EL TEOREMA DE ENGEL

Engel's theorem

RESUMEN
Las álgebras de Lie abrieron un basto campo de aplicaciones en la física, las ecuaciones diferenciales, la geometría diferencial, el álgebra lineal y el álgebra abstracta. A continuación se presenta una demostración del teorema de Engel. Este teorema constituye una de las bases de la teoría de las álgebras de Lie y en sí mismo se corresponde con una propiedad general del álgebra lineal. En particular el teorema de Engel dice que un conjunto de transformaciones lineales nilpotentes en un espacio de dimensión finita cerradas para el corchete de Lie poseen un autovector común asociado al valor propio cero.

PALABRAS CLAVES: Álgebra de Lie, Endomorfismo nilpotente, Espacios vectoriales invariantes.

ABSTRACT
The Lie algebras opened a vast field of applications in physics, differential equations, differential geometry, linear algebra and abstract algebra. Below is a demonstration of the Engel's theorem. This theorem is one of the foundations of the theory of Lie algebras and, in itself corresponds to a general property of linear algebra. In particular Engel's theorem states that a set of linear nilpotent transformations in a finite dimensional vector space closed for the Lie bracket has a common eigenvector associated to the eigenvalue zero.

KEYWORDS: *Lie Algebras, Nilpotent endomorphism, Invariant vector space.*

ALEXÁNDER GUTIÉRREZ
Matemático, M. Sc.
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
alexguti@utp.edu.co

CARLOS ARTURO MORA
Matemático, Ph.D.
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
morac@utp.edu.co

YURI ALEXANDER POVEDA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
yapoveda@utp.edu.co

1. INTRODUCCION

El teorema de Engel sobre álgebras de Lie cuyos elementos son ad-nilpotentes es uno de los resultados clásicos en la teoría de álgebras de Lie.

En Álgebra Lineal para cada transformación lineal (o matriz) nilpotente existe una base en la cual la transformación tiene una matriz (estrictamente) triangular superior. En el contexto de las Álgebras de Lie el problema es más complejo: dada una subálgebra $\mathcal{L}$ de Lie compuesta por transformaciones lineales $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, ¿existe una base de $\mathcal{V}$ en la cual todas las transformaciones de $\mathcal{L}$ están representadas por matrices triangulares superiores? El teorema de Engel responde a este interrogante, vía las transformaciones nilpotentes.

2. CONTENIDO

Álgebras de Lie

Definición 1. Un espacio vectorial V es un álgebra de Lie si existe una aplicación bilineal de $[\cdot\cdot]: V \times V \to V$ que satisface:

1. $[xx] = 0$ para todo $x \in V$.
2. $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0$ para $x, y, z \in V$

La propiedad 2 es conocida como la identidad de Jacobi.

Este artículo es auto contenido y se ha escrito con la estructura mínima necesaria para demostrar el teorema de Engel. Para tener una visión más amplia el lector puede consultar [1], [2] y [3].

2.1 EL ÁLGEBRA DE LAS DERIVACIONES

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, decimos que una transformación lineal $T : V \to V$ es una derivación respecto a la forma bilineal $\centerdot : V \times V \to V$ si cumple con la regla de Leibniz

$$T(a \centerdot b) = a \centerdot T(b) + T(a) \centerdot b$$

Teorema 1. El conjunto de todas las derivaciones $Der\, V$ (respecto a la forma bilineal $\centerdot$) munido del corchete

$$[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$$

Es un álgebra de Lie.

Demostración. Notaremos con la yuxtaposición a la forma bilineal: $a \centerdot b = ab$

1) $DerV$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{gl}(V)$:

Dados $T_1, T_2 \in DerV$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha T_1,\ T_1 + T_2 \in DerV$, en efecto,

a) $\alpha T_1(ab) = \alpha(aT_1(b) + T_1(a)b) = a\alpha T_1(b) + \alpha T_1(a)b$

Fecha de Recepción: 5 de Junio de 2008.
Fecha de Aceptación: 1º de Septiembre de 2008.

