

Realización de problemas gráficos en la plataforma Moebius

Rey Míguez, Fernando (ferey@udc.es)
Sarmiento Escalona, Antonio (antsar@udc.es)
Pedreira Andrade, Luis P. (lucky@udc.es)
Departamento de Economía Aplicada II
Universidad de A Coruña

RESUMEN

Las funcionalidades de la plataforma docente *Moebius* -que da soporte a asignaturas cuantitativas de la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de A Coruña- ya han sido descritas en trabajos anteriores.

El refinamiento de las técnicas empleadas en la construcción de problemas gráficos en los trabajos personalizados, permite aumentar el abanico de problemas disponibles y la calidad de los mismos, tanto en boletines como en tests.

Palabras clave: Personalización; Evaluación; Plataforma docente

Área temática: Metodología y Didáctica.

ABSTRACT

The working features of the Moebius platform, which provides Support for quantitative subjects in the Faculty of Economics and Business Studies at the University of A Coruna have been described in Previous works.

The refinement of the techniques to build graphical problems in personalized works allows users to widen the range and augment the quality of the problems available, both with respect to bulletins and tests.

Key words: Personalization; Evaluation; Teaching Platform

1. INTRODUCCIÓN

La plataforma *Moebius* lleva ya varios años colaborando con las tareas docentes de los profesores de las asignaturas cuantitativas del departamento de Economía Aplicada II de la universidad de A Coruña. Surgida -hace ahora seis años- de un intento de personalizar boletines de problemas para nuestros alumnos, se ha constituido poco a poco en una robusta herramienta que facilita enormemente la labor docente de los profesores, permitiendo la preparación de trabajos individuales de gestión automatizada a los que se accede a través de internet.

Centrados todos estos años en la construcción de la plataforma, no pudimos dedicar excesivo tiempo a la preparación de problemas gráficos -aún conscientes de su relevancia- dado que requerían una preparación específica mucho más elaborada que los problemas que podríamos llamar más *tradicionales*.

Aún así, diseñamos algunos problemas gráficos y, como ocurrió con otras tareas, la mecanización -empleando siempre *Software Libre*- creando plantillas para diseñar problemas similares, unido a una acertada elección del formato gráfico, nos ha permitido ampliar y mejorar de forma extraordinaria los resultados obtenidos.

Presentamos a continuación una selección de preguntas gráficas, precedida por un pequeño análisis de algunas cuestiones más técnicas.

2. ALGUNOS ASPECTOS TÉCNICOS

2.1. Sobre las herramientas de programación

La elaboración de los problemas gráficos está basada en una una apropiada combinación de *scripts* entre *awk* y *bash* -como viene siendo habitual- y adicionalmente *gnuplot* para acometer los aspectos gráficos. Construído el problema, éste queda incorporado a la biblioteca de la plataforma *Moebius* y como tal puede emplearse

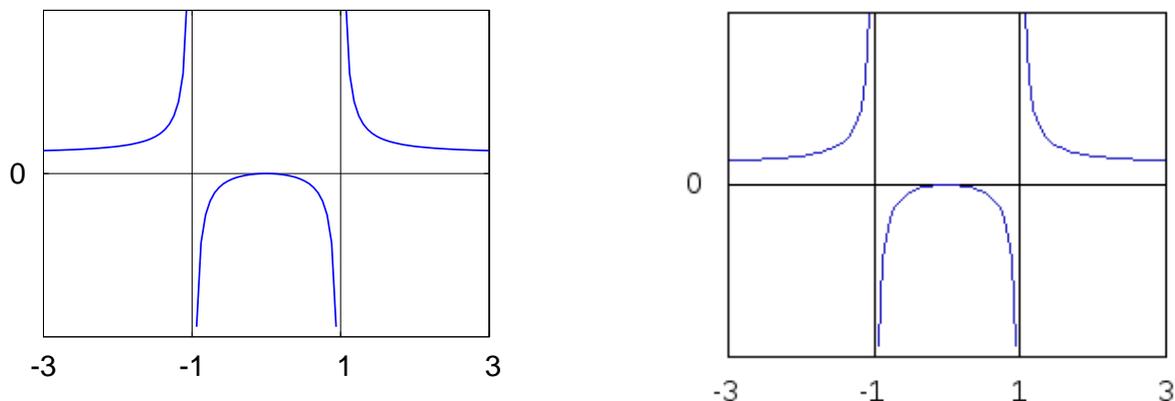


Figura 1: Diferencia de formatos: *ps* (izquierda) y *png* (derecha)

cómodamente en todos los automatismos de gestión descritos con detalle en [4] y [7] según se trate de un boletín o test. En una primera fase se generan todos los archivos \LaTeX y después se compilan a *pdf* -mediante el uso de *pdflatex*- convenientemente identificados, para finalmente ser colocados en sus cuentas de destino.

