

## CONTROL DE UN SISTEMA ARCO – ESFERA MEDIANTE SISTEMAS DIFUSOS

### Cart and ball control with fuzzy systems

#### RESUMEN

Los sistemas difusos son ampliamente usados como metodología para control de sistemas con fuertes no linealidades, difíciles de modelar o con varios puntos de operación. El sistema *cart and ball* que se pretende controlar consiste en un carro sobre el cual se ubica un arco con radio de curvatura conocido y sobre el cual se pone una bola a un ángulo inicial. Algoritmos como planificación clásica de la ganancia, control difuso basado en reglas y control híbrido tipo Takagi-Sugeno, aquí presentados, balancean la bola sobre el arco hasta llevarla a una posición de equilibrio donde permanece independientemente de perturbaciones externas.

**PALABRAS CLAVES:** Controladores difusos, planificación de la ganancia, sistemas no lineales.

#### ABSTRACT

*Fuzzy systems are widely used for controlling systems that has high nonlinearities or many operating points. The cart and ball system consist of a car with an arc. The parameters of the system are given and the ball has an initial position and is over the arc. Control algorithms, such as gain scheduling, fuzzy with rules and hybrid control with Takagi-Sugeno, swing up the ball over the arc until a stable position. The control objective is to balance the ball on the top of the arc and at the same time place the car in a desired position no matter the external noise.*

**KEYWORDS:** *Fuzzy Controllers, Gain Scheduling, Nonlinear Systems.*

#### ALFONSO ALZATE GÓMEZ

Ingeniero Electricista, M. Sc.  
Profesor Titular  
Universidad Tecnológica de Pereira  
alalzate@utp.edu.co

#### ANDRÉS ESCOBAR MEJÍA

Ingeniero Electricista, M. Sc.  
Profesor Auxiliar  
Universidad Tecnológica de Pereira  
andreses1@utp.edu.co

#### MAURICIO HOLGUÍN LONDOÑO.

Ingeniero Electricista.  
Profesor Catedrático  
Estudiante Maestría en Ingeniería Eléctrica.  
Universidad Tecnológica de Pereira  
ma\_hol@ohm.utp.edu.co

#### GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN ELECTRÓNICA DE POTENCIA

### 1. INTRODUCCIÓN

La lógica difusa es un estimador universal que puede emplearse para aproximar y controlar cualquier sistema o función no lineal siempre y cuando se cuenten con una cantidad adecuada de reglas difusas que describan su comportamiento [1]. El conocimiento o inferencia de estas reglas parte del conocimiento o descripción lingüística de la planta [2].

El sistema arco esfera o *cart ball* es altamente no lineal, multivariable y difícil de controlar mediante la implementación de una sola técnica de control clásica [3], es por tal razón que se requiere la combinación de varias estrategias de control que permitan manejar esas no linealidades.

Con el fin de controlar el sistema y llevarlo a su punto de operación, se emplean algunos métodos convencionales, inteligentes o híbridos con el fin de establecer la conveniencia de cada uno de ellos para el control del sistema y determinar las ventajas de aplicación claramente competitivas en contraste con las otras metodologías. Las estrategias seleccionadas para este trabajo permiten verificar diferentes formas de

implementación con el fin de indagar sobre resultados que puedan ser claramente diferenciables, estas metodologías son: control clásico por planificación de la ganancia, control difuso basado en reglas y control híbrido de los dos anteriores con base en modelo tipo Takagi-Sugeno [4] – [7], [9].

### 2. REPRESENTACIÓN DEL SISTEMA

La figura 1 muestra una representación física del sistema arco esfera cuyo modelado se obtiene mediante linealización por jacobianos [3].

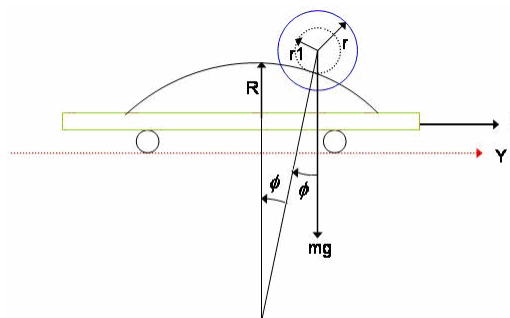


Figura 1. Representación del sistema arco – esfera a controlar.