b)
$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(ab) &= T_1(ab)+T_2(ab) = aT_1(b)+T_1(a)b+aT_2(b)+T_2(a)b \\ &= a(T_1+T_2)+(T_1+T_2)(a)b\end{aligned}$$

c) $DerV$ es cerrado para el corchete : dados $T_1, T_2 \in DerV$ entonces $[T_1\, T_2] \in Der\, V$, en efecto,

$$\begin{aligned}[T_1\, T_2](ab) &= (T_1T_2 - T_2T_1)(ab) = (T_1T_2)(ab) - (T_2T_1)(ab) \\ &= T_1(aT_2(b)+T_2(a)b) - T_2(aT_1(b)+T_1(a)b) \\ &= a(T_1(T_2(b)) - (T_2(T_1(b))) + (T_1(T_2(a)) - T_2(T_1(a)))b \\ &= a[T_1\, T_2](b) + [T_1\, T_2](a)b\end{aligned}$$

□

Dado L un álgebra de Lie, se define $Der\, L$ el conjunto de derivaciones respecto al corchete de L como la forma bilineal.
Consideremos el conjunto $ad_L \subseteq DerL$,

$$ad_L = \{ad_x \in Der\, L | x \in L\}$$

con $ad_x(y) = [xy]$

$\mathbf{ad_x}$ ***es una derivación:***

$$\begin{aligned}ad_x([y,z]) &= [x\,[y\,z]] = [y\,[x\,z]] + [[x\,y]\,z] \text{ (Por la identidad de Jacobi)} \\ &= [y\, ad_x(z)] + [ad_x(y)\, z]\end{aligned}$$

Definición 2. Un subespacio I de un algebra de Lie L es un ideal de L si para todo $x \in I$ y todo $y \in L$ $[xy] \in I$.

Como ejemplos triviales de ideales de un álgebra de Lie L tenemos a L y 0. Un ejemplo menos trivial de un ideal es el centralizador de L, que se denota por $Z(L)$ y esta definido como

$$Z(L) = \{x \in L : [x\,y] = 0 \text{ para todo } y \in L\}.$$

Teorema 2. ad_L es un ideal de $Der\, L$.

Demostración. Dados $ad_x \in ad_L$ y $D \in Der\, L$,

$$\begin{aligned}[ad_x\, D](y) &= ad_x \circ D(y) - D \circ ad_x(y) \\ &= [x\, D(y)] - D([x\,y]) \\ &= [x\, D(y)] - [x\, D(y)] - [D(x)\, y] \\ &= -ad_{D(x)}(y)\end{aligned}$$ □

En particular ad_x es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in L$.

$$ad_x^n(y) = \underbrace{ad_x ad_x \cdots ad_x}_{n-\text{veces}}(y) = 0$$

La aplicación $ad : L \to Der(L) \subset \mathfrak{gl}(L)$ que envía x en ad_x, es un morfismo de álgebras de Lie debido a que el corchete es bilineal y ad preserva el corchete; en efecto,

$$\begin{aligned}[ad_x\, ad_y](z) &= [ad_x(z)\, ad_y(z)] \\ &= ad_x ad_y(z) - ad_y ad_x(z) \\ &= [x\,[y\,z]] - [y\,[x\,z]] \\ &= [x\,[y\,z]] + [[x\,z]\,y] \\ &= [[x\,y]\,z] \text{ (Por la identidad de Jacobi)} \\ &= ad_{[x\,y]}(z)\end{aligned}$$

La aplicación precedente se conoce como representación adjunta de L.
Por definición

$$Ker(ad) = \{x \in L | ad_x = 0\}$$

El $Ker(ad)$ es el conjunto de los x tales que $[x\,y] = 0$ para todo $y \in L$, es decir

$$Ker(ad) = Z(L)$$

Una consecuencia interesante del hecho precedente es que si L es simple (es decir no tiene ideales propios diferentes del ideal cero y el corchete no es la forma bilineal idénticamente cero) entonces $Z(L) = 0$ y ad es inyectiva. Consecuentemente ***cualquier álgebra de Lie simple es isomorfa a un álgebra de Lie lineal.***

