

MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA RELACIÓN PARTICULAS PM_{10} - ENFERMEDADES PULMONARES EN LA CIUDAD DE CALI

Mathematical modeling of correlation particulate PM_{10} - pulmonary diseases in Cali city

RESUMEN

En este trabajo, se ha planteado un modelo matemático que permite relacionar enfermedades pulmonares como: asma, bronquitis e IRA con la concentración de material particulado PM_{10} en el medio ambiente. El modelo está basado en un sistema de cinco ecuaciones diferenciales ordinarias, donde las variables consideradas son: Población de Susceptibles, Población de Enfermos Pulmonares por contacto con el agente contaminante, Población de Enfermos confirmados, Concentración de Material Particulado PM_{10} en el ambiente. Se ha demostrado la existencia de un único equilibrio endémico, así como la estabilidad asintótica local del mismo. Se ha encontrado una prevalencia de enfermedad casi del 25%.

PALABRAS CLAVES: Enfermedades Pulmonares, Modelos Matemáticos, Material Particulado PM_{10} .

ABSTRACT

In this work, a mathematical model has been considered in order to find correlations between pulmonary diseases, as asthma, bronchitis and acute respiratory infection (ARI), with the concentration of particulate material PM_{10} in the environment. The model is based on a system of five ordinary differential equations, where the variables considered are: Susceptible population, pulmonary patient's population infected by contact with the polluting agent, confirmed patients population, concentration of Particulate Material PM_{10} in the atmosphere. It has been demonstrated the existence of a unique endemic equilibrium, as well as the local asymptotic stability of the same one. It has been found almost 25% of prevalence of the disease.

KEYWORDS: *Mathematical Models, Pulmonary diseases, Particulate Material PM_{10} .*

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales agentes determinantes de la calidad del aire son las partículas sólidas suspendidas, comúnmente denominadas TSP: (partículas totales suspendidas). Las TSP se dividen de acuerdo a su tamaño en partículas menores o iguales a $10 \mu m$ (PM_{10}) y las menores a $2,5 \mu m$ ($PM_{2,5}$). La atención sobre las TSP, se ha concentrado mayormente en las partículas PM_{10} , que pueden ser inhaladas y penetrar con facilidad al sistema respiratorio humano, causando efectos adversos a la salud de las personas. Es así como, la Norma Primaria de Calidad del aire para contaminante PM_{10} , establece como límite máximo cincuenta microgramos por metro cúbico normalizado de aire ($50 \mu g / m^3 N$) como concentración promedio de 24 horas.

El material particulado menor a 10 micras colectado en los filtros detecta que: El 25% de este PM_{10} proviene de las "fuentes móviles", un 38% corresponde a la categoría "industria, comercio y material particulado secundario", este último procedente tanto de fuentes fijas como de móviles, siendo muy difícil poder diferenciar su origen. En tanto que el "polvo suspendido" representa esta vez un 33%.

Se define la infección respiratoria aguda (IRA) como el conjunto de infecciones de cualquier área del aparato respiratorio causadas por microorganismos virales o bacterianos, con un período menor de quince días, puede afectar la nariz, los oídos, la faringe, la epiglotis, la laringe, la tráquea, los bronquios, los bronquiolos o los pulmones. Puede presentar uno ó más síntomas clínicos como: tos, rinorrea, obstrucción

Fecha de Recepción: 25 de Enero de 2008

Fecha de Aceptación: 19 de Mayo de 2008

ELMER DE LA PAVA

Licenciado en Matemáticas, Ph. D.
Profesor Titular
Universidad Autónoma de Occidente
Cali
epava@uao.edu.co

BEATRIZ SALGUERO

Ingeniero Sanitario. Especialista en Biomatemáticas
Profesor Asociado
Universidad Autónoma de Occidente
Cali
bsalguero@uao.edu.co

OSCAR FERNÁNDEZ

Licenciado en Matemáticas, Ms. C.
Profesor Auxiliar
Universidad tecnológica de Pereira
oscarf@utp.edu.co

nasal, dolor de garganta, odinofagia, otalgia, disfonía, respiración ruidosa, dificultad respiratoria, los cuales pueden estar acompañados de fiebre.