2.2. Sobre el formato gráfico

En los comienzos, usamos para los gráficos el formato *png*. Con él obtuvimos resultados aceptablemente buenos. Sin embargo, el cambio de la selección del *terminal* de salida en *gnuplot* a *postscript* (*ps*) -formato de archivos gráficos en talleres de impresión profesional- nos ha permitido mejorar considerablemente los resultados, incluso aumentar el espectro de problemas factibles por la altísima calidad de las imágenes. La diferencia es notable como se aprecia en figura 1 y más evidente si aumentamos el tamaño *-zoom-* como puede verse en la figura 2, en la que se han ampliado las gráficas anteriores en un entorno del punto $(0, 1)$.

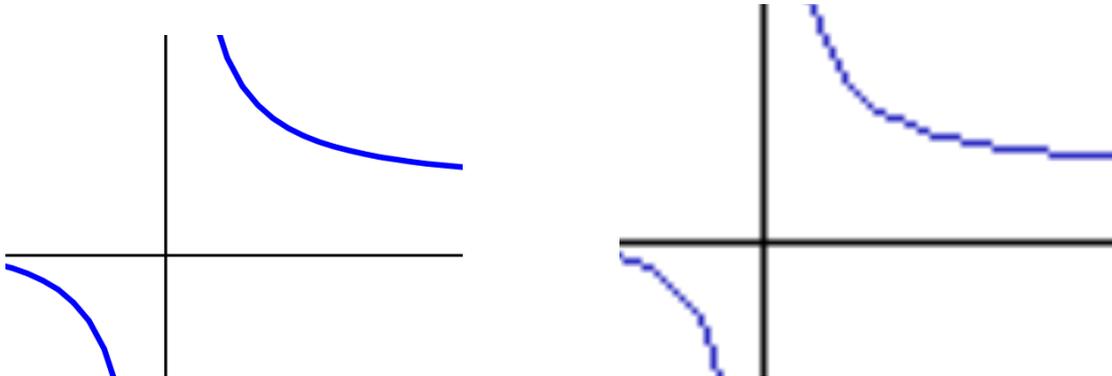


Figura 2: Diferencia de formatos con zoom: *ps* (izquierda) y *png* (derecha)

2.3. Sobre el tiempo de ejecución

Un aspecto muy importante al acometer las preguntas gráficas es estudiar los tiempos de ejecución, dado que, como es obvio, la generación de trabajos personalizados de estas características conlleva una elevada carga computacional -tanto a nivel de generación de fuentes como de compilación- y podría tardar mucho más de lo aceptablemente razonable.

Sin embargo el comportamiento del compilador *pdflatex* ha sido de nuevo excelente, al tiempo que *gnuplot* se ha mostrado realmente ágil en sus tareas de generación gráfica.

La figura 3 muestra los resultados¹ para un test exclusivamente gráfico formado por diez preguntas tipo test del estilo de las mostradas en la siguiente sección. El tiempo se ha medido en segundos y la longitud en metros. Las pruebas -que fueron efectuadas en un ordenador personal² con procesador *Intel Core i7-920* a *2.67GHz*- arrojan como resultado un tiempo total menor de cuatro minutos preparando 80 modelos, lo que supone unos tres segundos por modelo. Llamamos la atención en

¹El tiempo de cálculo incluye también el destinado a la generación de las gráficas empleando *gnuplot*, siendo éste el de mayor peso en el conjunto.

²En la actualidad, un ordenador personal de gama media tiene -aproximadamente- un rendimiento un 25 % inferior al empleado.

Número de modelos	10	20	40	60	80
Tiempo de cálculo	26.42	50.47	100.89	143.58	194.75
Tiempo de compilación	6.03	11.22	22.06	32.26	42.68
Longitud	70	133	258	384	509
Tiempo total	32.45	61.69	122.95	175.84	237.43
Tiempo por modelo	3.25	3.08	3.07	2.93	2.97

Figura 3: Test con diez preguntas gráficas

este punto de la magnitud del trabajo realizado; ¡se ha compilado más de medio kilómetro de código latex!

Repetidas las pruebas con un test de los que podríamos llamar *normal*, compuesto por preguntas combinadas o variables sin una carga importante de cálculo³, se obtiene un tiempo lógicamente muy inferior: algo más de medio minuto para 80 modelos, es decir, menos de medio segundo por modelo (véase figura 4).

