SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE LAMÉ UTILIZANDO EXPANSIÓN HOLOMORFA

Lamé system solution by holomorphic expansion

RESUMEN
En este artículo se presenta una aplicación del método de expansiones holomorfas desarrollado en [6] para sistemas de ecuaciones diferencial parcial lineal de orden dos en varias variables a la solución del problema elástico en tres dimensiones conocido como solución del sistema de Lamé.

PALABRAS CLAVES: Análogo complejo, expansión holomorfa,, operador de Cauchy.

ABSTRACT
In this article appears an application of the method of Holomorphic xpansions developed in [6] for systems of equations linear partial differential of order two in several variables to the solution of the elastic problem in three dimensions known like of the solution of the system of Lamé.

KEYWORDS: *Cauchy's operator, complex analog , finite solutions , Holomorphic expansion.*

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Profesor Asistente, MsC
Ingeniero Civil
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO
Profesor Titular, Ph.D
Matemático
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

JOSÉ RODRIGO GONZALEZ GRANADA
Profesor Asistente, Ph.D
Matemático
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

1. Introducción

El análisis complejo ha permitido el estudio de problemas de la física-matemática, en particular, problemas que conducen a EDPs de tipo elíptico que tienen especial aplicación en la teoría de elasticidad.
Si en la ecuación de Laplace $\Delta f = 0$ en dos dimensiones utilizamos coordenadas complejas, ésta puede ser transformada a la forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0 . \tag{1.1}$$

La solución general de (1.1) es de la forma

$$f = F_1(z) + F_2(\overline{z}),$$

donde $F_1(z)$ y $F_2(\overline{z})$ son funciones holomorfas arbitrarias de las variables z y $\overline{z}$ respectivamente. Esto significa que cualquier función armónica se puede representar mediante la suma de dos funciones complejas de z y $\overline{z}$. Aprovechando este hecho G. V. Kolosoff y N. I. Mushelishvili desarrollaron los llamados “métodos de Kolosoff” [1], que tienen aplicación en la teoría de elasticidad. Siguiendo la misma idea de Kolosoff se halla la solución general del problema plano de elasticidad lineal mediante la solución del sistema de Lamé, de tal forma que permite en forma que permite la integración por cuadraturas. En este trabajo se halla la solución general del problema tridimensional de elasticidad, también conocido como el problema de Lamé, mediante la serie $W = \sum_{|n|=0}^{\infty} \overline{z}^n W_n(z)$ conocida como expansión holomorfa que fué aplicada en [2] para resolver EDPs. Aplicamos una extensión de este método a la solución del sistema de Lamé el cual es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la siguiente forma:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \mu \Delta_j = 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

con

$$\theta = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} ,$$

Fecha de Recepción: 4 de Julio de 2008.
Fecha de Aceptación: 15 de Julio de 2008.

λ,μ, son constantes *de Lamé* $(x_1,x_2,x_3)\in D\subset R^3$. Donde D es un conjunto simplemente conexo que incluye el origen.
En este artículo se usan siguientes notaciones:

$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)\ \in\mathbb{R}^m$.

$H\left(\Omega\right)$: es el conjunto de funciones holomorfas en Ω.

$z=\left(z_1,z_2,\ldots,z_m\right)\ \in\mathbb{C}^m$.

$n=\left(n_1,n_2,\ldots,n_m\right);\ n_j\ \in\mathbb{N}\cup\left\{0\right\}$.

$$|n|=\sum_{i=1}^{m}n_i\ .$$

$$z^n=\prod_{i=1}^{m}z_i^{n_i}\ .$$

$$n!=\prod_{i=1}^{m}n_i\,!.$$

$$\sum_{|n|}^{\infty}f_n=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_m=0}^{\infty}f_n\ .$$

Consideremos las siguientes variables complejas

$$z_1=x_1+ix_2,\ z_2=x_3+iy_1, \tag{1.3}$$

en un dominio G del espacio complejo $\mathbb{C}^2$, simplemente conexo que incluye a D como la proyección $x_4=0$. El sistema (1.2) es equivalente al siguiente sistema en el dominio G.

