Evolución de los Métodos Cuantitativos Económico-Financiero-Actuariales

Villalón[1], Julio G. (garvillalon@gmail.com), Rodríguez Ruíz[2], Julián (julian21@cee.uned.es), Seijas Macías[3], Antonio (jasm@udc.es)
[1]F. de Cc. Económicas, [2]F.Cc. Económicas y Empresariales, [3]F. de Economía e Empresa
[1]Universidad de Valladolid, [2]UNED, [3]Universidade da Coruña

RESUMEN

Los métodos cuantitativos económico-financiero-actuariales han experimentado un gran avance a lo largo del tiempo. Los economistas se han visto obligados a aplicar, de forma creciente, nuevos métodos para resolver los distintos problemas que han ido apareciendo y la relación de tales problemas aumenta continuamente. La habilidad de los economistas para plantear los problemas, refleja un cuerpo de teoría bien desarrollado, modos de análisis que enfatizan la lógica e instrumentos cuantitativos sofisticados.

Las Matemáticas y la Estadística en el ámbito económico-financiero-actuarial, han jugado un papel central en el análisis económico, lo que ha proporcionado un mayor avance en el campo, particularmente financiero, al permitir a los economistas establecer rigurosamente sus teoremas y a contrastar la validez empírica de sus teorías.

Por lo que se refiere a la Teoría Financiera, hace más de 50 años, ésta se reducía en términos generales, a un solo aspecto: Cálculo de los valores financiero actuariales. Ahora bien, los economistas financieros comenzaron a utilizar una gran variedad de técnicas estadístico-matemáticas cada vez más sofisticadas como: Teoría de la Probabilidad, Optimización, Procesos Estocásticos, Cálculo Estocástico, Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, etc.

Pues bien, el trabajo que presentamos hace referencia a la evolución de las técnicas matemáticas y sus aplicaciones, anteriormente mencionadas

ABSTRACT

The quantitative methods economic-actuarial-financial have experienced a great advance throughout the time. The economists have increasingly met bound to apply by new methods to solve different problems that have been appearing. These problems have been increasingly surfacing.

The skill of the economists to raise the problems reflects a body of theory developed well, manners of analyses that emphasize the logic and quantitative sophisticated instruments. The Mathematics and Statistics in the economic-actuarial-financial arena have played a central role in the economic analysis, which has provided a mayor advance in the field, particularly financially, on having allowed the economists to establish rigorously his theorems and to contrasting to empirical validity of his theories.

As it refers to the Financial Theory, it has been more than 50 years since it has been simplified to one aspect alone: financial calculation of the actuarial values. At the same time, the financial economists began to use a great variety of increasingly sophisticated mathematical and statistical techniques such as: Probability and optimization Theory, Stochastic calculus, differential stochastic Equation, etc. Well then, in the work that we present here, we cover the evolution of the mathematical technologies and his applications, previously mentioned.

***Palabras claves*:** σ-álgebra; Movimiento Browniano; Martingala; Diferencial Estocástica; Fórmual de Itô; Teoría del Riesgo Individual; Teoría del Riesgo Colectivo; Proceso de Poisson Compuesto; Proceso de Riesgo; Probabilidad de Ruína; Desigualdad de Lundbeg; Cálculo Estocástico; Cadenas de Markov; Black/Scholes; Diversificación del Riesgo; Integral Estocástica.

***Área temática*:** A6 Cálculo Estocástico y sus Aplicaciones

1. INTRODUCCIÓN

Después de hacer algunas referencias a la evolución de la ciencia económico-financiero-actuarial a lo largo del tiempo, consideramos que para modelar y analizar el comportamiento de los fenómenos económicos en ambiente de incertidumbre, modernamente se vienen utilizando diversos métodos del cálculo estocástico como son la integral estocástica, el Lema de Itô, las ecuaciones diferenciales estocásticas, la estabilidad estocástica y el control óptimo estocástico, algunos de tales aspectos consideramos a continuación.

2. METODOS CUANTITATIVOS ECONOMICO FINANCIERO ACTUARIALES

La Ciencia Financiero Actuarial en su nacimiento en el siglo XVII se dedicó fundamentalmente a las operaciones del seguro de vida: Cálculo de primas para las operaciones de rentas, capitales diferidos de supervivencia (${}_nE_x$) y operaciones de los seguros de vida entera ($P_x\ddot{a}_x = A_x$). Pronto se vio que eran necesarias las técnicas financiero actuariales para calcular las reservas matemáticas (${}_tV_x$). En este aspecto, la ciencia financiero actuarial mostró los primeros rudimentos del cálculo estocástico hace más de un siglo. Las ecuaciones diferenciales para las reservas de una póliza del seguro de vida las obtuvo T. Nicolai Thiele en 1875 y para la probabilidad de ruina eventual de un seguro de vida, Filip Lundberg en 1903, en momentos en los que la noción de proceso estocástico no se había definido de forma concreta.