De lo anterior deducimos que un test formado al 50 % por preguntas gráficas, necesitaría un tiempo total de preparación total de poco más de dos minutos, por lo que su elaboración sigue siendo un proceso rápido al incorporar este tipo de preguntas.

2.4. Sobre el *barajeo* y otros

El significado del *barajeo* en los tests ya se abordó detalladamente (véase epígrafe 3 en [7]), y se ha incorporado también exitosamente a las preguntas gráficas. Esto es, tanto el orden de las preguntas como el de las alternativas para elegir, ocupan lugares impredecibles, por lo que las funciones, recintos, etc, representados en dos

³El tiempo de cálculo puede obviamente ser elevado en determinado tipo de preguntas, por ejemplo, de tipo matricial que conlleven bastantes operaciones o un filtrado riguroso para homogeneizar la dificultad.

Número de modelos	10	20	40	60	80
Tiempo de cálculo	0.11	0.13	0.28	0.49	0.71
Tiempo de compilación	4.96	9.1	17.5	25.36	34.22
Longitud	25	48	93	139	184
Tiempo total	5.07	9.23	17.78	25.85	34.93
Tiempo por modelo	0.51	0.46	0.44	0.43	0.44

Figura 4: Test con diez preguntas no gráficas

modelos distintos están en diferentes posiciones elegidas al azar.

Pero no solamente se ha integrado el *barajeo* gráfico. Si es factible y no conlleva demasiada complicación en su preparación, se incorpora la variabilidad gráfica. Por ejemplo, si ha de elegirse una determinada parábola -o un arco de parábola- (véase epígrafes 3.1 y 3.3 respectivamente) se presentan con diferentes curvaturas. Si a esto se le une el *barajeo* posterior y el carácter combinado de la pregunta, el encontrar similitudes para resolver preguntas de diferentes modelos entraña bastante dificultad, por lo que nuestro objetivo inicial de individualización queda sobradamente conseguido.

3. ALGUNOS EJEMPLOS

3.1. Identificando parábolas

Comencemos por una sencilla pregunta gráfica de identificación de parábolas, pongamos $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Por simplicidad en el desarrollo y cálculos tomemos $a = 1$. Es obvio que el discriminante $\Delta = b^2 - 4c$ decidirá si la gráfica posee un corte, dos o ninguno con el eje de abscisas. Teniendo en cuenta lo anterior y que si

las raíces de la ecuación son α y β -de existir- se verifica la igualdad

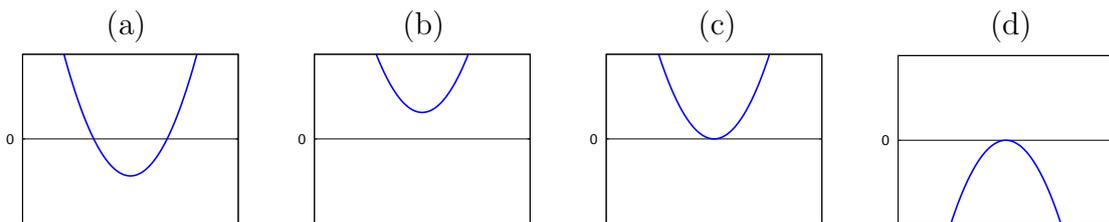
$$(x - \alpha)(y - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

es muy sencillo construir valores b y c para Q en cada una de las tres situaciones posibles eligiendo apropiadamente α y β .

Dado que en cada pregunta del test proponemos cuatro alternativas para elegir de entre ellas una válida, fijada una parábola concreta, deberemos facilitar tres alternativas adicionales. Dos serán obviamente las dos restantes posibilidades para la parábola y la tercera podemos tomar por ejemplo cualquiera con $a = -1$. En nuestro caso hemos tomado siempre $-x^2$, pero modificar la última alternativa para *despistar*, es inmediato.

Construyamos entonces una pregunta combinada con tres posibilidades, una vez que hemos planteado con detalle el problema. El formato base de esta pregunta -*cofun130m* en nuestra biblioteca- es el siguiente:

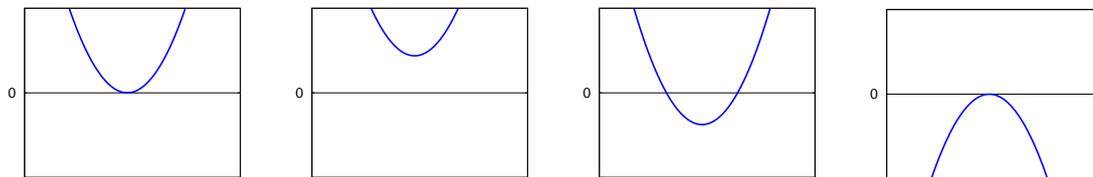
- ¿Cuál de las gráficas se corresponde con la de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$?