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_j}+\mu\Delta_j=0,\quad j=1,2,3$$
$$\frac{\partial u_j}{\partial y_1}=0. \tag{1.4}$$

2. Construcción del análogo complejo

El análogo complejo del sistema (1.4) se construye intercambiando la derivación parcial por los operadores de Cauchy d_{z_1}, $d_{\overline{z}_1}$ y el operador d_{z_2} los cuales están dados por

$$d_{z_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{x_1}-\frac{\partial}{x_2}i\right),$$
$$d_{\overline{z}_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{x_1}+\frac{\partial}{x_2}i\right), \tag{2.1}$$
$$d_{z_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{x_3}\right).$$

Tal análogo complejo del sistema (1.4) viene dado por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$L_1(u_1,u_2,u_3)=[(\lambda+\mu)\,d_{z_1}^2+2(\lambda+3\mu)\,d_{z_1}d_{\overline{z}_1}$$
$$+(\lambda+\mu)d_{\overline{z}_1}^2+4\mu d_{z_2}^2\,]u_1+i(\lambda+\mu)(d_{z_1}^2-d_{\overline{z}_1}^2)u_2$$
$$+2(\lambda+\mu)d_{z_2}(d_{z_1}-d_{\overline{z}_1})u_3]=0. \tag{2.2}$$

$$L_2(u_1,u_2,u_3)=[(\lambda+\mu)i(d_{z_1}^2-d_{\overline{z}_1}^2)]u_1+[2(\lambda+3\mu)$$
$$d_{z_2}d_{\overline{z}_1}-(\lambda+\mu)\,d_{z_1\overline{z}_1}^2-[(\lambda+\mu)\,d_{\overline{z}_1}^2+4\mu\,d_{z_2}^2\,]\,u_2$$
$$+[2i(\lambda+\mu)d_{z_2}(d_{z_1}-d_{\overline{z}_1})]u_3=0. \tag{2.3}$$

$$L_3(u_1,u_2,u_3)=[2(\lambda+\mu)[\,d_{z_2}(d_{z_1}+d_{\overline{z}_1})]u_1$$
$$+[2\,i(\lambda+\mu)\,d_{z_2}(d_{z_1}-d_{\overline{z}_1})]u_2+[4(\lambda+2\mu)$$
$$d_{z_2}^2+4\mu(d_{z_1}d_{\overline{z}_1})]u_2=0. \tag{2.4}$$

$$L_4(u_1,u_2,u_3)=(d_{z_2}-d_{\overline{z}_2})u_1$$
$$=L_5(u_1,u_2,u_3)=(d_{z_2}-d_{\overline{z}_2})u_2$$
$$=L_6(u_1,u_2,u_3)=(d_{z_2}-d_{\overline{z}_2})u_3=0. \tag{2.5}$$

3. Solución del análogo complejo

Se definen las siguientes funciones de variable compleja

$$W_1=u_1=v_1 i,$$
$$W_2=u_2+v_2 i, \tag{3.1}$$
$$W_3=u_3+v_3 i.$$

Si las partes reales de las funciones complejas W_1,W_2,W_3 satisfacen el análogo complejo entonces u_1,u_2 y u_3 satisfacen el sistema de Lamé (1.2). La afirmación inversa también es verdadera por lo que podemos considerar al análogo complejo y al sistema (1.2) como equivalentes. A continuación expresamos la solución del análogo complejo de la forma:

$$W_j=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\overline{z}_1^{\,n_1}\overline{z}_1^{\,n_2}W_{n_1,n_2}^{\,j}(z_1,z_2),\quad j=1,2,3. \tag{3.2}$$