A parte de su trabajo práctico en el "seguro de vida" y su tesis doctoral en 1903, Filip Lundberg (1876-1965) fue pionero en el seguro de enfermedad, utilizó la técnica del seguro de vida para la obtención de la reserva. Así mismo, fue pionero en el campo del reaseguro y de la "Swedish Actuarial Society" en 1904. Creó su original "Collective Risk Theory" publicada en sueco en 1906 y 1926 y en alemán en 1909 y 1930. En su tesis doctoral consideró ya la descripción "estocástica" de la corriente de pagos como un proceso de Poisson compuesto. Donde los momentos de los pagos constituían un "Proceso de Poisson" en el tiempo; las cantidades sucesivas pagadas eran independientemente obtenidas de una distribución de la masa de riesgo. Probablemente este fue el primer ejemplo en el cual se introdujo y, a parte del trabajo de Louis Bachelier en 1990 y el Erlang en 1909, constituyen un ejemplo pionero importante de la definición y uso de los procesos estocásticos en tiempo-continuo. En la tesis, prueba el Teorema Central del Límite para los procesos, utilizando de forma original la ecuación de futuro para la función de distribución del proceso, es decir, Lundberg introdujo el "proceso de riesgo" que describía el superávit, donde los ingresos eran continuos al tanto dado por la prima y el desembolso era un "proceso de Poisson compuesto". Para este proceso, consideró la "probabilidad de ruina", probabilidad de que el resultado fuera negativo, como función del resultado inicial, el tanto de prima y la distribución de la masa de riesgo. Hay una ecuación integral para la probabilidad de ruina, que se utiliza para deducir al famosa "desigualdad de Lundberg": $P(ruina) < \exp(-Ru)$, donde u es el superávit y R es el "coeficiente de ajuste", una medida de la dispersión de la distribución de la masa de riesgo.

Por otra parte, Harald Cramer (1955) estudió la "Teoría del riesgo" consistente en el análisis matemático de las fluctuaciones aleatorias en la empresas de seguros y discusión de los diversos medios de protección frente a sus efectos adversos.

En la "Teoría del riesgo individual", la ganancia o pérdida de la compañía que surge durante un tiempo dado sobre una póliza se considera una variable aleatoria y el desarrollo matemático de la teoría está basado en un estudio de la distribución de probabilidad de variables de este tipo. Las ganancias o pérdidas totales de la compañía durante el mismo tiempo será la suma de las variables aleatorias asociadas a las pólizas individuales en vigor en la compañía. De acuerdo con el Teorema Central del Límite, esta suma será aproximadamente normalmente distribuida si el número de pólizas es lo suficientemente grande y se pudiera obtener los tipos de las sumas aseguradas de todas las pólizas individuales, sería posible obtener los valores aproximados de las diversas posibilidades ligadas a las ganancias o pérdidas de la compañía bajo ciertas condiciones.

Respecto a la "Teoría del Riesgo Colectivo" fundada y desarrollada por F. Lundberg en una serie de trabajos (1903/48), el riesgo empresarial de una compañía de seguros se consideraba como un total, como un juego de azar continuo entre la compañía y la totalidad de los accionistas. En el curso de este juego, ciertos sucesos aleatorios: las “reclamaciones” acaecen durante un intervalo de tiempo, tienen que considerarse por la compañía mientras que por parte la compañía recibe una corriente continua de primas de riesgo de los accionistas. Mediante ciertas hipótesis simplificadoras, es posible estudiar las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias fundamentales asociadas a este juego, tal como el montante total de las reclamaciones que acaecen durante un intervalo de tiempo dado; la ganancia total de la Compañía que surge durante el mismo intervalo, etc.

La “Teoría del Riesgo Colectivo”, constituye una parte de la teoría general de los procesos estocásticos, que posteriormente tuvo un gran desarrollo y ha encontrado un gran número de aplicaciones importantes. Se ha demostrado que se puede presentar desde un punto de vista unificador el de la teoría de los procesos estocástico. El negocio del riesgo de una Compañía de seguros constituye un caso particular de un proceso estocástico. El proceso de riesgo es un proceso estocástico que pertenece a la clase de los procesos estocásticos con incrementos estacionarios e independientes.

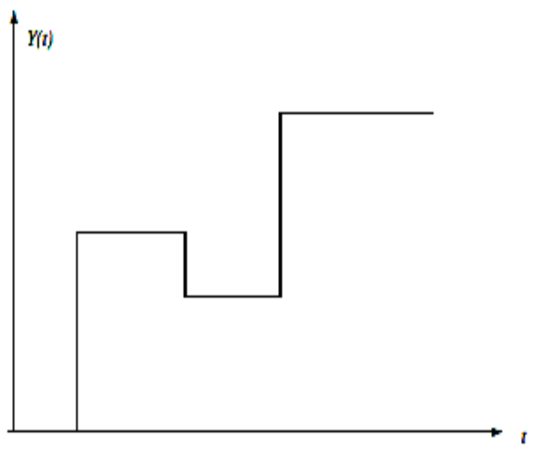

Figura 1: Función muestral del Proceso Y(t), montante de las reclamaciones

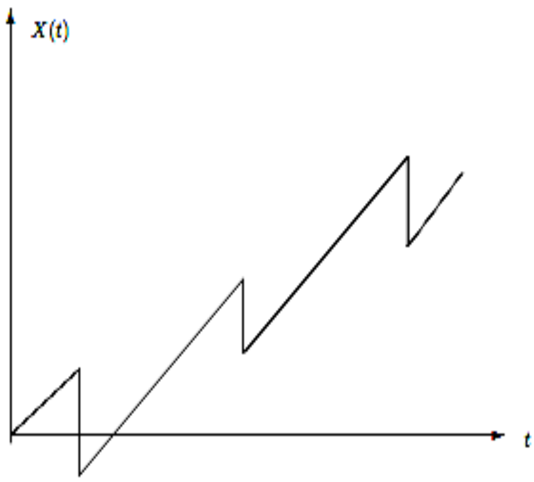

Figura 2: Función muestral del proceso X(t) correspondiente a Y(t)

En el siglo XX, la revista “Astin”, jugó un papel esencial en lo relativo a los métodos financiero-actuares que se habían aplicado a las operaciones de seguro no-vida (seguro del automóvil, incendios, etc…). Emergió una nueva clase de actuarios: “Actuarios de segunda clase”, donde se dio entrada a las técnicas de pensamiento probabilista: Actuarios vida y Actuarios no-vida. Posteriormente, un nuevo desarrollo, dio lugar a la emergencia del Actuario de la tercera clase, grupo de expertos matemáticos que extendieron sus técnicas a lo relativo a la inversión del seguro y Banca.