El asma es un trastorno inflamatorio repetitivo de las vías aéreas, que limita el flujo de aire dentro del flujo respiratorio, con sintomatología de dificultad para respirar. La prevalencia mundial del asma está entre el 3% y el 5%. La mortalidad es de 0.4 por 100.000 habitantes entre 5 y 34 años en los Estados Unidos, país en donde es dos veces más frecuente en la población negra. [5]

La bronquitis es una inflamación del recubrimiento de los tubos bronquiales. Cuando los bronquios están inflamados y/o infectados, entra y sale menos aire de los pulmones y se tose mucho esputo o flema. Se estima que la bronquitis crónica afecta al 5 por ciento de la población de EE UU.

En este artículo se presenta la estimación, mediante un modelo matemático basado en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal, de la prevalencia e incidencia en la ciudad de Cali de enfermedades como asma, bronquitis y enfermedades pulmonares ó similares, relacionadas con la presencia de partículas en suspensión, PM_{10} , producidas por vehículos automotores e industrias en algunos sectores de la zona urbana de la ciudad de Cali.

Los modelos matemáticos han sido una herramienta importante para analizar la propagación y control de enfermedades infecciosas. El proceso de formular un modelo clarifica hipótesis relacionando variables y parámetros; proporcionando

resultados conceptuales como el valor umbral, número reproductivo básico y número de contactos. Los modelos matemáticos y las simulaciones computacionales son herramientas experimentales útiles para construir y probar teorías, para resolver conjeturas, para responder a preguntas específicas y determinar sensibilidad a cambios en los parámetros. Estos son usados en la comparación, planificación, implementación, evaluación y optimización de la detección, prevención, terapia y programas de control. La epidemiología matemática puede contribuir al diseño y análisis de registros epidemiológicos e identificar tendencias al sugerir cuales son los datos cruciales que deben ser recolectados.

2. METODOLOGÍA

Área de Estudio

Santiago de Cali, cuenta con una superficie total de 56.400 (Ha), repartidas en 20 comunas con un área urbana de 11.983.6 (Ha) y corregimientos con un área de 44.461.4 (Ha), registra una altura sobre el nivel del mar de 1.079.52 m, temperatura promedio de 23 ° C, precipitación anual de 774.8 mm, alberga una población de 2.071.566 habitantes. Además, posee un parque automotor de 377.000 vehículos, cuenta con un sector productivo, representado especialmente en el sector industrial y en sector manufacturero en las comunas 3, 4 5 y 8 respectivamente; fábricas que se encuentran muy próximas a las áreas de vivienda, se practica la quema de biomasa en el cultivo de la caña de azúcar, se presenta erosión eólica de los cerros tutelares y está influenciada por la contaminación atmosférica del Municipio de Yumbo, ya que hace parte del corredor industrial Cali – Yumbo (Plan de Ordenamiento Territorial, POT 2000).

En Santiago de Cali, se cuenta desde el año 1999 con una red de monitoreo de la calidad del aire a cargo del DAGMA, la que ha reportado datos que indican alta concentración de partículas PM₁₀ en algunos sitios de la ciudad. Por ejemplo, los datos del año 2000 en la estación de la calle 15 con carrera 2 indican que el promedio anual de PM₁₀ en ese sitio fue de 53 μg / m³ de aire, superior por ejemplo a la norma actual en Estados Unidos de 50 μg / m³ de aire.

Modelo Matemático

En este modelo se considera a la población total N(t) dividida en tres clases llamadas : **Población susceptible** S(t), como aquella que está siempre expuesta al material particulado PM₁₀. Se tiene una **población I(t), con enfermedades pulmonares** ocasionadas por el contacto con el material particulado PM₁₀. Para cada sector de la ciudad de Cali existen registros en la Secretaría Municipal de Salud de enfermos con enfermedades pulmonares, a esta clase la llamamos: **Población de enfermos** E(t). La **concentración de material particulado PM₁₀ en el ambiente** es P(t).

La población susceptible S(t) se mueve a la clase de población enferma I(t) por el contacto con el material particulado PM₁₀, con un coeficiente de transmisión λ. El sistema de ecuaciones tiene la forma:

$$S'(t) = \Lambda - \lambda S(t)P(t) - dS(t) \quad (1)$$

$$I'(t) = \lambda S(t)P(t) - dI(t) - \beta I(t) \quad (2)$$

$$E'(t) = -(\alpha + d)E(t) + \beta I(t) \quad (3)$$

$$N'(t) = \Lambda - \alpha E(t) - dN \quad (4)$$

$$P'(t) = Q - \delta_0 P - \delta NP \quad (5)$$

Donde Λ es tasa de reclutamiento constante en la población bajo consideración, d es la tasa natural de muerte, α son(es) las(la) tasa(s) de mortalidad por la enfermedad en los casos considerados, δ₀ es la tasa natural de disminución del material particulado PM₁₀, δ es la tasa de disminución del material particulado PM₁₀ debido a la inhalación de la población humana y Q es la tasa de emisión del material particulado PM₁₀ en el ambiente.