Solución : a)

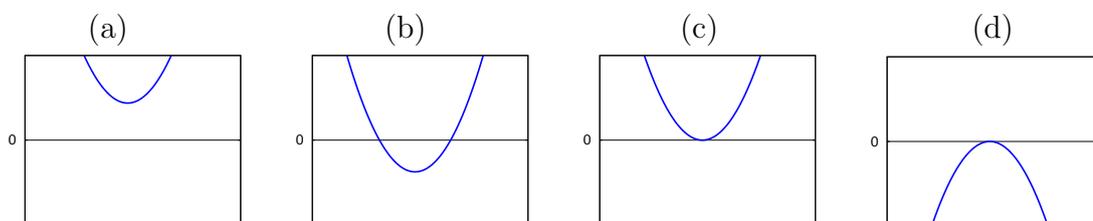
- ¿Cuál de las gráficas se corresponde con la de la función $f(x) = x^2 - 4x + 4$?





Solución : a)

- ¿Cuál de las gráficas se corresponde con la de la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$?

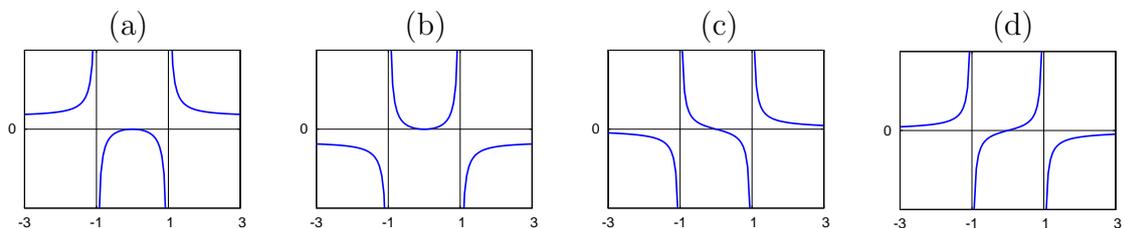


Solución : a)

3.2. Identificando funciones

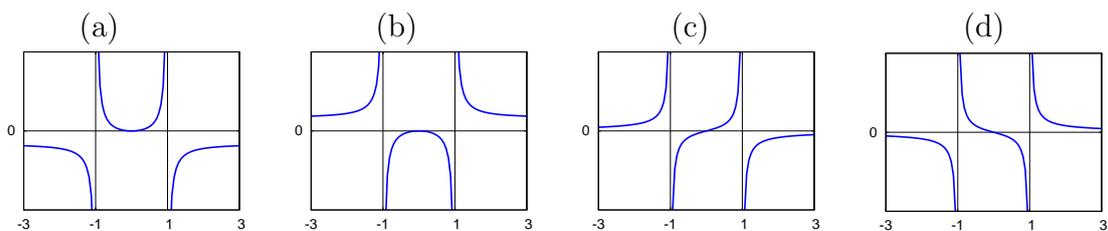
Una vez expuesto el ejemplo anterior, es claro que, con el único límite de nuestro ingenio, podrían construirse multitud de identificaciones gráficas. Especialmente cómodas son aquellas formadas por preguntas combinadas de cuatro funciones, dado que podemos elegir como alternativas para *despistar* las tres restantes en cada caso. De todas formas, no hay por qué restringirse a este número, puesto que una pregunta combinada puede estar constituida por el número que deseemos de *subpreguntas*, pero creemos que cuatro es una cifra aceptable para el objetivo que perseguimos y origen de nuestra plataforma: elaborar trabajos diferentes pero con dificultad similar. En el caso concreto de los tests, el *barajeo* garantiza ampliamente nuestros propósitos iniciales. Un ejemplo típico 4×4 que forma parte de nuestra biblioteca es el *co-fun040m* cuyo formato base es:

- ¿Cuál de las gráficas se corresponde con la de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$?