2.2 EL ÁLGEBRA DERIVADA

Dada un álgebra de lie L, se define $[LL]$ (el álgebra derivada de L) como el conjunto de elementos de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_i, y_i]$ con $x_i, y_i \in L$.
Recordemos que por definición $[LL]$ es un ideal de L, lo mismo que $L^{(i)} = [L^{(i-1)} L^{(i-1)}]$, con $L^{(0)} = L$. Los ideales precedentes forman una cadena descendente de ideales de L.
Definición 3. Decimos que L es soluble si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L^{(n)} = 0$

Consecuentemente toda álgebra de Lie abeliana es soluble (el corchete siempre es igual a cero) y toda álgebra simple no trivial no es soluble.

Ejemplo 1. El álgebra de Lie lineal de las matrices triangulares superiores de tamaño $n \times n$ que llamaremos $\mathfrak{t}(n)$ (supondremos que el cuerpo subyacente F es de característica cero y mientras no haya confusión no hablaremos de él), es un álgebra soluble.
Demostración. La base canónica de $\mathfrak{t}(n)$ es el conjunto de matrices e_{ij} (matrices que tienen un uno en la entrada ij y cero en las demás entradas) con $i \leq j$; por lo cual su dimensión es $\frac{n(n+1)}{2}$.
Se observa directamente que

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj}$$

En particular $[e_{ii}, e_{il}] = e_{il}$ con $i < j$ muestra que,

$$\mathfrak{n}(n) \subseteq [\mathfrak{t}(n), \mathfrak{t}(n)]$$

con $\mathfrak{n}(n)$ el álgebra lineal de Lie de las matrices estrictamente triangulares superiores (con ceros aún en la diagonal).

Como $\mathfrak{t}(n) = \mathfrak{d}(n) \oplus \mathfrak{n}(n)$ con $\mathfrak{d}(n)$ el álgebra lineal de Lie abeliana de las matrices diagonales de tamaño $n \times n$, entonces

$$\mathfrak{n}(n) \subseteq [\mathfrak{t}(n)\, \mathfrak{t}(n)] = [\mathfrak{d}(n), \mathfrak{d}(n)] \oplus [\mathfrak{n}(n), \mathfrak{n}(n)] = [\mathfrak{n}(n), \mathfrak{n}(n)] \subseteq \mathfrak{n}(n)$$

Recordemos $[\mathfrak{d}(n), \mathfrak{d}(n)] = 0$ por ser abeliana. Consecuentemente

$$\mathfrak{n}(n) = [\mathfrak{t}(n), \mathfrak{t}(n)]$$

Para demostrar que $\mathfrak{t}(n)$ es soluble es suficiente demostrar que $\mathfrak{n}(n)$ lo es. Observemos que para cualquier par de elementos e_{ij}, e_{kl} de $\mathfrak{n}(n)$ (lo cual significa que $i < j$, y $k < l$),

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \begin{cases} e_{il} & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Consecuentemente para todo $e_{il} \in \mathfrak{n}(n)^{(1)} = [\mathfrak{n}(n), \mathfrak{n}(n)]$ se tiene que $l - i \geq 2$.

Un razonamiento análogo nos muestra que para cualquier elemento $e_{ij} \in \mathfrak{n}(n)^{(m)}$ se tiene que $j - i \geq 2^m$. Como las matrices son de tamaño $n \times n$ es claro que $\mathfrak{t}(n)^{(m)} = 0$ para $2^m \geq n - 1$.

3. NILPOTENCIA

Definimos la siguiente serie descendente de ideales,

$$L^0 = L \supseteq L^1 = [L\, L] \supseteq L^2 = [L\, L^1] \supseteq \cdots \supseteq L^i = [L\, L^{i-1}]$$

Definición 4. L se dirá nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L^n = 0$.

En particular cualquier álgebra abeliana es nilpotente y claramente para todo i

$$L^{(i)} \subset L^i$$

Consecuentemente toda álgebra nilpotente es soluble. Sin embargo la conversa en falsa. Si consideramos el álgebra soluble $L = \mathfrak{t}(n)$ se verifica directamente que $L^i = L^1$ para todo $i \geq 1$ y consecuentemente L no es nilpotente.