Tan pronto como pensemos respecto a la inversión en términos estocásticos se presentó el gran problema de que: los riesgos de inversión son típicamente dependientes, y por tanto, desequilibrados. La contestación a este problema: como no hay ninguna ley matemática que automáticamente equilibre el riesgo de inversión implica crear nuevos instrumentos artificiales para este fin: las opciones call, put y futuros. Por tal motivo se crearon técnicas avanzadas. La base estadística matemática debía sustancialmente ampliarse para los economistas financiero-actuariales, con nociones como la teoría de los proceso estocásticos, integración estocástica, Fórmula de Itô, Fórmula de Black-Scholes. En resumidas cuentas, dar entrada al cálculo estocástico. Nueva clase de especialistas en las aplicaciones del "cálculo estocástico".

El término "estocástico" significa "el arte de suponer". En primer lugar fue utilizado por Jacob Bernoulli en su libro "Ars Conjuctandi" en 1773 en el que probó la primera ley de los grandes números. Stochastic modern day, es un dominio de las matemáticas aplicadas. Comprende, (entre otras, la Teoría de la Probabilidad, los Procesos Estocástico y la Estadística). Se utilizan para examinar los sucesos aleatorios, desarrollos temporales, y estructuras especiales tratando de encontrar las regularidades posibles. Los métodos estocásticos son aplicables a todas las disciplinas científicas, obteniéndose ventajas del comportamiento mediante los computadores modernos. Lo estocástico ha llegado a ser un instrumento inestimable para las ciencias naturales, desarrollo tecnológico y economía.

El cálculo que estudiamos en los primeros cursos de matemáticas nos proporciona los instrumentos analíticos para las funciones deterministas. Ahora bien, cuando modelamos la incertidumbre futura de un objeto, por ejemplo, el precio de un título o los tantos de interés a lo largo del tiempo, estos son aleatorios en cualquier momento considerado, por tanto, son llamados proceso estocásticos.

El cálculo estocástico es el instrumento analítico adecuado para los procesos estocásticos. Entonces con tales instrumentos, podemos predecir el comportamiento futuro de estos aspectos y cuantificar los riesgos asociados a ellos. Esto es por lo que tiene gran importancia.

La Teoría de los Procesos Estocásticos, estudia los acontecimientos aleatorios asociados al tiempo regidos por las leyes de probabilidad.

El cálculo estocástico se refiere a una clase específica de procesos estocásticos que son estocásticamente integrables y frecuentemente expresados como soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Las primeras aplicaciones financieras de los procesos estocásticos, aparte de lo mencionado relativo a Lunberg y Cramer datan de 1900 cuando el matemático francés Louis Bachelier aplicó un proceso estocástico especial llamado movimiento Browniano o proceso de Wiener para describir los precios de los títulos en su tesis doctoral.

En 1982 Louis Bachelier llegó a París para continuar su educación universitaria en la Universidad de la Sorbonne. Allí tuvo un insigne cuadro de profesores: Paul Apell, Joseph Bousiness y Henri Poincaré. El desarrollo como científico fue bastante rápido y escribió su interesante tesis "Teoría de la Especulación" sobre la aplicación de la Teoría de la probabilidad a los mercados de títulos. Este se considera ahora históricamente el primer intento de utilizar las matemáticas avanzadas en la matemática financiero-actuarial y testimoniar la introducción del movimiento Browniano[1]. De acuerdo con la tradición de la época, también defendió una segunda tesis sobre una materia elegida por la universidad sobre la mecánica de fluidos. Su título refleja el bagaje educativo de L. Bachelier "La resistencia de una masa líquida indefinida dotada de fricciones interiores regidas por las fórmulas de Navier, a los pequeños movimientos variados de traslación

[1] El movimiento Browniano llamado así después de que el botánico Robert Brown observará el movimiento aleatorio al estudiar el movimiento de las particulas del polen en el agua en 1827. El proceso llamado a veces proceso de Wiener en las ciencias metafísicas, cuando el matemático Norbert Wiener fundador de la cibernética aplico el movimiento Browniano al fenómeno "quantum". El trabajo de Louis Bachelier, olvidado hasta que el Nóbel en economía de 1970 Paul Samuelson, llamó la atención a la comunidad de economía en 1966 (ver discurso de Robert Merton en la sociedad financiera de L. Bachelier).

de una esfera sólida, sumergida en una masa y adherente a la capa fluida que la contacta".

La primera parte de la tesis de Louis Bachelier, "Teoría de la Especulación", contiene una descripción detallada de los productos disponibles en aquel momento en el mercado de títulos en Francia, tales como contratos a plazo (forward) y opciones. Sus especificaciones fueron completamente diferentes de los productos correspondientes en el mercado americano; por ejemplo todos los pagos estaban relacionados con una fecha dada y no se tenía necesidad de pensar en el descuento o cambio numerario. Después de los preliminares financieros Louis Bachelier comenzó con la modelación matemática de los movimientos y fórmulas de los precios de los títulos, el principio de que "La esperanza del especulador fuera nula". Obviamente, interpretaba mediante la esperanza condicionada dada por la información pasada. Es decir, implícitamente aceptaba como axioma que el mercado valoraba los activos utilizando una medida "martingala". La hipótesis posterior era que el precio evolucionaba como un proceso de Markov continuo, homogéneo en el espacio y el tiempo. Louis Bachelier demostró que la densidad de las distribuciones unidimensionales de este proceso satisfacía la relación, ahora conocida como la ecuación Chapman-Kolmogorov y observó que la densidad Gaussiana con la varianza lineal creciente resolvía esta ecuación. La cuestión de la unicidad no se discutía pero Louis Bachelier proporcionó algunos argumentos para confirmar esta conclusión. Llegó a la misma ley considerando el proceso de los precios como límite de las trayectorias aleatorias. Louis Bachelier también observó que la familia de funciones de distribución de los proceso satisfacía la ecuación de calor.