Los parámetros que son conocidos de la planta se presentan en la tabla 1.

Variable	Símbolo	Valor y/o unidad
Radio del arco	$R$	0.02 [m]
Peso del vehículo	$M$	0.5 [kg]
Posición del carro	$y$	[m]
Fuerza aplicada	$F$	[N]
Radio interno de la bola	$r_1$	0.0275 [m]
Radio externo de la bola	$r$	0.025 [m]
Ángulo de rotación	$\psi$	[rad]
Ángulo entre el radio del arco y el centroide de la bola	$\phi$	0.22[rad] máx
Peso de la bola	$m$	0.05 [kg]
Momento de inercia de la bola con respecto a su centroide	$I$	0.000204 [kgm <sup>2</sup> ]
Fuerza de reacción vertical de la bola	$v$	[N]
Fuerza de reacción horizontal	$H$	[N]
gravedad	$g$	9.8 [m/s <sup>2</sup> ]

Tabla 1. Parámetros de la planta.

El modelo matemático del sistema se obtiene haciendo un análisis de las fuerzas horizontales y verticales actuantes sobre la bola y sobre el carro, siendo sus ecuaciones respectivamente:

$$m \frac{d^2}{dt^2} [y + (R + r) \sin \phi] = H \quad 1$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} [(R + r) \cos \phi] = V - mg$$

Las ecuaciones del movimiento rotacional de la bola y del movimiento horizontal de carro son:

$$I \ddot{\psi} = r(V \sin \phi - H \cos \phi) \quad 2$$

$$M \ddot{y} = F - H$$

Haciendo un análisis sobre la planta se logra establecer que la relación entre el ángulo de rotación y la posición vertical esta dada por:  $\psi = \frac{R+r}{r} \phi$ .

Dado que se toma el origen como punto estable y como punto de operación del sistema, se pueden linealizar las ecuaciones 1 y 2 alrededor de este punto.

Sin embargo para obtener un modelo linealizado generalizado se emplea las ecuaciones por jacobianos del sistema y se hace una descripción matemática del modelo por regiones. Esta metodología es analizada en cada uno de los controladores presentados [8].

### 3. ESTRUCTURA DE LOS CONTROLADORES

#### 3.1 Control clásico por planificación de la ganancia

Se determinan diferentes regiones en el sistema que permitan claramente separar las acciones de control dependiendo de una o varias variables de planificación (variables que determinan la dinámica del sistema). Para este caso el ángulo y la velocidad de la bola se toman como dichas variables de planificación. Se definen por lo tanto tres regiones de interés en las cuales se desea implementar un controlador independiente.

Región 1: Para ángulos que son menores a  $\pi/18$  rad y sin aceleración.

Región 2: Para ángulos que son mayores a  $\pi/18$  rad y con aceleración menor a  $2m/s^2$ .

Región 3: Para ángulos que poseen aceleración mayor a  $2m/s^2$ .

Se emplea la técnica LQR para calcular las constantes de realimentación para cada una de las regiones y se procede a diseñar un planificador que realice el control de conmutación entre ellas. Para el caso presentado este planificador no es más que una serie de sentencias IF anidadas las cuales van descartando la posibilidad de tener las variables de planificación dentro de algunas de las regiones descritas para activar los valores correspondientes a la región actual de operación. Este permite optimizar el sistema y reducir el esfuerzo computacional.

#### 3.2 Control por modelo difuso basado en reglas

El ajuste del controlador difuso está ligado directamente a las características de comportamiento del sistema tales como el sobrepaso, tiempo de subida, tiempo de establecimiento, etc. A partir de estos datos se puede inferir las acciones de control a realizar para lograr el valor de la referencia.

De la observación detallada de la dinámica del sistema se construye la base de reglas la cual resume las acciones de tipo lingüístico que se deben realizar sobre él. En las

figuras 2 y 3 se puede observar la dinámica de un sistema representada mediante la respuesta al escalón y el diagrama del plano de fase respectivamente.

Analizando las figuras 2 y 3 se puede construir la base de reglas que contiene las acciones de tipo lingüístico que se deben realizar sobre el modelo [4], [9]. La tabla 2 muestra estas reglas.