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD:

Existe un único equilibrio no trivial dado por

$$S^* = \frac{\Lambda}{\lambda P^* + d} \quad (6)$$

$$I^* = \frac{\lambda S^* P^*}{d + \beta} \quad (7)$$

$$E^*(t) = \frac{\beta I^*}{\alpha + d} \quad (8)$$

$$N^*(t) = \frac{\Lambda - \alpha E^*}{d} \quad (9)$$

$$P^* = \frac{Q}{\delta_0 + \delta N^*} \quad (10)$$

Al resolver el sistema 5(6)–10 llegamos a las siguientes expresiones para las poblaciones en equilibrio:

$$S^*(t) = \frac{\Lambda}{(\lambda P^* + d)} \quad (11)$$

$$I^*(t) = \frac{\lambda \Lambda P^*}{(\lambda P^* + d)(d + \beta)} \quad (12)$$

$$E^*(t) = \frac{\beta \lambda \Lambda P^*}{(\lambda P^* + d)(d + \beta)(\alpha + d)} \quad (13)$$

$$N^*(t) = \frac{\Lambda(\lambda P^* + d)(d + \beta)(\alpha + d) - \beta \lambda \alpha \Lambda P^*}{d(\lambda P^* + d)(\alpha + d)(d + \beta)} \quad (14)$$

Reemplazando (14) en (10), se tiene:

$$P^* = \frac{Q d (\lambda P^* + d) (d + \beta) (\alpha + d)}{(\delta_0 d + \delta \Lambda) (\lambda P^* + d) (d + \beta) (\alpha + d) - \beta \lambda \alpha \Lambda \delta P^*} \quad (15)$$

La ecuación (15) conduce a la siguiente ecuación cuadrática para P^* ,

$$\left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d - \frac{\beta \lambda \alpha \Lambda \delta}{(d + \beta)(\alpha + d)}\right) P^{*2} + \left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d\right) P^* - Q d^2 = 0 \tag{16}$$

Resolviendo la ecuación para P^* , se tiene:

$$P^* = \frac{-\left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d\right) \pm \sqrt{\left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d\right)^2 + 4 Q d^2 \lambda \left(\delta_0 d + \delta \Lambda - \frac{\beta \lambda \alpha \Lambda \delta}{(d + \beta)(\alpha + d)}\right)}}{2 \left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d - \frac{\beta \lambda \alpha \Lambda \delta}{(d + \beta)(\alpha + d)}\right)}$$

Se analiza la cantidad subradical:

$$\left[\left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d\right)^2 + 4 Q d^2 \lambda \left(\delta_0 d + \delta \Lambda - \frac{\beta \lambda \alpha \Lambda \delta}{(d + \beta)(\alpha + d)}\right)\right]$$

Equivalente a:

$$\left[\left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d\right)^2 + 4 Q d^2 \lambda \left(\delta_0 d + \delta \Lambda \left(1 - \frac{\beta \alpha}{(d + \beta)(\alpha + d)}\right)\right)\right]$$

que puede ser escrita como:

$$\left[\left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d\right)^2 + 4 Q d^2 \lambda \left(\delta_0 d + \delta \Lambda \left(1 - \frac{\beta}{(d + \beta)} \frac{\alpha}{(\alpha + d)}\right)\right)\right]$$

pero $\frac{\beta}{(d + \beta)} < 1$ y $\frac{\alpha}{(\alpha + d)} < 1$ por lo que $1 - \frac{\beta}{(d + \beta)} \frac{\alpha}{(\alpha + d)} > 0$

Así la cantidad subradical es positiva y mayor que $(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d)$.