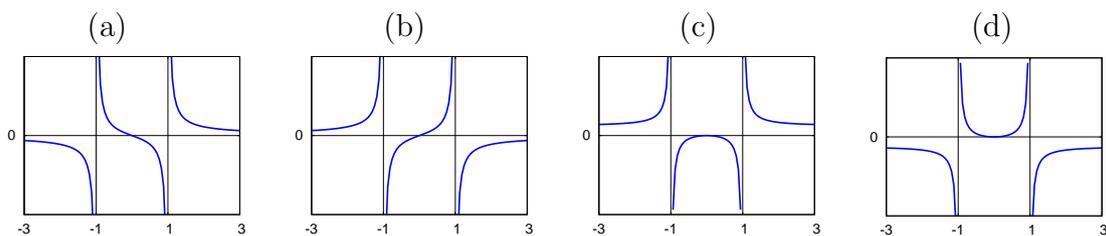
Solución : a)

- ¿Cuál de las gráficas se corresponde con la de la función $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$?



Solución : a)

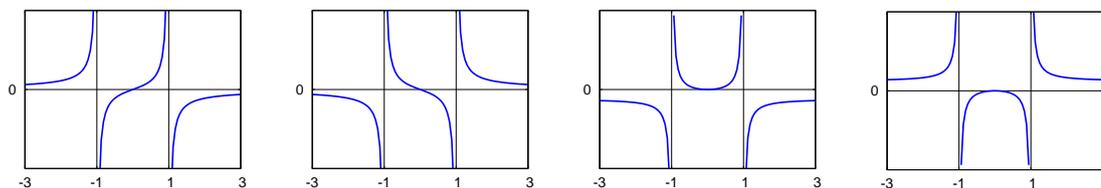
- ¿Cuál de las gráficas se corresponde con la de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$?



Solución : a)

- ¿Cuál de las gráficas se corresponde con la de la función $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$?

(a) (b) (c) (d)



Solución : a)

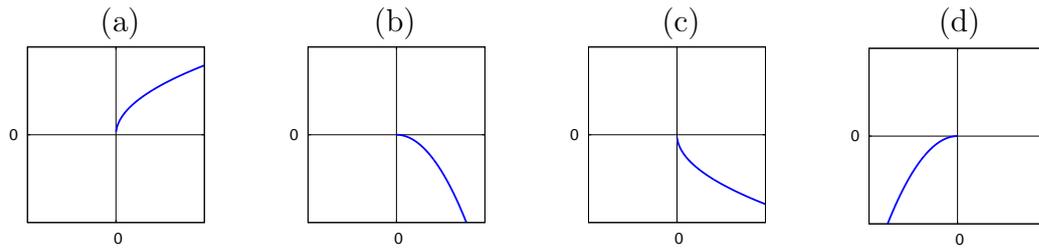
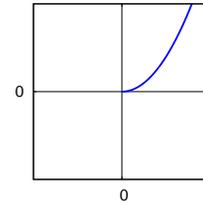
Los dos ejemplos anteriores ponen claramente de manifiesto la importancia y comodidad de la preparación de plantillas gráficas, eligiendo cuidadosamente otras funciones y quizá algunos pequeños retoques en el *script* de *gnuplot* relativos a asíntotas, escala, ejes,... podremos elaborar un número amplio de preguntas con poco esfuerzo.

3.3. Algunas transformaciones

¿Qué relación existe entre la gráfica de una función y su inversa? ¿Y entre la de una función y su opuesta?

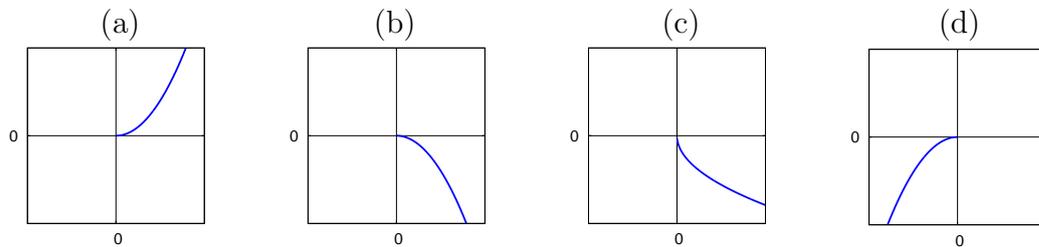
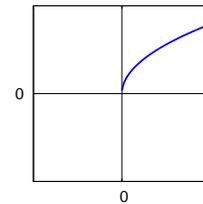
En general, las preguntas gráficas cuyo razonamiento depende de otra gráfica pueden elaborarse fácilmente a partir de esta otra plantilla, que complementa la expuesta en los dos apartados anteriores. Mostramos el formato base de la pregunta combinada *co-fun120m* de nuestra biblioteca, formada solamente por dos *subpreguntas*, pero que, obviamente, puede aumentarse a voluntad sin dificultad de forma natural a ocho, dos por cuadrante.