El modelo se aplicó para calcular algunos precios de las opciones. Teniendo en cuenta las opciones americanas y dependientes de la trayectoria, Louis Bachelier calculó la probabilidad de que el movimiento Browniano no excediera un nivel fijo y obtuvo la distribución del supremum del movimiento Browniano.

La tesis de Louis Bachelier se puede considerar como el origen de la "financiera matemática moderna" y de varias ramas importantes de cálculo estocástico tal como la teoría del movimiento Browniano, procesos de Markov (1856-1922), procesos de difusión e incluso de la convergencia libre en los espacios funcionales. Evidentemente, el razonamiento no fue riguroso pero a nivel intuitivo básicamente correcto. Esto es realmente asombroso ya que a comienzos del siglo XX los fundamentos matemáticos de la probabilidad no existían. A. Markov comenzó sus estudios sobre lo que ahora llamamos cadenas de Markov en 1906 y el concepto de esperanzas condicionadas con respecto a una variable arbitraria o σ-álgebra fueron desarrollados en 1930.

El informe de Henri Poincare, firmado por P. Apell y J. Bousssines, tribunal que juzgó la tesis de Louis Bachelier contiene un profundo análisis no solamente de los resultados matemáticos sino también una penetración en la leyes de mercado. En contraste con la leyenda de que la nota de evaluación "honorable" significaba algo como que los examinadores fueron escépticos respecto a la tesis, esta parece que fue la nota más alta que podía habérsele reconocido a una tesis que estaba esencialmente fuera de las matemáticas y que tenía algunos argumentos lejos de ser rigurosos. La nota de "excelente" usualmente se asignaba a memorias que contenían la solución al cambiante problema en una disciplina matemática bien establecida.

Creemos que el informe mostraba que H. Poincare era un lector atento y benévolo y su moderada crítica fue positiva. La crítica que expresó fue que Louis Bachelier no estudiaba con detalle la relación descubierta de los procesos estocásticos con las ecuaciones en derivadas parciales, podía interpretarse que fue realmente intrigado, viendo allí ulteriores perspectivas. El informa de Poincare y la conclusión fue publicar la tesis en las revistas prestigiosas de aquel tiempo contradecía lo que algunos consideraron como la decepción de "honorable". Se podía conjeturar que Louis Bachelier no fue galardonado con la nota de "muy honorable" debido a una presentación más débil de su segunda tesis (pero el correspondiente informe de P. Appell fue muy positivo).

No es necesario decir que las ideas innovadoras de Louis Bachelier estuvieron por encima del nivel prevaleciente en la teoría financiera existente en aquella época lo cual fue ciertamente percibido.

Los notables resultados obtenidos por Louis Bachelier en su tesis sobre la "Teoría de la Especulación" en 1900 permanecieron en una especie de "limbo científico" durante más de 75 años, hasta que el célebre economista premio Nóbel Paul Samuelson influenciado por el insigne profesor de estadística William Feller, corrigió a Louis Bachelier, en 1965, reemplazando el movimiento Browniano por su exponencial (geométrica), evitando así obtener como resultados valores negativos del modelo y, luego comenzó a jugar un papel esencial en el cálculo de los precios de las opciones mediante la famosa fórmula de Black-Scholes en 1973.

Desde 1980 se ha comprobado la explosión de lo modelos matemático financieros junto con los productos financieros, todos a su vez llegados a ser más complejos.

Toda esta tecnología existe debido a que algunos conceptos matemáticos financieros simples y universales han permitido construir una "Teoría matemática financiera de las leyes de los mercados" basada en principios tales como que los precios de un activo a lo largo del tiempo tienen la estructura probabilista de un juego equitativo, es decir, una "martingala". A partir de este concepto, poco a poco, se ha ido construyendo toda la teoría de los procesos estocásticos, pilar sobre el cual se ha desarrollado la "Teoría Matemática del Arbitraje" por Delbaen y Schahermayor en 1994.

Desde comienzos de 1990, la matemática y particularmente la teoría de la probabilidad han jugado un papel creciente, en general y particularmente, en el campo económico financiero actuarial influenciado por las investigaciones de A. Kolmogorov relativas a los procesos temporales continuos.

A partir de la tesis de Louis Bachelier surgió el nuevo nacimiento de los procesos estocásticos y, por otra parte, la estrategia de tiempo continuo para la cobertura de riesgos financieros.

Aunque Louis Bachelier estableció en su tesis la conexión entre el precio de los instrumentos financieros y algunos cálculos de probabilidad relativos a ciertos procesos estocásticos, el problema de la cobertura correspondiente al riesgo fue resuelto mediante los trabajos de Black/Scholes/Merton en 1973. En aquella época la idea de diversificación estaba vigente debido a los trabajos pioneros de Markowitz en 1952 (Nóbel de Economía en 1990) relativos a la optimización de la cartera.

3. RELACIONES DEL CÁLCULO CLÁSICO CON EL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Respecto de las relaciones del "Cálclulo Clásico" con el "Cálculo Estocástico" procede hacer la siguientes consideraciones.

