EL LEMA DE LA ENERGÍA Y LA TEORÍA DE GRUPOS DE LIE

The Energy Lemma and the Lie Group Theory

RESUMEN
En este artículo se presenta una demostración al Lema de la integral de la energía, haciendo uso de la teoría de los grupos de Lie en relación a las ecuaciones diferenciales ordinarias

PALABRAS CLAVES: Ecuaciones diferenciales, grupos de Lie, Lema de la energía.

ABSTRACT
This article presents a proof of the Integral energy lemma, using the Lie group theory related to ordinary differential equations.

KEYWORDS: *Differential equations, Energy lemma, Lie groups.*

HUGO HERNAN ORTIZ A.
M. Sc. Enseñanza de la Matemática
Profesor
Universidad Autónoma Manizales
Grupo de de Investigación en Física y Matemática
hugoral68@autonoma.edu.co

FRANCY NELLY JIMENEZ G.
M. Sc. Física
Profesor
Universidad Autónoma Manizales
Grupo de de Investigación en Física y Matemática
francy@autonoma.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

El presente artículo hace parte de una serie de escritos dedicados a la investigación y divulgación en el tema de los grupos de Lie aplicado a la solución de ecuaciones diferenciales (ver [1],[2]). A continuación se hará uso de la anterior teoría para presentar una demostración al lema de la integral de la energía.

En el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de orden superior se cita con frecuencia la ecuación de segundo orden $w_{tt} = f(w)$, para mostrar que siendo una ecuación aparentemente sencilla, la unicidad de la solución no está garantizada y el proceso para su obtención no es trivial incluso para formas simples de la función *f(w)*. Esta ecuación surge en forma natural en el modelado de situaciones como las que se ilustran en la tabla 1.

f(w)	**Modelo**
Constante	Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado
$-\dfrac{k}{m}w$	Sistema Masa Resorte
$-\dfrac{g}{l}sen(w)$	Péndulo simple
$-g\dfrac{R^2}{w^2}$	Balística [3]

Tabla 1. Modelado de Situaciones Física con la ecuación $w_{tt} = f(w)$

Un acercamiento a la solución de este tipo de ecuaciones tiene en cuenta su equivalencia con una ecuación de primer orden, según se evidencia en el siguiente lema, enunciado en [4] en la página 198..

Lema de la Integral de la Energía:

Sea w(t) una solución de la ecuación diferencial

$$w_{tt} = f(w), \tag{1}$$

Donde f es una función continua que no depende de w_t *ni de la variable independiente t. Sea F una primitiva de f, es decir,*

$$f(w) = \frac{d}{dw}F(w), \tag{2}$$

entonces la cantidad

$$E(t) = \frac{1}{2}(w')^2 - F(w), \tag{3}$$

es constante, esto es,

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0. \tag{4}$$

La demostración de este lema es inmediata al sustituir $E(t)$ en la ecuación diferencial propuesta, sin embargo esta demostración, que es la habitual en los cursos de ecuaciones diferenciales, no es constructiva, es decir no evidencia el origen de la ecuación de primer orden

Fecha de Recepción: (Letra Times New Roman de 8 puntos)
Fecha de Aceptación: Dejar en blanco

$$\frac{1}{2}(w')^2 - F(w) = C, \quad (5)$$

equivalente a la ecuación (1).

Primero se darán los algunos lineamientos generales de la teoría de Lie, sin profundizar en todos los detalles que pueden ser encontrados en la referencia [5].

2. CONTENIDO

2.1 Principio de Invariación

Si

$$f(x, y, y') = 0, \quad (6)$$

permanece invariante bajo un grupo de transformaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x, y, \alpha), \\ y_1 &= \varphi(x, y, \alpha), \\ y'_1 &= \theta(x, y, y', \alpha) = \frac{dy_1}{dx_1}, \end{aligned} \quad (7)$$

es decir,

$$f(x_1, y_1, y_1') = f(x, y, y'), \quad (8)$$

entonces existen transformaciones X, Y (Ver [1] y [5]), llamadas coordenadas canónicas, en las cuales la ecuación diferencial (1) se transforma en la EDO de variables separables:

$$\frac{dY}{dX} = g(X), \quad (9)$$

donde g(X) es una función arbitraria a ser determinada y X, Y satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \xi X_x + \eta X_y &= 0, \\ \xi Y_x + \eta Y_y &= 1, \end{aligned} \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= \left.\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = 0} \\ \eta(x, y) &= \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = 0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Se aprecia que la condición para que f sea invariante (8) es equivalente a la ecuación

$$df(x_1, y_1, y'_1) = 0, \quad (12)$$

que en términos de ξ y η toma la forma:

$$\xi f_x + \eta f_y + (\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y (y')^2) f_{y'} = 0, \quad (13)$$

la cual se denomina ecuación de invariación.

De manera similar, ver [6], [7], la invariación de una ecuación de segundo orden

$$h(x, y, y', y'') = 0, \quad (14)$$

bajo un grupo de transformaciones de la forma (7), prolongado de tal manera que transforme las segundas derivadas mediante

$$y''_1 = \vartheta(x, y, y', y'', \alpha) = \frac{dy'_1}{dx_1}, \quad (15)$$

implica la existencia de ξ y η que satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} &\xi f_x + \eta f_y + [(\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y (y')^2)] f_{y'} + \\ &[n_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \\ &\xi_{yy}(y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') y''] f_{y''} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

La ecuación (14) puede llevarse mediante las coordenadas canónicas dadas por (10) a una ecuación de la forma

$$F(X, Y', Y'') = 0, \quad (17)$$

la cual puede transformarse en una ecuación diferencial de primer orden mediante la sustitución $z = Y'$, ver [6].