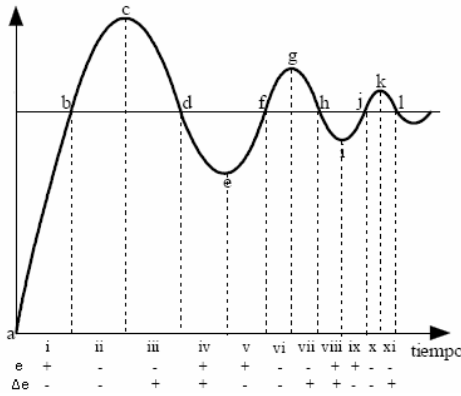


Figura 2. Respuesta de un sistema al escalón.

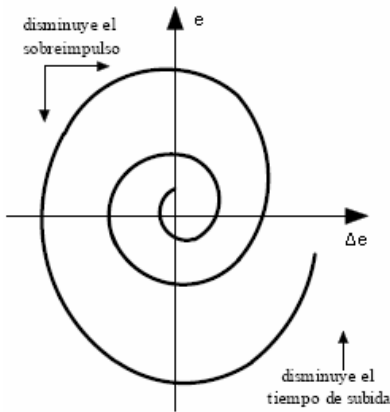


Figura 3. Dinámica de un sistema en el plano de fase.

e Δe	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PL	NL	NM	NM	NS	ZE	ZE	ZE
PM	NL	NM	NM	NS	ZE	ZE	ZE
PS	NL	NS	NS	ZE	ZE	ZE	PS
ZE	NM	NS	NS	ZE	PS	PS	PM
NS	NS	ZE	ZE	ZE	PS	PS	PL
NM	ZE	ZE	ZE	PS	PM	PM	PL
NL	ZE	ZE	ZE	PS	PM	PM	PL

Tabla 2. Base de reglas que actúan sobre el modelo.

La implementación de las funciones de pertenencia se realiza mediante funciones triangulares y para la evaluación de las reglas que se activan se ha optado por encontrar las metareglas, lo cual consiste en considerar en que solo se activan dos funciones de pertenencia por variable de entrada para el caso de funciones triangulares con un traslape del 50%, por lo cual solo se tendrá que evaluar 4 reglas de un total de 49 disponibles en una base como la mostrada en la Tabla 2.

Para la planta de estudio se realizó un sistema de control difuso tipo PD implementando el conectivo producto algebraico y concreción por promedio de centros. El respectivo diagrama de bloques en Simulink para este modelo se muestra en la figura 4.

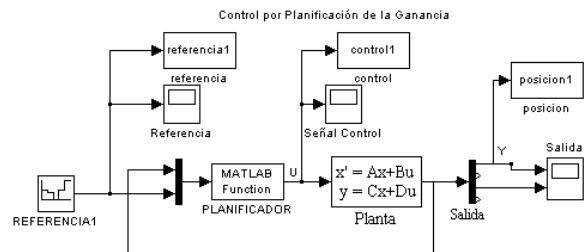


Figura 4. Modelo Simulink controlador difuso PD

### 3.3 Control por planificación de la ganancia tipo T-S

Este sistema usa reglas de tipo IF-THEN para representar todas las relaciones de entrada salida para el sistema. Bajo este modelo, el sistema difuso tiene la siguiente forma para la i-ésima regla.

IF  $X_1(k)$  es  $M_{i1} \dots$  AND  $X_n(k)$  es  $M_{in}$   
 THEN  $X(k+1) = A_i \cdot X(k) + B_i \cdot U(k)$

De donde  $X$  es el vector que contiene las  $n$  componentes de las variables de estado y  $U$  el vector que contiene las acciones de control.

A la anterior regla se le asigna la interpretación de que cuando  $X$  está restringido al intervalo dado por el antecedente de la regla, la salida será una función lineal de las variables de entrada y por lo que todo el sistema se puede visualizar como una función linealizada por tramos, donde el cambio entre reglas se realiza de forma suave en vez de abrupta como ocurre en un controlador totalmente difuso. La acción de control a la salida será entonces la implementación del centro de gravedad para el conjunto de reglas activas a la salida.

La primera variable de planificación seleccionada es el ángulo de la bola y la segunda variable es la velocidad de la bola. Dado que el sistema *cart-ball* está diseñado para acciones de control sobre ángulos pequeños de la bola, se

ha optado por diseñar un intervalo de mapeo con únicamente dos funciones de pertenencia.