Si $X:[0,\infty]\rightarrow R$ es una función real $X(t)=X_t$. Por ejemplo, la función X_t puede representar la velocidad de un cuerpo sólido dependiente del tiempo *t*. También X_t puede representar el precio de un título a lo largo del tiempo, "diagrama" del título *X*. Ahora bien, hay una diferencia fundamental entre las dos interpretaciones. En el primer caso, *X* como función de *t* es una función "suave" no solamente continua, sino también diferenciable. Para esta clase de funciones se aplican dos instrumentos conocidos del cálculo clásico. Utilizando la notación

$$\dot{X} := \frac{dX_t}{dt}$$

para la derivada de X_t con respecto al tiempo *t*, la relación básica entre la derivación e integración se puede establecer como

$$X_t = X_0 + \int_0^t \dot{X}_s ds,$$

o bien,

$$dX_t = \dot{X}_t dt.$$

Si $F \in C^2(R)$ es una función real continuamente diferenciable dos veces sobre la recta real R. Entonces la fórmula de Taylor establece:

$$\Delta f(X_t) = F(X_{t+\Delta t}) - F(X_t) = F'(X_t)\Delta X_t + \frac{1}{2}F''(X_t)(\Delta X_t)^2$$

con $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$ y cierto $\tilde{t} \in [t, t+\Delta t]$.

Tomando límites cuando $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos

$$dF(X_t) = F'(X_t)dX_t$$

o también,

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)dX_s$$

puesto que para una función suave $X_t, \Delta X_t \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{} dX_t = \dot{X}_t dt$ y los términos de orden superior $(dt)^2$ son despreciables.

Ahora bien, esta relación clásica no es aplicable para las funciones reales que se presentan en la Matemática Financiera. Cuando el matemático alemán Weierstrass construyó una función real continua, pero no diferenciable en ninguna parte, esto se consideró como una curiosidad matemática. Desgraciadamente, esta "curiosidad" está en el corazón de la Matemática Financiera. **Los gráficos de los tantos de cambio, de los tantos de interés y de los activos líquidos son prácticamente continuos, como los disponibles hoy en día que presentan datos de alta frecuencia, pero son de variación ilimitada en todo el intervalo de tiempo. En particular, no son diferenciables en ninguna parte. Por tanto, el Cálculo Clásico necesita una extensión a funciones de variación no acotada, tema estudiado por los matemáticos durante mucho tiempo.**

Este déficit se cubrió mediante el desarrollo del "Cálculo Estocástico" que se puede considerar como la teoría de la diferenciación e integración de los procesos estocásticos.

Existen numeros libros recientemente publicados que desarrollan ampliamente el cálculo estocástico con énfasis sobre las aplicaciones a los mercados financieros a diferentes niveles de sofisticación matemática (Föllmer y Schied, 2010).

¿Qué extensión del cálculo clásico se necsita para las funciones reales de variación ilimitada? Simplemente, cuando al desarrollar la diferencial $dF(X_t)$ el segundo término de la fórmula de Taylor no se puede despreciar, puesto que el término $\left(\Delta X_t\right)^2$, la variación cuadrática de X_t no desaparece para $\Delta t \to 0$. Por tanto, para las funciones de variación non acotada, la diferencial es de la forma

$$dF(X_t) = F'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}F''(t)(dX_t)^2 \tag{1}$$

o bien, de forma explícita

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)(dX_s)^2 \tag{2}$$

donde $\left(dX_t\right)^2$ es la variación cuadrática infinitésimal de *X*.

Esta no fue, la nuevamente aparició del segundo término, lo que creó la principal dificultad para desarrollar el Cálculo Estocástico. Para funciones de variación cuadrática finita este término F'' es una integral bien definida Lebesgue-Stieltjes. El cambio real consiste en dar un significado preciso a la primera integral donde tanto el argumento del integrando y del integrador son de varición no-acotada sobre todo el intervalo de tiempo, arbitrariamente pequeño. Esta cuestión fue resuelta en primer lugar por Itô, de ahí el nombre de la "fórmula de Itô" para la relación (1) y la integral de Itô para la primera integral de la (2).

Utilizando el enfoque a lo largo de una trayectoria de Föllmer, podemos deducir la fórmula de Itô y la integral de Itô sin recurrir a la teoría de la probabilidad. Observando un proceso estocástico "paso a paso", se puede dar un significado preciso a las expresiones (1) y (2) utilizando solamente instrumentos elementales del análisis real clásico. Solamente se necesita la teoría de la probabilidad, posteriormente cuando consideramos la acción recíproca de todas las trayectorias de los procesos estocásticos como difusiones y semimartingalas.

3.1. El Lema de Itô

Si X_t es un proceso de Itô que satisface

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t \tag{3}$$

y $f(t,x)$ es una función dos veces diferenciable, entonces tenemos que $f(t,X_t)$ es un proceso de Itô y que

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)dx^2 \tag{4}$$

donde dx^2 está definido por

$$dt^2 = 0 \tag{5}$$

$$dtdW = 0 \tag{6}$$

$$dW^2 = dt \tag{7}$$

Observemos que la regla de la multiplicación final es la crucial que da el término complementario.

Un argumento análogo, nos proporciona una regla cuando tenemos varios procesos Itô basados en el mismo movimiento Browniano.

En efecto, sean *n* procesos de Itô unidimensionales S_i, dados por

$$dS_i = \mu_i dt + \sigma_i dz_i, \quad i = 1,2,...,n$$

Supongamos que $u = u(t, S_1, S_2, ..., S_n) : [0,T] \times R^n \rightarrow R$, tiene derivadas parciales u_t, u_{Si}, u_{Sij}, $i, j \leq n$ que son continuas. Entonces, el proceso $Y = u(t, S_1, S_2, ..., S_n)$ también es un proceso de Itô dado por:

$$dY = u_t dt + \sum_{i=1}^{n} u_{Si} dS_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{SiSj} dS_i dS_j \tag{8}$$

donde el producto $dS_i dS_j$, se puede calcular utilizando las reglas de multiplicación:

$$\begin{array}{ll} dZ_i \, dZ_j = \rho_{ij} dt & \text{para } i \neq j, j < n \\ dZ_i \, dZ_j = dt & \text{para } i = j = 1,2,...,n \\ dt \, dZ_i = 0 & \text{para } i = 1,2,...,n \end{array}$$

con ρ_{ij} coeficiente de correlación entre dZ_i y dZ_j.