Utilizando los operadores (2.1) sobre (3.2) se obtiene

$$d_{z_1}^2(W_j)=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\overline{z}_1^{\,n_1}\overline{z}_1^{\,n_2}W_{n_1,n_2}^{\,j},$$

$$d_{\overline{z}_1}^2(W_j)=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}(n_1+2)(n_1+1)\overline{z}_1^{\,n_1}\overline{z}_2^{\,n_2}W_{n_1+2,n_2}^{\,j},$$

$$d_{z_1}d_{\overline{z}_1}(W_j)=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}(n_1+1)\overline{z}_1^{\,n_1}\overline{z}_2^{\,n_2}d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^{\,j},$$

$$d_{z_2}^2(W_j)=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\overline{z}_1^{n_1}\overline{z}_1^{n_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}W_{n_1,n_2}^j, \quad (3.3)$$

$$d_{z_2}d_{z_1}(W_j)=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\overline{z}_1^{n_1}\overline{z}_2^{n_2}d_{z_2}d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^j,$$

$$d_{z_2}d_{\overline{z}_1}(W_j)=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}(n_1+1)\overline{z}_1^{n_1}\overline{z}_2^{n_2}d_{z_2}W_{n_1+1,n_2}^j,$$

$$(d_{z_2}-d_{\overline{z}_2})(W_j)=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}[d_{z_2}W_{n_1,n_2}^j-W_{n_1,n_2+1}^j]\overline{z}_1^{n_1}\overline{z}_2^{n_2}.$$

Sustituyendo (3.3) en el análogo complejo e igualando los coeficientes de la serie se tiene

$$\begin{aligned}&[(\lambda+\mu)(n_1+2)(n_1+1)W_{n_1+2,n_2}^1-i(\lambda+\mu)\\&(n_1+2)(n_1+1)W_{n_1+2,n_2}^2+2(\lambda+3\mu)(n_1+1)\\&d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^1+2(\lambda+\mu)(n_1+1)d_{z_2}W_{n_1+1,n_2}^3\\&+(\lambda+\mu)d_{z_1}^2W_{n_1,n_2}^1+4\mu d_{z_2}^2W_{n_1,n_2}^1+i(\lambda+\mu)\\&(d_{z_1}^2W_{n_1,n_2}^2+2(\lambda+\mu)d_{z_2}d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^3)](z_1,z_2)\\&=0,\end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}&[-(\lambda+\mu)i(n_1+2)(n_1+1)W_{n_1+2,n_2}^1-(\lambda+\mu)\\&(n_1+2)(n_1+1)W_{n_1+2,n_2}^2+2(\lambda+3\mu)(n_1+1)\\&d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^2-2i(\lambda+\mu)(n_1+1)d_{z_2}W_{n_1+1,n_2}^3\\&+(\lambda+\mu)id_{z_1}^2W_{n_1,n_2}^1+4\mu d_{z_2}^2W_{n_1,n_2}^1-(\lambda+\mu)\\&(d_{z_1}^2W_{n_1,n_2}^2+2i(\lambda+\mu)d_{z_2}d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^3)](z_1,z_2)\\&=0,\end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}&[2(\lambda+\mu)(n_1+1)d_{z_2}W_{n_1+1,n_2}^1-2i(\lambda+\mu)\\&(n_1+1)d_{z_2}W_{n_1+1,n_2}^2+4\mu(n_1+1)d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^3\\&+2(\lambda+\mu)d_{z_2}d_{z_1}W_{n_1,n_2}^1+2i(\lambda+\mu)d_{z_2}d_{z_1}\\&W_{n_1,n_2}^2+4(\lambda+2\mu)d_{z_2}^2W_{n_1,n_2}^3](z_1,z_2)=0,\end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}&[d_{z_2}W_{n_1,n_2}^1-(n_2+1)W_{n_1,n_2+1}^1](z_1,z_2)=0,\\&[d_{z_2}W_{n_1,n_2}^2-(n_2+1)W_{n_1,n_2+1}^2](z_1,z_2)=0,\\&[d_{z_2}W_{n_1,n_2}^3-(n_2+1)W_{n\ ,n_2+1}^3](z_1,z_2)=0.\end{aligned} \quad (3.7)$$

Con el fin de reducir el sistema se realizan las siguientes operaciones.