2.2 Demostración del lema de la energía

En particular, para la EDO

$$w_{tt} = f(w), \quad (18)$$

puede verificarse que $\xi = 1$ y $\eta = 0$ satisfacen la ecuación de invariación (16) asociada a (18). Como consecuencia, al resolver el sistema (10) se obtienen coordenadas canónicas

$$X = w, \quad Y = t. \quad (19)$$

De [8] se obtiene

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{w_t} \quad (20)$$

y,

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{dX^2} &= \frac{1}{w_t^{\,2}} w_{tt} \frac{dt}{dw}, \\ &= -\frac{w_{tt}}{w_t^{\,3}}, \\ &= -\left(\frac{dY}{dX}\right)^3 f(X), \end{aligned} \quad (21)$$

tomando $v = \dfrac{dY}{dX}$, se tiene la ecuación reducida,

$$\frac{dv}{dX} = -v^3 f(X). \qquad (22)$$

Separando variables e integrando,

$$v = \left(2\int f(X)dX + c_1\right)^{-1/2}. \qquad (23)$$

En términos de las variables originales

$$t + c_2 = \int\left(2\int f(w)dw + c_1\right)^{-1/2} dw. \qquad (24)$$

De la ecuación (23) se tiene que:

$$\left(w_t\right)^2 = 2\int f(w)dw + c_1, \qquad (25)$$

para simplificar la notación, sea

$$w' = w_t,$$
$$F(w) = \int f(w)dw, \qquad (26)$$

es decir:

$$\left(w'\right)^2 = 2F(w) + c, \qquad (27)$$

$$\frac{1}{2}\left(w'\right)^2 - F(w) = C. \qquad (28)$$

Definiendo la cantidad:

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(w'\right)^2 - F(w), \qquad (29)$$

se sigue que

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0. \qquad (30)$$

Lo cual demuestra el lema de la integral de la energía.

2.3 Casos Particulares

2.3.1 Caída libre

Si consideramos la caída libre de un cuerpo de masa m, en cercanías de la superficie terrestre, la ecuación diferencial que modela el fenómeno es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \qquad (31)$$

Aplicando el lema de la energía, se tiene:

$$\frac{1}{2}(y')^2 + gy = c, \qquad (32)$$

al multiplicar la ecuación (29) por m,

$$\frac{1}{2}m(y')^2 + mgy = \bar{c}, \qquad (33)$$

recordando que y' es la velocidad *v* de la partícula, se tiene

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \bar{c}. \qquad (34)$$

Ecuación que corresponde a la ley de conservación de la energía mecánica para un cuerpo en caída libre.

2.3.2 Péndulo Simple

La ecuación que modela el movimiento de un péndulo simple de longitud *l*, en un medio de gravedad *g* es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}sen(\theta). \qquad (35)$$

Al aplicar el lema de la integral de la energía se tiene

$$\frac{1}{2}(\theta')^2 + \frac{g}{l}\cos(\theta) = c. \qquad (36)$$

Ecuación que puede explicitarse para θ' y resolverse en forma numérica si se desea, dadas algunas condiciones iniciales.

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La teoría de los grupos de Lie asociada a las ecuaciones diferenciales muestra ser una herramienta importante para abordar desde una perspectiva diferente algunos resultados de la física o de la matemática, como en este caso el lema de la energía, que generalmente se enuncia pero no se demuestra. Algunos docentes de ecuaciones diferenciales plantean la demostración del lema a partir de un cambio de coordenadas como el utilizado en la ecuación (16) lo cual es perfectamente válido, pero no debe olvidarse que dichas coordenadas pueden encontrarse en forma constructiva mediante la teoría expuesta en este artículo.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] H. H. Ortiz, A. E. Posso. “Solución de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante el método de los Grupos de Lie”. *Scientia et técnica*. Universidad Tecnológica de Pereira. Año XIII, No. 34. pp 467-471, Mayo 2007

[2] H. H. Ortiz, F. N. Jiménez. “Una experiencia pedagógica en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales exactas y los factores integrantes”. *Scientia et técnica*. Universidad Tecnológica de Pereira. Año XIII, No. 37. pp 497-501, Diciembre 2007.

[3] D.G. Zill. “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado”, Editorial Thomson, octava edición, México, 2006.

[4] R. K. Nagle. E. B. Saff, A. D. Zinder, “Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera”. Cuarta Edición. Editorial Pearson Educación, México, 2005.

[5] P. J. Olver, “Application of Lie Groups to Differential Equations”, Second Edition, Springer Verlag, New York, 1993.
[6] E. George, “Solution of Ordinary Differential Equations by Continuous Groups”, Chapman and Hall/Crc , United States, 2001.
[7] G. Bluman and S. Kumel, “Symmetries and Differential Equations”, Second Edition, Springer Verlag, New York, 1989.
[8] H. H. Ortiz, “Solución de Ecuaciones Diferenciales mediante el método de los grupos de Lie”. Tesis de Maestría. Universidad Tecnológica de Pereira, 2007.