Sobre este tema se podrían consultar: Itô (1951), Gikman y Skorokhod (1969), Arnold (1974), o bien Malliaris y Brock (1982).

4. CUESTIONES PRACTICAS

4.1. Ejemplo 1

Sea una función de proceso de Wiener estándar W_t dada por

$$F(W_t, t) = W_t^2. \tag{9}$$

Se pide aplicar la fórmula de Itô a esta función.

Solución: Teniendo en cuenta que W_t tiene un parámetro de tendencia 0 y un parámetro de difusión 1.

Aplicamos la fórmula de Itô a la función:

$$dF_t = \frac{1}{2}[2dt] + 2W_t dW_t \tag{10}$$

o bien,

$$dF_t = dt + 2W_t dW_t \tag{11}$$

Entonces, en este caso, la fórmula de Itô resulta una ecuación diferencial estocástica que tiene de coeficiente de tendencia a

$$(I_t, t) = 1 \tag{12}$$

y coeficiente de difusión

$$\sigma(I_t, t) = 2W_t \tag{13}$$

Por tanto, la tendencia es constante y la difusión depende del conjunto de información I_t.

4.2. Ejemplo 2

Aplicar la fórmula de Itô a la función

$$F(W_t, t) = 3 + t + e^{W_t}. \tag{14}$$

<u>Solución:</u> Obtenemos

$$dF_t = dt + e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt. \tag{15}$$

Agrupando

$$dF_t = \left[1 + \frac{1}{2} e^{W_t}\right] dt + e^{W_t} dW_t. \tag{16}$$

En este caso, obtenemos una ecuación diferencial estocástica para $F(s,t)$ con tendencia I_t-dependiente y término de difusión:

$$a(I_t, t) = \left[1 + \frac{1}{2} e^{W_t}\right]$$

y

$$\sigma(I_t, t) = e^{W_t}.$$

5. CONCLUSIONES

Después de haber realizado una revisión de los métodos cuantitativos a lo largo del tiempo se observa que el Lema de Ito, es el instrumento central de la diferenciación en el cálculo estocástico. No son demasiadas cuestiones básicas las que hay que recordar para poder utilizarle. En primer lugar, la fórmula ayuda a determinar las diferenciales estocásticas para los derivados financieros dados los movimientos del activo subyacente. En segundo lugar, las fórmulas son completamente dependientes de la definición de la integral de Ito. Esto significa que las igualdades se deben interpretar dentro de la equivalencia estocástica. Finalmente, desde un punto de vista práctico, se debe recordar que las fórmulas estándar utilizadas en el cálculo determinista proporcionan resultados significativamente diferentes de los obtenidos mediante el cálculo estocástico. En particular, si se utilizan las fórmulas estándar, esto supondría que todos los procesos en observación tendrían volatilidad infinitesimal nula. Por otra parte, hemos visto que ésta no es una hipótesis adecuada cuando se trata de valorar el riesgo utilizando los derivados financieros.

6. ANEXO SOBRE VARIABLES ALEATORIAS Y PROCESOS ESTOCASTICOS

6.1 Definiciones generales de la teoría de la probabilidad.

La noción básica de la teoría de la probabilidad es la de "espacio de probabilidad", constituida por terna siguiente:

- Un conjunto Ω.
- Una σ-álgebra $\Im$ sobre Ω.
- Una medida de probabilidad P sobre $\Im$.

Una σ-álgebra $\Im$ sobre un conjunto Ω, es un conjunto de las partes que contiene el conjunto vacío y que es estable respecto de las operaciones de unión numerable, de las intersecciones numerables y del conjunto complementario. Los elementos de $\Im$ se denomina sucesos.

Una ley de probabilidad P sobre el espacio $(\Omega,\Im)$ es una medida positiva definida sobre $\Im$, de masa total igual a 1.

Se tiene pues:

a) $P(\Omega)=1$; b) $P(A)\geq 0, \forall A\in\Im$; c) $P\left(\bigcup_n A_n\right)=\sum_n P(A_n)$.

El número $P(A)$, se denomina población del suceso A $(A\in\Im)$; se tratará de un número real comprendido entre 0 y 1.

Un suceso $(A \in \Im)$, se dice "casi seguro" si su probabilidad es igual a 1. Un suceso $(A \in \Im)$, se dice "*P*-despreciable" si su probabilidad es nula.

Un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, se denomina "completo" si toda parte *A* de Ω contenida en un conjunto *P*-despreciable pertenece a la σ-álgebra de los sucesos $\Im$.

Sobre un espacio de probabilidad así definido, se introduce la noción de variable aleatoria que modela el resultado cuantitativo de la experiencia aleatoria considerada.

Una variable aleatoria *X* definida sobre el conjunto Ω con valores en un espacio medible dado $(E, \mathcal{E})$ es una función medible de $\Omega \in E$, es decir,

$$X : \Omega \to E : \omega \to X(\omega) \in E$$

tal que

$$X^{-1}(A) \in \Im \text{ para } \forall A \in \mathcal{E}.$$

La σ-álgebra $F(X)$ asociada a la variable aleatoria *X* es la σ-álgebra sobre Ω engendrada por los conjuntos de la forma:

$$\omega_B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \text{ donde } B \in \mathcal{E}.$$

La ley de probabilidad (o distribución) de la variable aleatoria *X* definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, es la medida Q_X sobre el espacio $(E, \mathcal{E})$ definida por

$$Q_X(A) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}, \text{ donde } A \in \mathcal{E}.$$

Para una variable aleatoria real, la distribución se puede caracterizar por la noción de función de distribución.