- Si la gráfica de $f(x)$ se corresponde con la de la figura derecha, la gráfica de $f^{-1}(x)$ es:



Solución : a)

- Si la gráfica de $f(x)$ se corresponde con la de la figura derecha, la gráfica de $f^{-1}(x)$ es:



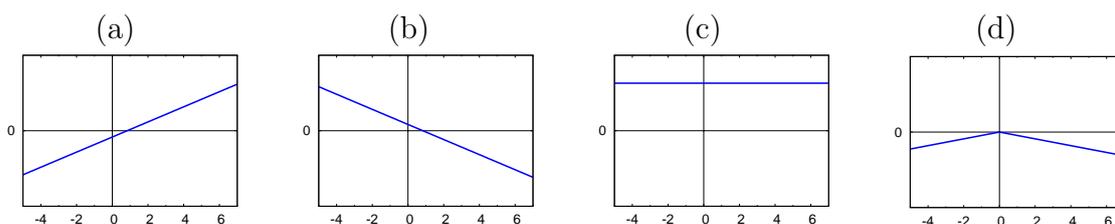
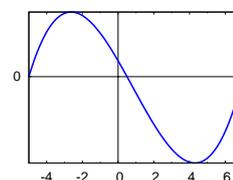
Solución : a)

3.4. Identificando la segunda derivada

Si consideramos un polinomio de grado tres Q , su derivada segunda será una recta de pendiente positiva o negativa dependiendo del signo del coeficiente de x^3 . Para sencillez en la construcción, suponemos que tiene tres raíces reales, esto es $Q(x) = \pm(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$. El signo de x^3 nos permite la construcción natural

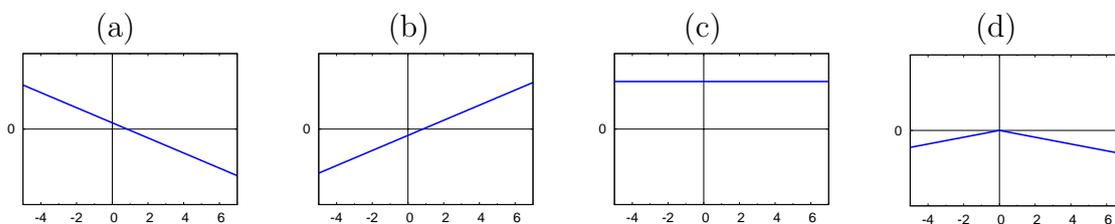
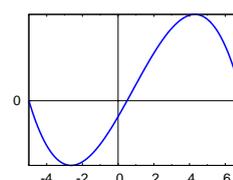
de un pregunta combinada con dos *subpreguntas*. En cada una de ellas, como alternativas de *despiste*, elegimos la recta opuesta a la correcta, una recta constante y una recta combinación de las dos primeras. La elección de las raíces tras una serie de pruebas fue $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $\beta \in (-6, -5)$ y $\gamma \in (7, 8)$. Empleando la misma plantilla que en el ejemplo precedente, mostramos el formato base de la pregunta *co-der190m* de nuestra biblioteca.

- Si la gráfica de $f(x)$ se corresponde con la de la figura derecha, la gráfica de $f''(x)$ es:



Solución : a)

- Si la gráfica de $f(x)$ se corresponde con la de la figura derecha, la gráfica de $f''(x)$ es:

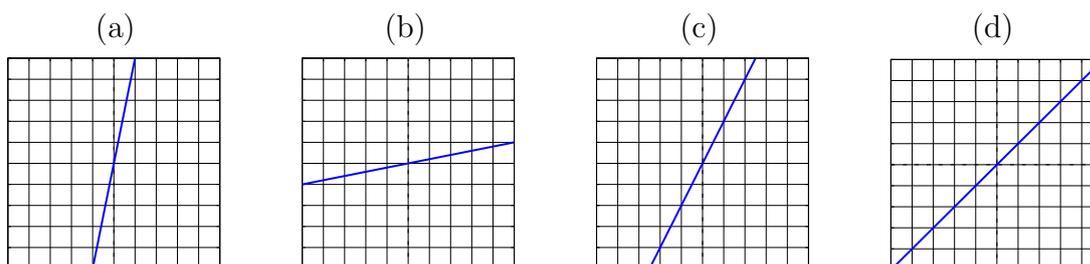


Solución : a)

3.5. Identificando pendientes

No todas las preguntas gráficas tienen por qué ser combinadas. La siguiente la pregunta *-co-der160v-* en nuestra biblioteca combina el cálculo y la interpretación gráfica de la derivada. En este caso concreto, se genera un polinomio al azar⁴ cuya derivada esté en los intervalos $[2,5]$ o $[-5,-2]$. Acompañando a la gráfica con la pendiente correcta, se proponen como alternativas de *despiste* rectas cuyas pendientes sean otros tres valores erróneos con igual signo.