Teorema 3. Sea L un álgebra de Lie

1. Si L es nilpotente entonces cualquier subálgebra y cualquier imagen homomórfica también lo es.
2. Si $L/Z(L)$ es nilpotente, entonces L también lo es.
3. Si L es nilpotente y diferente de cero, entonces $Z(L) \neq 0$.

Demostración.

1) Se sigue directamente por construcciones del álgebra universal.
2) Por definición existe un n tal que $L^n \subset Z(L)$ y, por lo tanto $L^{n+1} = 0$.
3) Existe n tal que $L^n = 0$ y $L^{n-1} \neq 0$ y $L^{n-1} \subseteq Z(L)$ por definición. □

Definición 5. Para todo $x \in L$ diremos que x es un elemento ad□ nilpotente si el endomorfismo ad_x es nilpotente, es decir si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(ad_x)^n = 0$.

Si L es nilpotente entonces todos sus elementos son $ad-$nilpotentes debido a que para todo $x, y \in L$,

$$(ad_x)^n(y) \in L^n$$

Es sorprendente que la conversa también es verdadera.

Teorema 4. [Engel] Si todos los elementos de L son ad□ nilpotentes, entonces L es nilpotente.

Para demostrar el teorema precedente es necesario demostrar antes el lema 1 y el teorema 5.

Lema 1. Sea $x \in \mathfrak{gl}(V)$ un endomorfismo nilpotente, entonces ad_x también es nilpotente.

Demostración. Consideremos los endomorfismos $\lambda_x(y) = xy$, $\rho_x(y) = yx$ que son nilpotentes debido a que x lo es. Se verifica directamente que

$$\lambda_x \circ \rho_x = \rho_x \circ \lambda_x$$

La suma o la diferencia de dos endomorfismos nilpotentes que conmutan también es nilpotente; si $(\lambda_x)^n = 0$ y $(\rho_x)^m = 0$ entonces $(\lambda_x - \rho_x)^{mn} = 0$ (usa la formula del binomio y la conmutatividad de cada endomorfismo). Consecuentemente $ad_x = \lambda_x - \rho_x$ es nilpotente. □

Recordemos que una matriz x puede ser ad-nilpotente sin que x lo sea (por ejemplo si x es la matriz identidad). $\mathfrak{t}(n)$ es soluble y no es nilpotente, mientras $\mathfrak{n}(n)$ es nilpotente y por lo tanto soluble.

Teorema 5. Sea L una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ con V un F□ espacio vectorial de dimensión finita. Si L consiste de endomorfismos nilpotentes y $V \neq 0$, entonces existe un vector $v \in V$ distinto del vector cero que está en el Ker de todos los endomorfismos de L (con abuso de notación escribiremos $L \cdot v = 0$).

Demostración. Recordemos que toda transformación nilpotente tiene al menos un autovector correspondiente al único autovalor cero. Este hecho demuestra el teorema para el caso $dim\, L = 1$.

Por inducción en la dimensión de L, supongamos que toda subálgebra K de dimensión menor que la dimensión de L tiene la propiedad y, demostremos que L la tiene.

Sin perdida de generalidad supongamos $K \subsetneq L$ subálgebra propia de L; como los elementos de K son nilpotentes entonces los elementos de K son adnilpotentes como endomorfismos de L. Consecuentemente ad_K es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(L)$, con

$$ad_K = \{ad_y | y \in K\}$$

Y $\overline{ad_K}$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(L/K)$, con

$$\overline{ad_K} = \{\ \overline{ad_y} \quad | \ y \in K\}$$

Se debe entender que

$\overline{ad_y}(\overline{x}) = [yx] + K = ad_y(x) + K.$

Como $dim\, L/K < dim\, L$ (se usa que $K \neq L$) entonces existe $x + K \in L/K$ vector diferente de cero tal que $\overline{ad_K} \cdot (x + K) = 0$. Consecuentemente existe $x \notin K$ tal que $[xy] \in K$ para todo $y \in K$.