6.2 El Proceso de Poisson.

El proceso de Poisson permite modelar el tipo de experiencia siguiente.

Se observa a lo largo del tiempo la aparición repetida de un cierto suceso aleatorio (espacio de los tiempo $= R^+$). Si

a) el número de sucesos aparecidos en el intervalo $[t, t+h]$ no depende ni del número ni del momento de aparición de los sucesos en el intervalo $[0, t]$;

b) la probabilidad de que se presente un suceso en el intervalo $[t, t+h]$ es de la forma

$$\lambda h + O(h), \quad \lambda > 0;$$

c) la probabilidad de que no aparezca ningún suceso en el intervalo $[t, t+h]$ es de la forma

$$1 - \lambda h + O(h);$$

d) la probabilidad de que se presenten más de un suceso en el intervalo $[t, t+h]$ es igual a $O(h)$.

Entonces el proceso definido por

$X(t)$= número de sucesos aparecidos en el intervalo $[0,t]$ es un "proceso de Poisson".

La distribución de tal proceso estocástico viene dada por:

$$P[X(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k \in N.$$

La variable aleatoria $X(t)$ admite pues una distribución de Poisson de parámetro λt.

La noción de "proceso de Poisson compuesto" proviene de esta interpretación: los saltos, deterministas y unitarios en el proceso de Poisson, se reemplazan por variables aleatorias independientes y equidistantes.

6.3 Movimiento Browniano.

Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad, dotado de un filtración $\{\Im_t, t \geq 0\}$, es decir, de una familia creciente de σ-álgebras de $\Im$.

Un "proceso estocástico" $\{W(t,\omega); t \in R^+, \omega \in \Omega\}$ es un "proceso de Wiener" o "movimiento browniano estándar" si:

a) W es un proceso de incrementos independientes y estacionarios;

b) $W(t)$ admite una distribución normal, $\forall t > 0$.

c) $W(0) = 0$

d) $\forall t > 0; E(W(t)) = 0$ y $Var(W(t)) = t$.

El movimiento browniano se denomina "adaptado a la filtración $\{\Im_t\}$" si $W(t)$ es una variable aleatoria $\Im_t$-medible para todo $t \geq 0$. Además, se supone que $\forall t,s > 0, W(t+s) = W(t+s) - W(t)$ es independiente de $\{\Im_t\}$.

La funcional I_0^T se denomina "funcional de integración estocástica" con respecto al movimiento browniano; la variable aleatoria $I_0^T(f)$, se denomina "integral estocástica definida" y se denota

$$I_0^T = \int_0^T f(t) dW(t)$$

Se dice que el proceso ξ admite una "diferencial estocástica" sobre $[0,t]$ y se denota

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

La operación de diferenciación estocástica, lineal como la diferenciación clásica, se distingue en dos aspectos.

1) Diferenciación de un producto de procesos.

Si ξ_1 y ξ_2 son dos procesos que admiten una diferencial estocástica, entones el producto $\xi_1 . \xi_2$ es igualmente diferenciable

$$d\xi_1(t) = a_1(t)dt + b_1(t)dW(t)$$
$$d\xi_2(t) = a_2(t)dt + b_2(t)dW(t)$$

entonces

$$d\xi_1(t)\xi_2(t) = \xi_1(t)d\xi_2(t) + \xi_2(t)d\xi_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt$$

2) Diferenciación de un proceso compuesto (fórmula de Itô).

Si un proceso ξ admite una diferencial estocástica

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

y si $f(t,x)$ es una función de $[0,T] \times R$ en R, continua así como sus derivada parciales: $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, entonces:

$$df\left(t,\xi(t)\right) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,\xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\xi(t))b^2(t)\right]dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))b(t)dW(t)$$

Un proceso X se denomina “cad-lag”, “cadlag functions” (abreviatura del francés) “continuas por la derecha con límite por la izquierda”, si sus trayectorias son continuas por la derecha sobre R^+ y tienen límites por la izquierda finitos sobre R_0^+.

Tiempo de espera.

La noción de “tiempo de espera”, generalmente los tiempos deterministas, juegan un papel esencial en teoría de los procesos estocásticos.

Una variable aleatoria $T : \Omega \to R^+ \cup \{\infty\}$ es un “tiempo de espera” si $\forall t \in R^+$ el suceso $\{T \le t\} \in \Im_t$.

En particular, toda constante positiva es un tiempo de espera.

6.4 Martingalas.

Una martingala M es un proceso estocástico adaptado, “cad-lag”, tal que:

1) $M(t,\omega)$ es integrable y $E(M(t,\omega)) < \infty$;

2) $E\left(M(s,\omega)\mid\Im_t\right)=M(t,\omega),\forall 0\le t\le s.$

Si $E\left(M(s,\omega)\mid\Im_t\right)\le M(t,\omega),\forall 0\le t\le s$ ($\ge$ respectivamente) se habla de super-martingala (respectivamente, sub-martingala)

Un proceso estocástico $\{X(t),t\ge 0\}$ con medias finitas, se denomina "martingala" (de parámetro continuo) si para todo conjunto de momentos

$$t_1<t_2<\ldots<t_n<t_{n+1}$$

$$E\left[X(t_{n+1})\mid X(t_1),\ldots,X(t_n)\right]=X(t_n)$$

es decir, la esperanza condicionada de $X(t_{n+1})$, dados los valores $X(t_1),\ldots,X(t_n)$ es igual al valor más recientemente observado $X(t_n)$.