Las reglas resultantes son cuatro, producto de cruzar las dos funciones de pertenencia de cada una de las dos variables de planificación. Además es muy importante señalar y aclarar que para cada una de las reglas se ha definido un modelo lineal, el cual representa claramente la acción de control para el punto de estudio. Para cada caso se puede deducir en forma lingüística cada una de las reglas así:

- 1- IF ángulo y velocidad de la bola cerca de 0, THEN señal de control para modelo linealizado alrededor de cero.
- 2- IF ángulo cerca de 30° y velocidad cerca de 0, THEN señal de control para modelo linealizado alrededor de 30° y velocidad cero.
- 3- IF ángulo cerca de 0° y velocidad cerca de 2, THEN señal de control para modelo linealizado alrededor de 0° y velocidad de 2.
- 4- IF ángulo cerca de 30° y velocidad cerca de 2, THEN señal de control para modelo linealizado alrededor de 30° y velocidad de 2.

La implementación de cada uno de estos cuatro modelos se realiza mediante linealización jacobiana, la cual, de forma general se muestra a continuación en el script realizado en Matlab.

```
clear all;clc;close all;
%Parámetros, Cálculo de Constantes
R = 0.02;      % Radio del arco [m]
M = 0.5;      % Peso del vehiculo [kg]
r = 0.025;    % Radio exterior de la bola [m]
m = 0.05;    % Peso de la bola [kg]
I = 0.000204; % Momento de inercia de la bola [kg-m^2]
g = 9.81;    % Gravedad [m/s^2]

% Variables
% x1 x2 x3 x4 : Variables de Estado (x)
% X1 X2 X3 X4 : Variables punto (x^.)
% F : Entrada (u)

syms x1 x2 x3 x4 X1 X2 X3 X4 F

% Modelo No Lineal General
E1 = -m*(R+r)*X4*cos(x3) + m*(R+r)*(x4^2)*sin(x3) + F -
(M+m)*X2;
E2 = I*((R+r)/r)*X2 + m*r*(R+r)*X4*(sin(x3)^2) -
m*r*(R+r)*(x4^2)*cos(x3)*sin(x3)...
- m*g*r*sin(x3) - M*r*X2*cos(x3) + F*r*cos(x3);

% Se despeja algebraicamente X2 = f(x,u) y X4 = f(x,u)
S = solve(E1 , E2 , X2 , X4);

% Modelo de espacio de Estado NO-LINEAL
X1 = x2;
X2 = simplify(S.X2);
X3 = x4;
X4 = simplify(S.X4);
% Arreglo X_punto = F(X,U)
```

```
FXU = [ X1 ; X2 ; X3 ; X4];
```

```
% Ecuación de salida Y = G(X,U)
```

```
YGU = [ x1 ; x3 ];
```

```
% Linealización General por Jacobianos
```

```
A = jacobian( FXU , [x1,x2,x3,x4] );
```

```
B = jacobian( FXU , F );
```

```
C = jacobian( YGU , [x1,x2,x3,x4] );
```

```
D = jacobian( YGU , F );
```

```
% Evaluación alrededor de puntos de operación
```

```
x1 = 0; x2 = 0; x3 = 0; x4 = 0; F = 0;
```

```
A1 = double( vpa( eval(A) ) );
```

```
B1 = double( vpa( eval(B) ) );
```

```
C1 = double( vpa( eval(C) ) );
```

```
D1 = double( vpa( eval(D) ) );
```

```
x1 = 0; x2 = 0; x3 = 30*pi/180; x4 = 0; F = 0;
```

```
A2 = double( vpa( eval(A) ) );
```

```
B2 = double( vpa( eval(B) ) );
```

```
C2 = double( vpa( eval(C) ) );
```

```
D2 = double( vpa( eval(D) ) );
```

```
x1 = 0; x2 = 0; x3 = 0; x4 = 2; F = 0;
```

```
A3 = double( vpa( eval(A) ) );
```

```
B3 = double( vpa( eval(B) ) );
```

```
C3 = double( vpa( eval(C) ) );
```

```
D3 = double( vpa( eval(D) ) );
```

```
x1 = 0; x2 = 0; x3 = 30*pi/180; x4 = 2; F = 0;
```

```
A4 = double( vpa( eval(A) ) );
```

```
B4 = double( vpa( eval(B) ) );
```

```
C4 = double( vpa( eval(C) ) );
```

```
D4 = double( vpa( eval(D) ) );
```

#### 4 ANÁLISIS COMPARATIVO

Para cada uno de los controladores presentados, el clásico, el inteligente y el híbrido, la señal de referencia del sistema es la posición del carro y se ha hecho que el sistema pase por las regiones de interés.