- ¿Cuál de las siguientes rectas tiene la misma pendiente que la recta tangente en el punto $(1, -3)$ de $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + x - 4$?



Solución : a)

La pendiente de la recta tangente en el punto $(1, -3)$ de $f(x)$ es 5, ya que

$$f'(x) = 12x^2 - 8x + 1 \Rightarrow f'(1) = 5.$$

⁴Como siempre, el polinomio se elige con unos coeficientes *razonables* y de forma que sean homogéneos en cuanto al grado de dificultad del cálculo. Concretamente en este caso, se ha filtrado para que haya uno o dos coeficientes negativos y todos ellos enteros no nulos entre -6 y 6 . Se ha elegido un polinomio de grado tres, pero podría tomarse de cualquier otro grado. El punto donde se obtiene la derivada es siempre $x = 1$, para no complicar las operaciones, pero esto también podría variarse.

3.6. Aplicando el teorema de *Weierstrass*

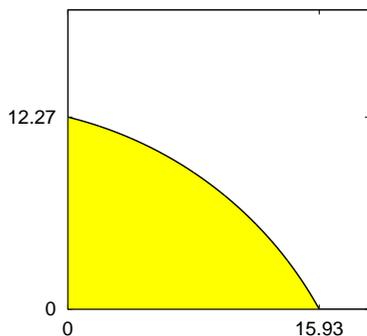
Hasta ahora solo hemos presentado ejemplos de preguntas para tests debido a su mayor vistosidad y dado que les hemos dedicado mayor atención cara las pruebas periódicas de control que realizamos dentro de la evaluación continua. Ello significa que hemos descuidado algo la elaboración de preguntas para boletines personalizados a entregar pero, aún así, tenemos un buen número de preguntas gráficas para estos últimos.

A modo de ejemplo, mostramos la siguiente pregunta *bo-cont511v* de nuestra biblioteca, en la que, aunque el razonamiento es idéntico para todos los alumnos, el conjunto de soluciones factibles es variable y cada uno deberá calcular el suyo en la plantilla gráfica que también se le facilita.

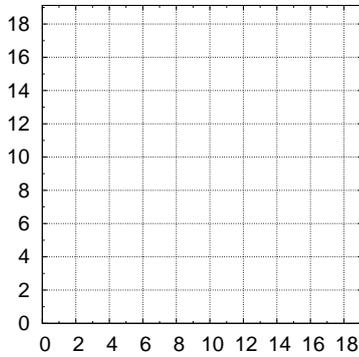
- Sea $C(q_1, q_2) = q_1^2 + q_2^2 + 12q_1 + 24q_2 + 24$ la función de costes de producción de dos bienes q_1 y q_2 , cuyos precios de venta son $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$ respectivamente. Demostrar que el problema de maximizar los ingresos sujetos a que los costes no sean superiores a los recursos disponibles $G = 469$

$$\max_{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+^2} \{p_1 q_1 + p_2 q_2 : C(q_1, q_2) = q_1^2 + q_2^2 + 12q_1 + 24q_2 + 24 \leq 469\}$$

tiene solución. Representar gráficamente el conjunto de soluciones factibles.



razonamiento
al ser la función $I(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2$ continua y el conjunto de soluciones factibles
$S = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+^2 : q_1^2 + q_2^2 + 12q_1 + 24q_2 + 24 \leq 469\}$
compacto, existe al menos una solución empleando el teorema de <i>Weierstrass</i>



razonamiento

Veamos minuciosamente en este caso la construcción y selección realizada de los coeficientes a, b y c de la función de costes, $C = (q_1, q_2) = q_1^2 + q_2^2 + 2aq_1 + 2bq_2 + C$ y los recursos disponibles G .

Al ser $S = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+^2 : q_1^2 + q_2^2 + 2aq_1 + 2bq_2 + c \leq G\} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+^2 : (q_1 + a)^2 + (q_2 + b)^2 \leq G - c + a^2 + b^2\}$, deberemos elegir los parámetros anteriores para que R con $R^2 = G - c + a^2 + b^2$ sea un número natural. En este caso, los puntos de corte de la circunferencia con la parte positiva de los ejes coordenados serían $(c_1 = -b + \sqrt{G - c + b^2}, 0)$ y $(0, c_2 = -a + \sqrt{G - c + a^2})$, por lo que tomaremos $G \gg c$ para que los puntos de corte no estén muy próximos al origen.

