tiempo servicio	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Cliente	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Tiempo	2620	1860	2742	2880	2432	1898	1877	2234	2595	2020
Entrega										
Tiempo servicio	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Tabla 2. Tiempos prometidos de entrega y tiempos de servicio

La tabla 3 y 4 presentan las distancias (costo) para moverse entre clientes.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1441	1430	1540	1210	880	990	1100	1210	1320	1331
1	1090	0	110	220	330	660	550	440	330	220	110
2	1101	110	0	110	220	550	440	330	220	110	121
3	1211	220	110	0	110	440	330	220	330	220	231
4	1321	451	440	550	0	330	220	110	220	330	341
5	1320	561	550	660	330	0	110	220	330	440	451
6	1210	451	440	550	220	110	0	110	220	330	341
7	1211	341	330	440	110	220	110	0	110	220	231
8	1101	231	220	330	220	330	220	110	0	110	121
9	991	121	110	220	330	440	330	220	110	0	11
10	980	110	220	330	440	550	440	330	220	110	0
11	880	220	330	440	550	660	550	440	330	220	110
12	990	231	220	330	440	550	440	330	220	110	121
13	1100	341	330	440	330	440	330	220	330	220	231
14	1210	451	440	550	220	330	220	110	220	330	341
15	1100	561	550	660	330	440	330	220	330	440	451
16	1210	671	660	770	440	110	220	330	440	550	561
17	880	781	770	880	550	220	330	440	550	660	671
18	990	891	880	990	660	330	440	550	660	770	781
19	1035	936	925	1035	705	375	485	595	705	815	826
20	955	1056	1045	1155	825	495	605	715	825	935	946

Tabla 3. Distancias(costo) de moverse entre clientes

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1320	1210	1100	990	880	770	880	990	1035	955
1	220	330	440	550	660	1210	1320	1430	1475	1395
2	231	220	330	440	550	1100	1210	1320	1365	1285
3	341	330	440	550	440	990	1100	1210	1255	1175
4	451	440	330	440	330	880	990	1100	1145	1065
5	561	550	440	330	220	770	880	990	1035	955
6	451	440	330	220	110	660	770	880	925	845
7	341	330	220	330	220	770	880	990	1035	955
8	231	220	110	220	330	880	990	1100	1145	1065
9	121	110	220	330	440	990	1100	1210	1255	1175
10	110	220	330	440	550	1100	1210	1320	1365	1285
11	0	110	220	330	440	990	1100	1210	1255	1175
12	110	0	110	220	330	880	990	1100	1145	1065
13	220	110	0	110	220	770	880	990	1035	955
14	330	220	110	0	110	660	770	880	925	845
15	440	330	220	110	0	550	660	770	815	735
16	550	440	330	220	110	0	770	880	925	845
17	660	550	440	330	220	110	0	110	155	275
18	770	660	550	440	330	220	110	0	45	165
19	815	705	595	485	375	265	155	45	0	120
20	935	825	715	605	495	385	275	165	120	0

Tabla 4. distancias (costo) de moverse entre clientes

5. DETERMINACIÓN DE LAS SECUENCIAS DE ENTREGA

Las secuencias de entrega de cada vehículo se determinan utilizando la heurística R[4].

Ésta heurística toma algunos eventos y elementos que intervienen en un partido de fútbol (campo de juego, balón, jugadores). El campo de juego es el espacio de soluciones posibles, las posiciones del balón y de un grupo de jugadores son soluciones buenas y malas del problema.

Cuando se inicia el partido de fútbol la primera posición del balón se toma como primera solución del problema y se guarda como la mejor solución hasta el momento. Ahora las posiciones que tienen los jugadores que están cerca o lejos del balón, son también posibles soluciones candidatas del problema, las cuales se deben comparar con la mejor solución hasta el momento. Si alguna de ellas la supera, pasa temporalmente a ser la mejor hasta ahora. Seguidamente los jugadores tratan de apoderarse del balón, y para lograr este objetivo se tienen que desplazar (cambiar de posición). Estas nuevas posiciones o pasos son comparados con la mejor solución calculada hasta el momento. En caso de ser superada, será reemplazada. Es posible que algunos de los jugadores tengan que realizar más movimientos para buscar el balón.

El escenario anterior, se repite continuamente durante el partido, con la particularidad que el balón va ocupando nuevas posiciones en el campo de juego e inclusive se puede dar el evento que se repitan algunas. Y para cada una de estas nuevas posiciones del balón aparecen los mismos (en cantidad y posiblemente en posición) y/o nuevos jugadores.

Después de correr todos los escenarios, se presenta como solución del problema la mejor explorada hasta ese

momento. El número de iteraciones depende del número de posiciones del balón que el investigador define previamente. El tiempo entre iteraciones depende del número de jugadores y de las posiciones que éstos toman con respecto a la posición del balón.

En conclusión, el número de posiciones del balón y el número de jugadores depende del tiempo que tenga el investigador de esperar la respuesta.