La señal de referencia se muestra en la figura 5, en donde se muestra el desplazamiento del carro en metros contra el tiempo al cual ocurre el cambio.

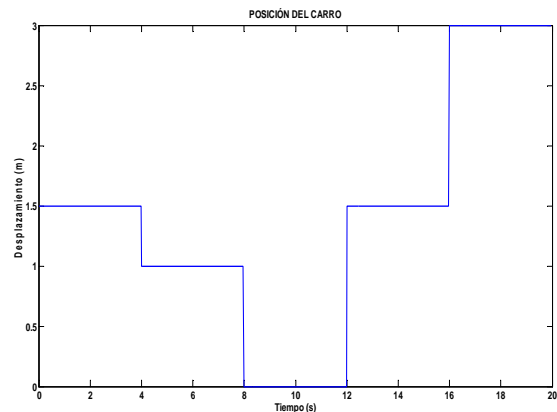


Figura 5. Señal de referencia.

La señal de control o la entrada a la planta es el torque requerido para hacer que el carro logre ubicar la bola en el origen o en la posición estable. Con el modelamiento presentado, 1 voltio a la entrada del motor representa  $1 N \cdot m$  que es aplicado al sistema. Además de eso se ubicó un saturador el cual hace que el voltaje de entrada al motor este entre  $\pm 10$  voltios.

Teniendo en cuenta esto se analiza el desempeño de cada uno de los controladores dadas las variaciones en la referencia, este comportamiento se muestra en la figura 6, en donde en color negro se grafica la referencia, en color rojo la respuesta del controlador clásico, en verde el controlador difuso basado en reglas y en azul la respuesta del controlador de planificación de la ganancia tipo T-S, o tipo híbrido.

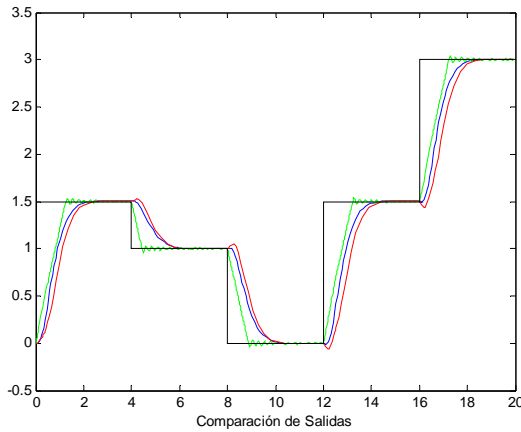


Figura 6. Respuesta de los controladores a la referencia.

De las respuestas obtenidas se puede observar como el controlador clásico tiene el mayor tiempo de subida de los tres pero presenta un leve sobrepaso. El controlador difuso tiene el menor tiempo de subida de todos, lo cual lo hace el más rápido en respuesta, aunque presenta leves oscilaciones y sobrepaso. El controlador híbrido presenta una respuesta intermedia en cuanto a tiempo de subida y sin sobrepaso.

Además de los anteriores resultados, es importante observar el comportamiento de la señal de control en los tres casos.

Las figuras 7, 8 y 9 muestran las respectivas señales de control para cada uno de los tres casos implementados. En ellas se detallan los valores en voltios que toma la señal de control para cada variación en la referencia.

De las señales de control mostradas, se puede observar como para el modelo híbrido se presenta el menor esfuerzo para todos los modelos, además la señal de control del modelo difuso basado en reglas presenta muchas oscilaciones debido principalmente a la presencia

del saturador, sin el cual el esfuerzo en la señal de control sería muy elevado.

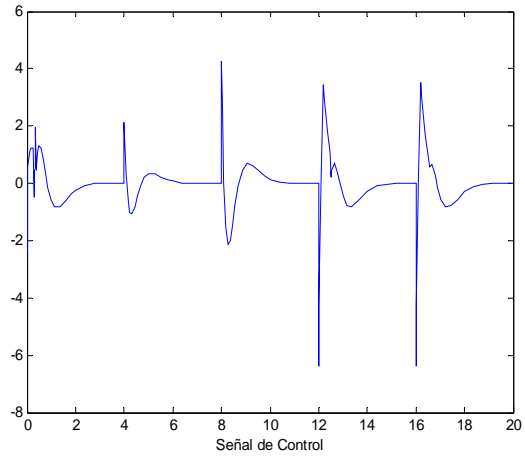


Figura 7. Señal de control modelo clásico.