Por lo tanto el sistema tiene un solo equilibrio endémico no trivial para P^* , dado por:

$$P^* = \frac{-\left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d\right) + \left[\left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d\right)^2 + 4 Q d^2 \lambda \left(\delta_0 d + \delta \Lambda - \frac{\beta \lambda \alpha \Lambda \delta}{(d + \beta)(\alpha + d)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2 \left(\delta_0 d^2 + \delta \Lambda d - Q \lambda d - \frac{\beta \lambda \alpha \Lambda \delta}{(d + \beta)(\alpha + d)}\right)}$$

Teorema: El equilibrio

$$S^*(t) = \frac{\Lambda}{\lambda P^* + d}; \quad I^* = \frac{\lambda S^* P^*}{d + \beta}; \quad E^*(t) = \frac{\beta I^*}{\alpha + d}; \quad N^*(t) = \frac{\Lambda - \alpha E^*}{d};$$

$$P^* = \frac{Q}{\delta_0 + \delta N^*}$$

es localmente asintóticamente estable.

Demostración: La matriz Jacobiana correspondiente al sistema (1)-(5) evaluada en el punto de equilibrio $(S^*, I^*, E^*, N^*, P^*)$ está dada por

$$J(S^*, I^*, E^*, N^*, P^*) = \begin{pmatrix} -\lambda P^* - d & 0 & 0 & 0 & -\lambda S^* \\ \lambda P^* & -(d + \beta) & 0 & 0 & \lambda S^* \\ 0 & \beta & -(\alpha + d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta P^* & -\delta_0 - \delta N^* \end{pmatrix}$$

El **(La)** polinomio **(ecuación)** característico **(a)** correspondiente a la anterior matriz **J** está dado **(a)** por

$$(-d - x) \{x^4 + (a + b + c + d)x^3 + [ab + (a + b)(c + d) + c(d + h)]x^2 + [c(a + b)(d + h) + abc(d + h) - \alpha\beta\delta S^*]x + abc(d + h) - \alpha\beta\delta S^*\} = 0$$

Donde $a = \alpha + d$, $b = \delta_0 + \delta N^*$, $c = d + \beta$ y $h = \lambda P^*$.

Una raíz inmediata es $x = -d$. El **(La)** polinomio **(ecuación)** de grado 4 restante tiene todos sus coeficientes positivos porque

$$abc(d + h) > \alpha\beta\delta S^*$$

puesto que

$$(\alpha + d)(\delta_0 + \delta N^*)(d + \beta)(d + \lambda P^*) > \lambda P^* \alpha \beta \delta S^*.$$

Por esto, según la regla de los signos de Descartes, si la matriz **J** tiene valores propios reales, estos son negativos.

Ahora sea

$$e = a + b + c + d,$$

$$f = ab + (a + b)(c + d) + c(d + h),$$

$$g = c(a + b)(d + h) + ab(c + d),$$

$$m = abc(d + h) - \alpha\beta\delta S^*.$$

Según el criterio de Routh-Hurwitz el punto de equilibrio es asintóticamente estable si se cumplen las siguientes desigualdades

$$e > 0, \quad ef - g > 0, \quad efg - e^2 m - g^2 > 0 \text{ y } m > 0.$$

Para las últimas cuatro desigualdades, la primera desigualdad es evidente, la cuarta ya se probó arriba. La segunda se cumple porque

$$(a + b + c + d)[ab + (a + b)(c + d) + c(d + h)] > c(a + b)(d + h) + ab(c + d),$$

y la tercera es verdadera para un conjunto dado de parámetros. Por ejemplo para los siguientes valores de los parámetros:

$\lambda = 0.00003$, $\alpha = 0.000003$, $d = 0.00004$, $\beta = 0.005$, $Q = 0.7$, $N = 1000$, $\delta = 0.00002$, $\delta_0 = 0.001$ se tiene la matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} -0.000903 & 0 & 0 & 0 & -0.001662 \\ -0.00004 & -0.00504 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.005 & -0.000043 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.000003 & -0.00004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.000575 & -0.024346 \end{bmatrix}$$

los valores propios son

$$x_1 = -0.024333, x_2 = -0.005056, x_3 = -0.0009, x_4 = -0.000044, x_5 = -0.000039.$$

lo que indica que el equilibrio endémico es localmente asintóticamente estable.

RESULTADOS

Los resultados de varios conjuntos de simulaciones se presentan en las figuras 1-7, que muestran las distintas implicaciones del material particulado PM₁₀, con datos tomados en distintos sectores de la ciudad de Cali, durante el año 2000.