Consideremos el normalizador de K

$$N_L(K) = \{z \in L \,|\, [zy] \in K\}$$

Observemos que $K \subsetneq N_L(K)$ debido a que $x \notin K$.

Si K una subálgebra maximal de L, se sigue que $N_L(K) = L$ y consecuentemente se sigue que K es un ideal de L.

Si tomamos K subálgebra maximal de L necesariamente $dim(L/K) = 1$; de lo contrario tomamos la imagen inversa de la subálgebra generada por un elemento v de una base de L/K por el epimorfismo

$$L \xrightarrow{\phi} L/K$$

Lo cual significa que

$$K \subsetneq \phi^{-1}(< v >) \subsetneq L$$

que es absurdo debido a que K es maximal.

Consecuentemente $L = K \oplus < z >$ para cualquier $z \in L - K$.

Por hipótesis de inducción el conjunto $W = \{v \in V \,|\, K \cdot v = 0\} \neq \{0\}$, como K es un ideal entonces para todo $x \in L, y \in K, w \in W$ se tiene que

$$yx \cdot w = xy \cdot w - [xy] \cdot w = 0$$

La primera igualdad se obtiene de la definición del corchete en las álgebras de Lie lineales y la segunda igualdad se sigue de que los elementos de K anulan los elementos de W. Consecuentemente W es invariante por los elementos de L.

Consecuentemente $L - K$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(W)$ de dimensión 1, entonces para $z \in L - K$ existe un autovector $v \in W$ diferente de cero para el cual $z \cdot v = 0$, y consecuentemente $L \cdot v = 0$. $\square$

Demostración del teorema de Engel

Sea L un álgebra de Lie tal que todos sus elementos son $ad-$nilpotentes. $ad_L \subset \mathfrak{gl}(L)$ satisface las condiciones del teorema precedente (se asume que $L \neq 0$), entonces existe $x \neq 0$ en L para el cual $[L\, x] = 0$, es decir $Z(L) \neq 0$. Como $L/Z(L)$ consiste de elementos $ad-$nilpotentes y tiene dimensión menor que L, por inducción en la dimensión de L, concluimos que $L/Z(L)$ es nilpotente, y por el teorema.5 ítem (2), L es nilpotente. $\square$

Ejemplo 2. Presentamos a continuación un ejemplo del teorema.5. Sea $V = gl(\mathbb{R}^5)$ y L el algebra de Lie generada por $\{ad_x, ad_y, ad_z, ad_w\}$ donde

$$\begin{aligned} x &= e_{12} + e_{13} - (e_{41} + e_{51}) \\ y &= e_{25} - e_{34} \\ z &= e_{32} + e_{33} + e_{44} + e_{54} - (e_{22} + e_{23} + e_{45} + e_{55}) \\ w &= e_{15} + e_{21} - (e_{14} + e_{31}) \end{aligned}$$

Verifiquemos que L consiste de endomorfismos nilpotentes. De la definición de los elementos de L se sigue directamente que:

$$\begin{aligned} ad_x(y) &= w & \qquad ad_w(z) &= 0 \\ ad_x(w) &= z & \qquad ad_w(y) &= 0 \\ ad_x(z) &= 0 & \qquad ad_y(z) &= 0 \end{aligned}$$

Consecuentemente $ad_x^3 = 0$, $ad_w^2 = 0$, $ad_y^2 = 0$, $ad_z = 0$, como los endomorfismos nilpotentes son cerrados para la suma y el producto por escalar, se sigue que los elementos de L son nilpotentes. Según el teorema.5 debe existir un autovector común asociado al valor propio cero. En nuestro caso z es el buscado debido a que $L.z = 0$

3. CONCLUSIONES

El Teorema de Engel proporciona una condición suficiente para que todas las transformaciones de un álgebra de Lie compartan un mismo vector propio asociado al vector propio cero. El concepto de ad-nilpotencia juega un papel importante en la demostración.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, New York: Springer, 1972.

[2] K. Erdmann and M. J. Wildon, *Introduction to Lie algebras*, London: Springer, 2006.

[3] N. Jacobson, *Lie Algebras*, New York: Dover Publications, Inc.,1962.