Tras algunas pruebas generando valores aleatorios para a, b, c y G en diferentes intervalos, escogimos $a, b \in [5, 15], c \in [5, 25]$ y $G \in [100, 1000]$, de forma que R fuese natural, filtrando⁵ posteriormente para que $a \neq b, R \leq 25$ y $\min\{c_1 c_2\} \geq 5$. Una ejecución bajo las anteriores especificaciones para los 465 alumnos de 1º ADE de nuestra facultad, arroja la secuencia de valores iniciales mostrados en la la figura 5.

Realizada una ordenación de cada grupo a, b, c, G, R, c_1 y c_2 para detectar repeticiones, aunque puede haber coincidencias para uno o varios valores en diferentes

⁵ $a \neq b$ obliga al alumno a completar dos cuadrados diferentes. Los valores para R, c_1 y c_2 responden a una elección personal *razonable*. Estas restricciones han supuesto 67365 intentos (147 por grupo de valores válido) y la generación de 2264007 números aleatorios, con un un tiempo total de cálculo de 22.96 segundos, prácticamente todo dedicado a generación gráfica.

a	b	c	G	R	c_1	c_2
6	12	24	469	25	15.9317	12.2693
13	8	21	188	20	5.3303	7.19868
7	8	19	482	24	15.6274	14.9565
15	9	24	202	22	5.07486	7.09348
6	10	8	401	23	14.7123	12.2036
15	5	8	242	22	6.42429	11.0935
14	6	22	319	23	8.2036	12.2483
9	6	5	372	22	12.166	14.0749
9	14	25	373	25	11.7123	9.32381
7	6	19	190	16	7.8324	8.38749
6	7	8	247	18	10.5831	9.97056
9	11	19	258	21	8.88854	7.97367

Figura 5: Valores iniciales de una ejecución al azar

grupos, ninguno de ellos está repetido, lo que supone un éxito total en nuestra selección.

4. UNA NOTA FINAL

La incorporación de problemas gráficos a nuestra plataforma ha enriquecido notablemente el espectro de preguntas, permitiendo realizar una evaluación más completa de los conocimientos del alumno. Las amplias posibilidades de *gnuplot* hacen que el abanico sea inmensamente amplio y nos permita avanzar todavía bastante en la creación de muchos más problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] REY MÍGUEZ, F.; PEDREIRA ANDRADE, L. P. (2008). "Personalización de problemas: hacia un nuevo entorno de evaluación", en Recta@2008 Vol: Actas_16 Issue 1: 61
- [2] REY MÍGUEZ, F.; PEDREIRA ANDRADE, L. P. (2009). "Tests aleatorios: hacia un nuevo entorno de evaluación", en Rect@2009 Vol: Actas_17 Issue 1: 610.
- [3] REY MÍGUEZ, F.; PEDREIRA ANDRADE, L. P. (2010). "Moebius: una plataforma docente basada en Software Libre", en Anales de ASEPUMA, n° 18: 110.
- [4] REY MÍGUEZ, F.; REY GRAÑA, C. (2011). "Automatización de la gestión de boletines de Econometría en la plataforma Moebius", en Anales de ASEPUMA, n° 19: 0412
- [5] REY MÍGUEZ, F. (2011). "Gestión automatizada de boletines numéricos en la plataforma Moebius" en el libro "La formación y las nuevas tecnologías en la educación universitaria", Ed. Educación Editora, pág. 289-293.
- [6] REY MÍGUEZ, F. (2012). "Moebius: una plataforma integrada de evaluación personalizada", IV Jornadas de Docencia en Economía 2012, A Coruña.
- [7] REY MÍGUEZ, F.; PEDREIRA ANDRADE, L. P.; SARMIENTO ESCALONA, A. (2012). "Automatismos para la gestión de tests aleatorios en la plataforma Moebius", en Anales de ASEPUMA, n° 20: 503.
- [8] OETIKER, T y otros. (2009). "The Not So Short Introduction to L^AT_EX 2_ε". <http://ctan.org/tex-archive/info/lshort/english/lshort.pdf>

- [9] WALTER MORA F.; ALEXANDER BORBÓN A. (2012). "Edición de Textos Científicos con \LaTeX ". http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Libros/LATEX/LaTeX_2013.pdf
- [10] JANERT, PHILIPP K. (2010). "Gnuplot in Action". Manning, USA.
- [11] WILLIAMS T.; KELLEY C. (2012). "GNUPLOT 4.6". http://www.gnuplot.info/docs_4.6/gnuplot.pdf