Derivando parcialmente con respecto a z_2 la diferencia de la ecuación (3.5) y la (3.4) multiplicada por el imaginario i se obtiene

$$\begin{aligned}&[-2(\lambda+3\mu)(n_1+1)d_{z_2}d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^1-2i(\lambda+3\mu)\\&(n_1+1)d_{z_2}d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^2-2(\lambda+\mu)d_{z_2}d_{z_1}^2(n_1+1)\\&W_{n_1,n_2}^1-4\mu d_{z_2}^3W_{n_1,n_2}^1+4i\mu d_{z_2}^3W_{n_1,n_2}^2-2i(\lambda+\mu)\\&+d_{z_2}d_{z_1}^2W_{n_1,n_2}^2-4(\lambda+\mu)d_{z_2}^2d_{z_1}W_{n_1,n_2}^3](z_1,z_2)=0.\end{aligned} \quad (3.8)$$

De igual modo, derivando parcialmente con respecto a z_1 la ecuación (3.6) multiplicada por la constante $\dfrac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$ se tiene

$$\begin{aligned}&[2(\lambda+3\mu)(n_1+1)d_{z_2}d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^1-2i(\lambda+3\mu)(n_1+1)\\&d_{z_2}d_{z_1}W_{n_1+1,n_2}^2+4\mu\frac{(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}(n_1+1)d_{z_1}^3W_{n_1+1,n_2}^3\\&+2(\lambda+3\mu)d_{z_2}d_{z_1}^2W_{n_1,n_2}^1+2i(\lambda+3\mu)d_{z_2}d_{z_1}^2W_{n_1,n_2}^2\\&+4\mu\frac{(\lambda+2\mu)(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}d_{z_2}^2d_{z_1}W_{n_1,n_2}^3](z_1,z_2)=0.\end{aligned} \quad (3.9)$$

De (3.8) y (3.9) mediante suma se obtiene

$$\begin{aligned}&[4\mu\frac{(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}(n_1+1)d_{z_1}^3W_{n_1+1,n_2}^3+4\mu d_{z_2}d_{z_1}^2W_{n_1,n_2}^1\\&-4\mu id_{z_2}^3W_{n_1,n_2}^1+4i\mu d_{z_2}^3W_{n_1,n_2}^2+4i\mu d_{z_2}d_{z_1}^2W_{n_1,n_2}^2\\&+4\mu\frac{(3\lambda+5\mu)}{(\lambda+\mu)}d_{z_2}^2d_{z_1}W_{n_1,n_2}^3](z_1,z_2)=0.\end{aligned} \quad (3.10)$$

Aprovechando la simetría de las ecuaciones y considerando la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned}V_{n_1,n_2}^1&=W_{n_1,n_2}^1+iW_{n_1,n_2}^2\\V_{n_1,n_2}^2&=W_{n_1,n_2}^1-iW_{n_1,n_2}^2\\V_{n_1,n_2}^3&=W_{n_1,n_2}^3,\end{aligned} \quad (3.11)$$

o equivalentemente,

$$W_{n_1,n_2}^1=\frac{V_{n_1,n_2}^1+V_{n_1,n_2}^2}{2},V_{n_1,n_2}^2=\frac{V_{n_1,n_2}^1-V_{n_1,n_2}^2}{2} \quad (3.12)$$

$$W_{n_1,n_2}^3=V_{n_1,n_2}^3,$$

de (3.4)-(3.6) y (3.10) se obtiene

$$\begin{aligned}&[(\lambda+\mu)(n_1+2)(n_1+1)V_{n_1+2,n_2}^2+(\lambda+3\mu)(n_1+1)\\&(d_{z_1}V_{n_1+1,n_2}^1+d_{z_1}V_{n_1+1,n_2}^2)+2(\lambda+\mu)(n_1+1)d_{z_2}V_{n_1+1,n_2}^3\\&+(\lambda+\mu)d_{z_1}^2V_{n_1,n_2}^1+2\mu(d_{z_2}^2V_{n_1,n_2}^1+d_{z_2}^2V_{n_1,n_2}^2)+2(\lambda+\mu)\\&d_{z_2}^2d_{z_1}V_{n_1,n_2}^3](z_1,z_2)=0.\end{aligned} \quad (3.13)$$