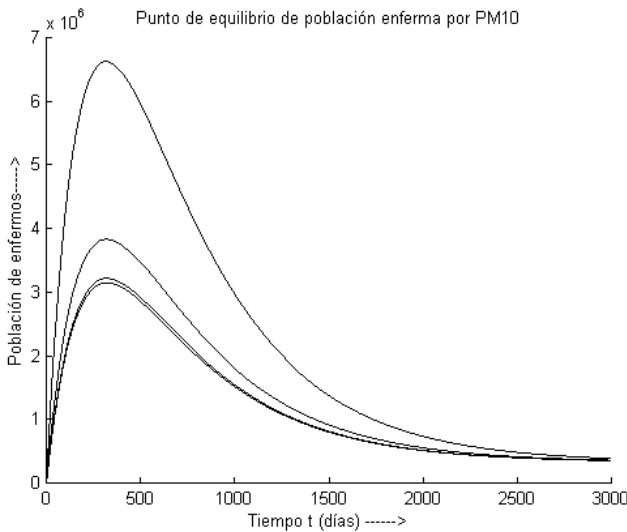


Gráfico 1: Este gráfico muestra que la población de enfermos en un intervalo largo de tiempo converge al equilibrio endémico.

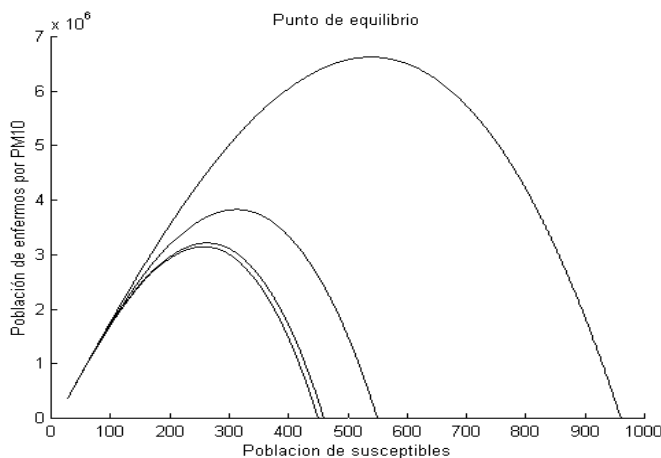


Gráfico 2: Este gráfico muestra el equilibrio endémico (40,450.000) localmente asintóticamente estable.

Zona Centro Diagnostico Automotor: Para observar la tendencia de las enfermedades pulmonares durante el año en este sector, hemos supuesto que 25% de la población tiene contacto con el material particulado y hemos hallado una tasa de enfermedad por contacto con el material particulado que oscila entre el 5% y el 18% como se muestra en la gráfico 3.

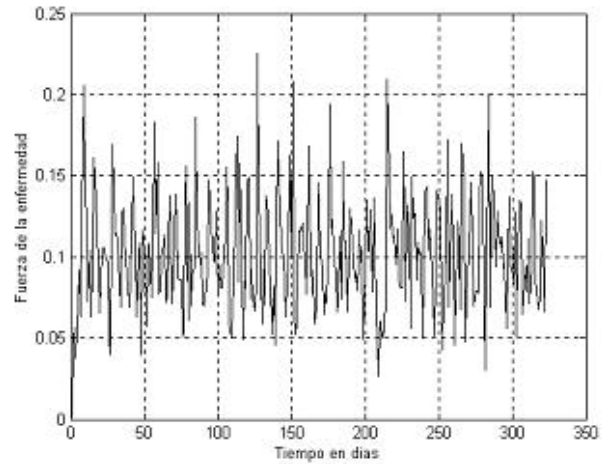


Gráfico 3: Este gráfico muestra que la población afectada por el materia particulado PM₁₀ oscila entre el 5% y el 18%.

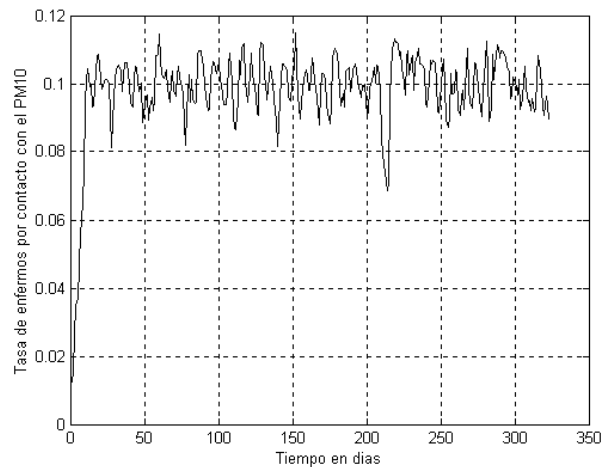


Gráfico 4: Este gráfico muestra que la tasa de enfermos por material particulado PM₁₀ oscila entre el 7% y el 10%.