5.1 PRESENTACIÓN DE LA HEURÍSTICA R.

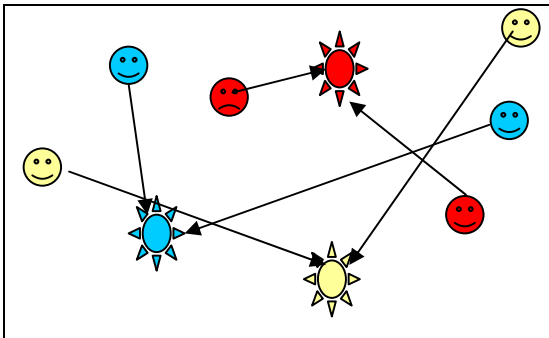
1. Definir el número de posiciones del balón y número de jugadores
2. Generar una solución inicial como primera posición del balón
3. Guardar esta secuencia como la mejor hasta el momento
4. Si el número de posiciones del balón no se han agotado hacer lo siguiente:
 - Generar los jugadores a partir de la posición del balón
 - Hacer que cada jugador se mueva hacia el balón y evaluar cada movimiento:
 - Sí el movimiento supera al mejor, hacer este como el mejor
 - Generar una nueva posición del balón a partir de la mejor secuencia y evaluar:
 - Sí la posición supera la mejor, hacer ésta como la mejor
 - Retornar al paso 4

5.2 MECANISMOS DE PERTURBACIÓN

1. Generación de la nueva posición del balón: Para generar la nueva posición del balón se perturba la mejor solución que se lleva hasta el momento, seleccionando de manera aleatoria dos elementos de esta secuencia y se intercambia de posición.
2. Generación de las nuevas posiciones de los jugadores: Se genera la nueva posición para cada jugador perturbando la posición del balón, seleccionando de manera aleatoria dos elementos de esta secuencia y se intercambia de posición.
3. Movimiento de los jugadores: Cada movimiento de los jugadores se hace perturbando de manera sistemática un elemento a la vez de la secuencia que representa la posición actual, buscando calcar la secuencia de la posición del balón.

Se observa que se utilizan dos mecanismos de perturbación aleatorios y uno sistemático.

En el cuadro 1, se presenta gráficamente la heurística y el cuadro 2, muestra las convenciones respectivas.



Cuadro1. Representación gráfica de la heurística R.

Posición del balón	
Posición del jugador	

Cuadro 2 Convenciones del gráfico.

Para la aplicación de la heurística se desarrolló un programa en **Visual Basic para Excel** donde el usuario puede definir el tamaño de su matriz de distancias y los parámetros de entrada que el método requiere. Se asumió los siguientes valores para los parámetros:

Parámetros:

Posiciones del balón: 100
 Número de jugadores: 3

Para ejecutar la heurística se utiliza la matriz de costos (distancias) determinada por Restrepo y Sánchez⁽¹⁾ y los datos correspondientes al problema.

5.3. RESULTADOS

La heurística resuelve el problema generando una secuencia que luego ella explora evaluando el modelo matemático. Ella utiliza el valor de la distancia como tiempo para ir de un lugar *i* a un lugar *j*. cuando llega temprano, utiliza como tiempo de inicio de servicio p_i el tiempo prometido. Cuando el cliente *j* esta dentro del tiempo, se evalúa la capacidad del vehículo. Si el cliente cumple con ambos requisitos es adicionado a la ruta del vehículo *k*. el proceso se repite para cada cliente *j*, garantizando que todos sean evaluados para la ruta del vehículo *k*. cuando un vehículo ya no puede admitir ningún cliente *j* en su ruta, se genera otro vehículo *k* para

explorar la secuencia con los clientes *j* que no han sido asignados a una ruta o vehículo *k*.

La heurística genera múltiples secuencias que son exploradas, guardando la de mínimo costo.

Al ejecutar la heurística se encontró como mejor programación de vehículos la siguiente:

El almacén se identifica como el nodo 0.

Vehículo 1: 0,5,4,8,0
 Costo ruta: 2531
 Q: 52

Vehículo 2: 0,10,3,0
 Costo ruta: 2872
 Q: 26

Vehículo 3: 0,2,14,0
 Costo ruta: 3080
 Q: 25

Vehículo 4: 0,9,0
 Costo ruta: 2311
 Q: 49

Vehículo 5: 0,13,0
 Costo ruta: 2200
 Q: 15

Vehículo 6: 0,11,0
 Costo ruta: 2200
 Q:13

Vehículo 7: 0,7,6,0
 Costo ruta: 2420
 Q: 77

Vehículo 8: 0,1,0
 Costo ruta: 2531
 Q: 15

Vehículo 9: 0,12,15,0
 Costo ruta: 2640
 Q: 73

Vehículo 10: 0,16,0
 Costo ruta: 1980
 Q: 21

Vehículo 11: 0,18,19,0
 Costo ruta: 2070
 Q: 56

Vehículo 12: 0,17,0

Costo ruta: 1760
Q: 49

Vehículo 13: 0,20,0
Costo ruta: 1910
Q:29

El costo total de la programación de vehículos es:

Costo total de la ruta: 30 505
Costo por vehículo: $1000 * 13 = 13\ 000$

Costo total del programa: 43 505

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El problema VRPTM es un problema complejo que limita las posibilidades de programación por las restricciones de capacidad y el cumplimiento de los tiempos prometidos a los clientes.

Se recomienda utilizar metodologías como las metaheurísticas para observar su comportamiento frente al tiempo de computo y la solución encontrada.

7. BIBLIOGRAFÍA

[1]Aguilera Jorge, Cálculo de rutas de vehículos con ventanas temporales(vrptw), http://jo.us.es/cursos/doctorado/Trabajos_pdf/Jorge_Aguilera_VRPTW.pdf

[2]Cordeau J.F, Desaulniers Guy, Desrosiers Jacques, Solomon Marius, Soumis Francois,The VRP with Time Windows,<http://neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP/data/articles/VRPTW.ps>.

[3]Restrepo Jorge Hernán, Medina Pedro Daniel
Un problema logístico de ruteo de vehículos y una solución con la heurística R: Un caso de estudio. Scientia Technica. Año XIII - Número 37 - Diciembre de 2007 Pag 407

[4]Restrepo Correa Jorge Hernán, Sánchez Castro John Jairo. Aplicación de la teoría de grafos y el algoritmo de dijkstra para determinar las distancias y las rutas más cortas en una ciudad. Scientia et Technica Año X, No 26, Diciembre 2004, Pag 121