$$[\frac{1}{i}(\lambda+\mu)(n_1+2)(n_1+1)V^2_{n_1+2,n_2}+\frac{1}{i}(\lambda+3\mu)$$
$$(n_1+1)\,(d_{z_1}V^1_{n_1+1,n_2}-d_{z_1}V^2_{n_1+1,n_2})-2i(\lambda+\mu) \qquad (3.14)$$
$$(n_1+1)\,d_{z_2}V^3_{n_1+1,n_2}-\frac{1}{i}(\lambda+\mu)\,d_{z_1}V^1_{n_1,n_2}+2\frac{\mu}{i}$$
$$(d^2_{z_2}V^1_{n_1,n_2}-d^2_{z_2}V^2_{n_1,n_2})+2i(\lambda+\mu)d_{z_2}d_{z_1}V^3_{n_1,n_2}](z_1,z_2)=0.$$

$$[2(\lambda+\mu)(n_1+1)d_{z_2}V^2_{n_1+1,n_2}\,4\mu(n_1+1)d_{z_1}V^3_{n_1+1,n_2} \qquad (3.15)$$
$$+2(\lambda+\mu)d_{z_2}d_{z_1}V^1_{n_1,n_2}+4(\lambda+2\mu)\,d^2_{z_2}V^3_{n_1,n_2}](z_1,z_2)=0.$$

$$[4\mu\frac{(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}(n_1+1)d^2_{z_1}V^3_{n_1+1,n_2}+4\mu d_{z_2}d^2_{z_1}$$
$$V^1_{n_1,n_2}-4\mu d^3_{z_2}\,V^2_{n_1,n_2}+4\mu\frac{(3\lambda+5\mu)}{(\lambda+\mu)}d^2_{z_2}$$
$$d_{z_1}V^3_{n_1,n_2}](z_1,z_2)=0. \qquad (3.16)$$

Derivando parcialmente respecto de z_1 la ecuación (3.15) y al multiplicar por $\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$ se obtiene

$$[2(\lambda+\mu)\,(n_1+1)d_{z_1}d_{z_2}V^2_{n_1+1,n_2}+4\mu(n_1+1) \qquad (3.17)$$
$$\frac{(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}d^2_{z_1}\,V^3_{n_1+1,n_2}+2(\lambda+3\mu)\,d_{z_2}d^2_{z_1}V^1_{n_1,n_2}$$
$$+\frac{4(\lambda+2\mu)(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)}d_{z_1}d^2_{z_2}V^3_{n_1,n_2}](z_1,z_2)=0.$$

De (3.16) y (3.17) e integrando con respecto a z_2 se obtiene

$$[(\lambda+3\mu)\,(n_1+1)d_{z_1}V^2_{n_1+1,n_2}(z_1,z_2)=-[(\lambda+\mu)d^2_{z_1}V^1_{n_1,n_2}$$
$$-2\mu d^2_{z_2}V^2_{n_1,n_2}-2(\lambda+\mu)d_{z_1}d_{z_2}V^3_{n_1,n_2}](z_1,z_2). \qquad (3.18)$$

De manera análoga de (3.13) y (3.14) se tiene

$$[(\lambda+\mu)(n_1+2)(n_1+1)V^2_{n_1+2,n_2}+2(\lambda+\mu)(n_1+1)$$
$$(d_{z_2}V^3_{n_1+1,n_2}+2\mu d^2_{z_2}V^1_{n_1,n_2})+(\lambda+3\mu)(n_1+1)$$
$$d_{z_1}V^1_{n_1+1,n_2}](z_1,z_2)=0. \qquad (3.19)$$

Aumentando el índice de n_1 a n_1+1en la ecuación (3.18) se llega a

$$[(\lambda+3\mu)(n_1+2)d_{z_1}V^2_{n_1+2,n_2}+(\lambda+\mu)d^2_{z_1}V^1_{n_1,n_2}+2\mu$$
$$d^2_{z_2}V^2_{n_1+1,n_2}+2(\lambda+\mu)d_{z_1}d_{z_2}V^3_{n_1+1,n_2}](z_1,z_2)=0. \qquad (3.20)$$