Se ha encontrado que la prevalencia de la enfermedad se mantiene casi constante por debajo del 25% como se muestra en la gráfico 5. Este resultado está acorde con el obtenido para el único equilibrio endémico que resultó ser localmente asintóticamente estable.

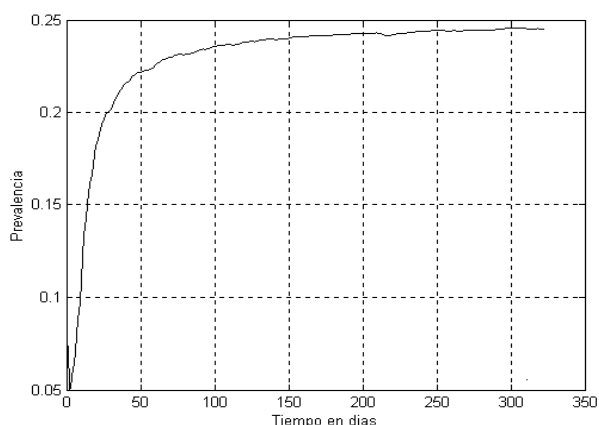


Gráfico 5: Se puede observar que la prevalencia de las enfermedades ocasionadas por el material particulado PM₁₀ permanece por debajo del 25%.

Zona Base Aérea: Para observar la tendencia de las enfermedades pulmonares durante el año en este sector, hemos supuesto que 25% de la población tiene contacto con el material particulado y se puede observar que la población de enfermos está directamente relacionada con altas concentraciones de material particulado PM₁₀ como se muestra en el gráfico 6.

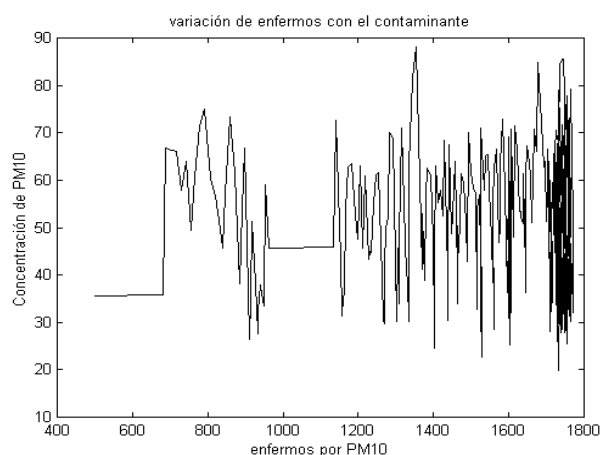


Gráfico 6: Este gráfico muestra que la población de enfermos está directamente relacionada con altas concentraciones de material particulado PM₁₀.

Se ha encontrado que la prevalencia de la enfermedad se mantiene casi constante por debajo del 18% como se muestra en el gráfico 7. Este resultado está acorde con el obtenido para el único equilibrio endémico que resultó ser localmente asintóticamente estable.

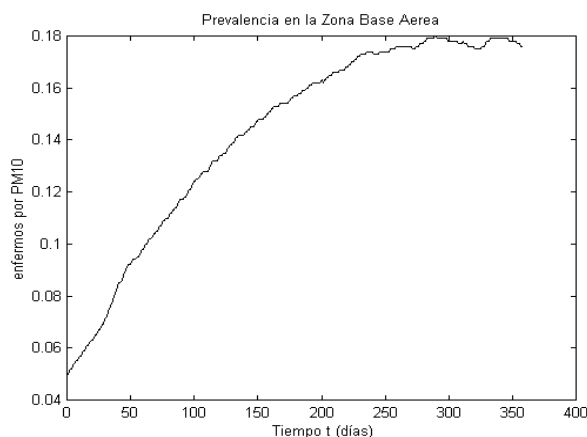


Gráfico 7: Se ha encontrado que la prevalencia de la enfermedad se mantiene casi constante por debajo del 18%.