- Martingalas (de parámetro discreto)

Un proceso estocástico $\{X_n,n=1,2,\ldots\}$ con medias finitas se denomina "martingala" (de parámetro discreto) si para todo entero *n*

$$E\left[X_{n+1}\mid X_1,\ldots,X_n\right]=X_n$$

Un proceso estocástico $\{X(t):t\in T\}$ es tal que la esperanza matemática de $X(t)$ es finita para cada *t* y si $t_1<t_2<\ldots<t_n$ son del índice *T*, entonces (con probabilidad 1) la esperanza condicionada de $X(t_n)$, dado $X(t_i)=a_i$; si $i<n$ es igual a a_{n-1}. Si *T* es el conjunto de los enteros positivos; basta requerir que la esperanza condicionada de X_n, dado $X(i)=a_i$ si $i<n$, es a_{n-1}.

6.5 Procesos Estocásticos.

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X(t):t\in T\}$ indizada por un parámetro *t* que varía dentro de un conjunto índice *T*.

Sean $(\Omega,\Im,P)$ un espacio de probabilidad, *T* un conjunto cualquiera y $(E,\mathcal{E})$ un espacio medible. Se llama "proceso estocástico" definido sobre Ω que tiene a T como conjunto de tiempos y *E* como espacio de estados, a toda familia $\left(X(t)\right)_{t\in T}$ de variables aleatorias con valores en *E*.

La variable aleatoria $X(t)$ se denomina estado en el instante *t*. Para todo $\omega\in\Omega$, la aplicación

$$T\to E:t\to X(t,\omega)$$

se llama trayectoria asociada a ω.

Es decir una familia de variables aleatorias $\{X(t): t \in T\}$ donde T es el "conjunto índice" y hay una variable aleatoria $X(t)$ para cada $t \in T$. Cuando T es un conjunto discreto (por ejemplo, un conjunto de enteros) el proceso es un "proceso de parámetro discreto", cuando T es un intervalo de números reales, el proceso es un "proceso de parámetro continuo".

Un proceso estocástico X se denomina de "crecimientos independientes" si $\forall n$ y $\forall t_1 < t_2 < ... < t_n, (t_i \in T)$ las variables aleatorias

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes.

Este proceso estocástico se denomina de "crecimientos estacionarios" si las variables aleatorias $X(t+h) - X(t)$ y $X(h)$ están equidistantes.

Una filtración es una familia $(\Im_t)_{t \in T}$ de sub-σ-álgebras de $\Im$, tal que $\Im_s \subset \Im_t$, para $s \leq t$ (familia creciente).

La σ-álgebras de $\Im_t$ se denomina σ-álgebra de los sucesos anteriores a *t*, modela la informaciones disponibles en el instante *t*.

En el futuro y a medida que transcurre el tiempo la información es cada vez más importante, lo que modela el aspecto creciente de la familia.

La relación entre filtración y proceso estocástico está asegurada mediante la definición siguiente:

Todo proceso estocástico X genera una filtración llamada "filtración natural" del proceso definida por:

$\Im_t = \Im(X(s)) : s < t$: filtración engendrada por las variables aleatorias anteriores al instante *t*.

Un proceso estocástico *X* se denomina "adaptado" a una filtración $(\Im_t)_{t \in T}$ si y sólo si para $t \in T$, la variable aleatoria $X(t)$ es $\Im_t$-medible (es decir, $X_t^{-1}(A) \in \Im_t$, $\forall A \in \mathcal{E}$).

Un proceso estocástico es, por definición, adaptado a su filtración natural.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAXTER, M y RENNIE, A (1999). Financial Calculus. Cambridge University Press.
- CRAMER, H. (1969). "Historical review of Filip Lundberg's works on risk theory".

Scandinavian Actuarial Journal, Supplement 3, pp. 6-12.

- DUFFIE, D. (1996). Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton.
- ELLIOTT, R.J. y KOPP, P.E. (2004). Mathematics of Financial Markets. Springer.
- FÖLLMER, HANS (1981). "Calcul d'Itô sans probabilitiés". Séminaire de probabilités de Strasbourg, 15, pp. 143-150.
- FÖLLMER, H y SCHIED, A. (2002). Stochastic Finance. De Gruyter.
- GIHMAN, I. y SKOROHOLD, A. (1974). The Theory of Stochastic Processes, vol. I y II. Springer-Verlag.
- ITÔ, K. (1944). "Stochastic Integral". Proceedings of the Imperial Academy, 20 (8), pp. 519-524.
- ITÔ, K. (1951). "On Stochastic Differential Equations". Memoires American Mathematical Society, 4, pp: 51.
- KARATZAS, I. y SHREVE, S.E. (1991). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer
- MARTINEZ BARBEITO, J. y G. VILLALON, J. (2003). Introducción al Cálculo Estocástico. Aplicado a la Modelación Económico-Financiero-Actuarial. Netbiblo.
- NORBERG, R. (1995). "Stochastic Calculus in Actuarial Science". Industrial and Applied Mathematics, 2 (5), pp. 1-23.
- OSKENDAL, B. (1992). Stochastic Differential Equations. Springer.
- PROTTER, P. (1990). Stochastic Integration and Differential Equations. Springer.
- REVUZ, D. y YOR, M. (1994). Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer.
- WILMOTT, P., HOWISON, S. y DEWYNNE, J. (1995). The Mathematics of Financial Derivatives. Cambridge University Press.
- WILMOTT, P. (1999). The Theory and Practice of Financial Engineering. Wiley.