De (3.19) y (3.20) se obtiene

$$[(\lambda+\mu)(n_1+1)d^2_{z_2}V^2_{n_1+1,n_2}-2\mu(\lambda+\mu)(n_1+1)$$
$$d_{z_1}d_{z_2}V^3_{n_1+1,n_2}-\mu\,(\lambda+3\mu)\,d_{z_1}d^2_{z_2}V^1_{n_1,n_2}-2\mu$$
$$(\lambda+2\mu)(n_1+1)d^2_{z_1}V^1_{n_1+1,n_2}](z_1,z_2)=0. \qquad (3.21)$$

Derivando parcialmente dos veces con respecto a z_2 la ecuación (3.19) y una vez con respecto a z_1 la ecuación (3.21) e igualándolas, se obtiene el siguiente resultado

$$[(\lambda+3\mu)(n_1+1)d^3_{z_2}V^2_{n_1+1,n_2}](z_1,z_2)=[-2\mu d^2_{z_1}$$
$$d^2_{z_2}(\lambda+\mu)V^1_{n_1,n_2}-(\lambda+\mu)d^4_{z_2}V^2_{n_1,n_2}+2(\lambda+\mu)$$
$$d_{z_1}d^3_{z_2}V^3_{n_1,n_2}](z_1,z_2). \qquad (3.22)$$

Las ecuaciones (3.7) con las transformaciones de coordenadas (3.11) toman la forma

$$[d_{z_2}V^1_{n_1,n_2}-(n_2+1)V^1_{n_1,n_2+1}](z_1,z_2)=0,$$
$$[d_{z_2}V^2_{n_1,n_2}-(n_2+1)V^2_{n_1,n_2+1}](z_1,z_2)=0, \qquad (3.23)$$
$$[d_{z_2}V^3_{n_1,n_2}-(n_2+1)V^3_{n\ ,n_2+1}](z_1,z_2)=0.$$

De (3.16), (3.18), (3.22) y (3.23) se obtiene

$$V^1_{n_1+1,n_2}(z_1,z_2)=-\frac{1}{(\lambda+3\mu)(n_1+1)}[2\mu Jd^2_{z_2}V^1_{n_1,n_2} \qquad (3.24)$$
$$+(\lambda+\mu)J^3d^4_{z_2}V^2_{n_1,n_2}-2(\lambda+\mu)J^2d^3_{z_2}V^3_{n_1,n_2}](z_1,z_2)$$

$$V^2_{n_1+1,n_2}(z_1,z_2)=\frac{1}{(\lambda+3\mu)(n_1+1)}[2\mu(\lambda+\mu)d_{z_1}V^1_{n_1,n_2}$$
$$+2\mu Jd^2_{z_2}V^2_{n\ ,n_2}+2(\lambda+\mu)d_{z_2}V^3_{n_1,n_2}](z_1,z_2) \qquad (3.25)$$

$$4\mu\frac{(\lambda+3\mu)(n_1+1)}{(\lambda+\mu)}d^2_{z_1}V^3_{n_1+1,n_2}(z_1,z_2)=-\frac{1}{(\lambda+3\mu)}$$
$$\frac{1}{(n_1+1)}[(\lambda+\mu)d_{z_2}V^1_{n_1,n_2}-(\lambda+\mu)J^2d^3_{z_2}V^2_{n_1,n_2}$$
$$+(\lambda+5\mu)Jd^2_{z_2}V^3_{n_1,n_2}](z_1,z_2) \qquad (3.26)$$

$$V^1_{n_1,n_2+1}(z_1,z_2)=\frac{1}{(n_2+1)}d_{z_2}V^1_{n_1,n_2}(z_1,z_2) \qquad (3.27)$$
$$V^2_{n_1,n_2+1}(z_1,z_2)=\frac{1}{(n_2+1)}d_{z_2}V^2_{n_1,n_2}(z_1,z_2)$$
$$V^3_{n_1,n_2+1}(z_1,z_2)=\frac{1}{(n_2+1)}d_{z_2}V^3_{n_1,n_2}(z_1,z_2),$$

donde $J\phi(z)=\int_0^{z_1}\phi(\xi,\zeta)d\xi$.