COMENTARIOS

El comportamiento que presentan las enfermedades pulmonares en el sector del Centro Diagnóstico Automotor al norte de Cali mediante el modelo está de acuerdo con el comportamiento que se observa en la realidad. Este sector recibe a diario una gran cantidad de material particulado por su cercanía con la zona industrial del Municipio de Yumbo. Se ha encontrado una prevalencia de enfermedad casi del 25% y como es sabido este 25% está compuesto de niños y ancianos que son las personas más afectadas.

La variable que más influye en nuestros resultados, es el promedio de material particulado PM₁₀ que en los registros del Centro Automotor es de 62 $\mu\text{g}/\text{m}^3$; la mayoría de este material particulado proviene del transporte público y la zona industrial.

En el sector de la Base Aérea de Cali los resultados mediante el modelo están de acuerdo con el comportamiento que se observa en la realidad. Este sector recibe a diario una gran cantidad de material particulado por su cercanía a gran cantidad de industrias que se encuentran en este sector. Se tiene una prevalencia de enfermedad casi del 18%.

El promedio de material particulado PM₁₀ reportado en los registros de la Base Aérea es de 46 $\mu\text{g}/\text{m}^3$; este material particulado proviene del transporte público y la zona industrial.

El sector de la Calle 15 de Cali recibe a diario una gran cantidad de material particulado por su gran cantidad tráfico vehicular y se tiene una prevalencia de enfermedad alrededor del 20%. El promedio de material particulado PM₁₀ en este sector es de 48 $\mu\text{g}/\text{m}^3$; este material particulado proviene del transporte público.

El sector de la Escuela República de Argentina de Cali recibe a diario una gran cantidad de material particulado por la gran cantidad de tráfico vehicular. Se ha encontrado una prevalencia de enfermedad por debajo del 18%. El promedio de material particulado PM₁₀ en este sector es de 48 $\mu\text{g}/\text{m}^3$.

En el sector del polideportivo del barrio El Diamante la prevalencia de la enfermedad se encuentra por debajo del 20%.

El promedio de material particulado PM_{10} en este sector es de $55 \mu\text{g} / \text{m}^3$ y proviene del transporte público.

En el sector de Hospital Universitario del Valle la prevalencia de la enfermedad oscila alrededor del 16% y es debido a la gran cantidad de tráfico vehicular. El promedio de material particulado PM_{10} en este sector es de $42 \mu\text{g} / \text{m}^3$.

En el sector de la Universidad del Valle la prevalencia está por debajo del 13%, se puede asegurar que esto es debido a tráfico vehicular, pero es importante observar la gran diferencia en la prevalencia con otros sectores de la ciudad. El promedio de material particulado PM_{10} en este sector es de $28 \mu\text{g} / \text{m}^3$.

El sector Club CVC Pance presenta una prevalencia alrededor del 11%. El promedio de material particulado PM_{10} en este sector es de $27 \mu\text{g} / \text{m}^3$.

3. CONCLUSIONES

- Se ha logrado representar mediante un modelo matemático la correlación entre la presencia de partículas suspendidas en el aire PM_{10} y la presencia de enfermedades pulmonares.
- Se ha demostrado que dicho modelo tiene un único equilibrio endémico.
- Se ha demostrado que el equilibrio endémico es localmente asintóticamente estable.
- Se ha demostrado que la prevalencia de las enfermedades pulmonares se mantiene en niveles altos en aquellos sectores con presencia de material particulado PM_{10} en mayores cantidades que en aquellos sectores con menos presencia de material particulado PM_{10} .

4. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ballester F., Tenías J. M., Pérez S. Efectos de la Contaminación Atmosférica sobre la salud: Una introducción. Rev. Esp. Salud Pública; Vol. 73: Pg. 109 – 121. 1999.
- [2] Borja V. Contaminación atmosférica por material particulado y mortalidad de la Ciudad de México. Instituto Nacional de Salud Pública.
- [3] Proyecto ISS – ASCOFAME. Infección Respiratoria Aguda. Guías de Práctica Clínica Basadas en la evidencia.
- [4] Salazar J. Asma bronquial. Estado del arte. Colombia Médica. Vol. 32, No. 2, 2001.
- [5] Terrés A., Méndez M., Hernández A., Martínez E. Contaminación Atmosférica e Infección Respiratoria en la Ciudad de México. Revista Mexicana de Patología Clínica; Vol. 43 (3) Pg.104-112. 1996.