Representando el sistema de ecuaciones (3.6), (3.25) y (3.26) en forma matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} V^1_{n_1+1,n_2} \\ V^2_{n_1+1,n_2} \\ V^3_{n_1+1,n_2} \end{bmatrix} = [J^3 A_1 + J^2 d^3_{z_2} A_2 + J d^2_{z_2} A_3 + d_{z_1} A_4 + d_{z_2} A_5] \begin{bmatrix} V^1_{n_1,n_2} \\ V^2_{n_1,n_2} \\ V^3_{n_1,n_2} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

donde las matrices A_i vienen dadas por

$$A_1 = \frac{1}{n_1+1}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = -\frac{1}{n_1+1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{(\lambda+3\mu)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = -\frac{1}{n_1+1}\begin{bmatrix} \frac{2\mu}{\lambda+3\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\mu}{\lambda+3\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{\lambda+3\mu} \end{bmatrix},$$

$$A_4 = -\frac{1}{n_1+1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_5 = -\frac{1}{n_1+1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} \\ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo (3.27) y (3.28) se obtiene finalmente la siguiente expresión explícita para $V^j_{n_1,n_2}(z_1,z_2)$:

$$\begin{bmatrix} V^1_{n_1,n_2} \\ V^2_{n_1,n_2} \\ V^3_{n_1,n_2} \end{bmatrix} = \frac{(-1)^{n_1}}{n_1!\,n_2!} d^{n_2}_{z_2} [J^3 d^4_{z_2} A_1 + J^2 d^3_{z_2} A_2 + J d^2_{z_2} A_3$$

$$+ d_{z_1} A_4 + d_{z_2} A_5] \begin{bmatrix} V^1_{0,0} \\ V^2_{0,0} \\ V^3_{0,0} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Nota. Para obtener (3.29) se asume que $J^2 d^2_{z_1} A_2 V^j_{n_1,n_2} = J d_{z_1} V^j_{n_1,n_2} = V^j_{n_1,n_2}$. Esta afirmación restringe la clase de funciones iniciales a aquellas que satisfacen: $V^j_{n_1,n_2}(0,z_2) \equiv d_{z_1} V^j_{n_1,n_2}(0,z_2) \equiv 0.$

La convergencia en expansiones holomorfas de la solución del sistema (3.29) se deduce de los resultados obtenidos en [2,3].

4. CONCLUSIÓN GENERAL

El hallar soluciones analíticas del problema tridimensional elástico tiene múltiples aplicaciones al campo de la investigación del modelamiento real de los sólidos sometidos a cargas y deformaciones, basta recordar el gran aporte realizado por la elasticidad plana en la resistencia de materiales y al diseño de estructuras sometidas tensiones y deformaciones.

Se ha construido un procedimiento para hallar soluciones generales y exactas al sistema de Lamé por el método de las expansiones holomorfas las cuales vienen dadas en forma explícita del sistema (3.29).

También es posible una generalización de la solución del sistema de Lamé para tratar problemas no homogéneos [4].

Los resultados expuestos son comparables con los que se presentan en [5,6].

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] V.I Vasov, S.L Skorokhodov, *On the development of Trefftz method*, Dokl.-Akad.-Nauk, **337**(6) (1994), 713-717.

[2] A. Rodionov, *Explicit Solutions for linear partial differential equations*, J.-Math, Vol 2, No 2. December (2000), 34-42.

[3] C. M. Escobar, *Solución al sistema de Lamé utilizando la variable compleja, tesis de grado, Universidad Nacional de Colombia*. (2003).

[4] A.I Alexandrovich, *Application of two complex variables to the theory of elasticity*, Dokl.-Akad.-Nauk **232**(3) (1977), 542-544.

[5] K. Rectorys, V. Zahradnik, *Solution of he first biharmonic problem by the method of leat squares on the boundary, Aplikace Matematiky*, **19**(2) (1974), 101-131.

[6] A. Turbiner, *On polynomial solutions of differential equations*, J.-Math.-Phys**.** **33**(12) (1992), 3989-3993.

[7] P.S. Pedersen, *A basis for polynomial solutions to systems of linear constants coefficient PDEs*, Adv.-Math **117** (1) (1996), 157-163.