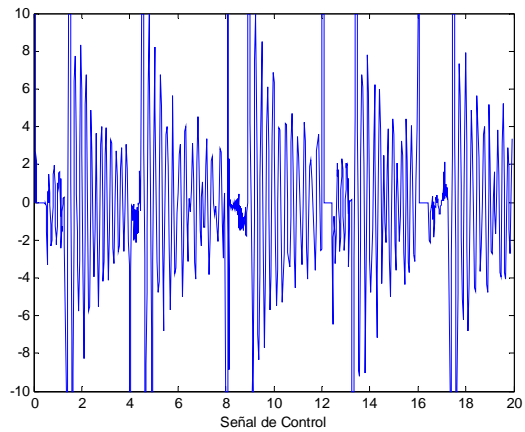


Figura 8. Señal de control modelo difuso basado en reglas.

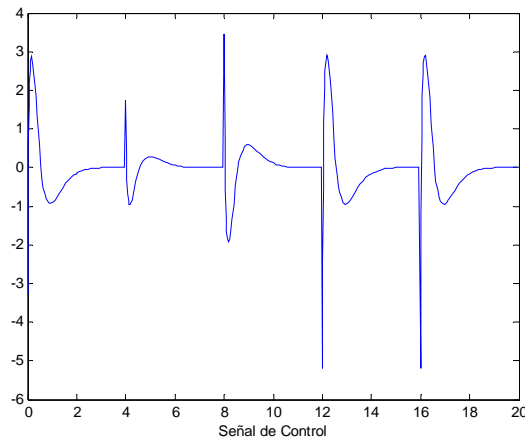


Figura 9. Señal de control modelo híbrido

## 5. CONCLUSIONES

El controlador difuso tiene el menor tiempo de subida aunque presenta oscilaciones después de alcanzada la referencia, debido fundamentalmente a la naturaleza de control basada en reglas. Además se observa como la señal de control no se estabiliza de forma rápida debido a la limitación del saturador. Este es el controlador que presenta el mayor sobrepaso, el cual puede ser compensado, pero en contra del tiempo de subida e incrementando las oscilaciones.

El controlador clásico o de planificación de la ganancia presenta una respuesta mucho más lenta a la señal de referencia, mostrando sobrepaso, pero con poco esfuerzo en cuanto a la acción de control.

El controlador híbrido presenta una respuesta intermedia en cuanto al tiempo de subida en comparación con los dos modelos anteriores. Tiene como ventajas de que no tiene sobrepaso y su acción de control representa el menor esfuerzo entre los tres controladores.

Ahora bien, cada controlador logra ubicar el carro en la posición deseada manteniendo siempre en la posición estable la bola.

En la figura 10 se muestra que a pesar del cambio de referencia, el sistema es controlable.

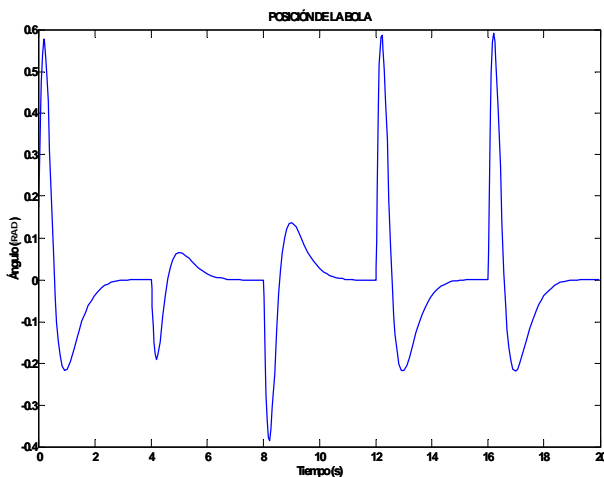


Figura 10. Ángulo de la bola

En general, el modelo difuso muestra ser mejor para controlar de forma eficiente y rápida el sistema *cart-ball*, aunque claramente exige fuertes acciones de control, lo cual limita su implementación de acuerdo con los equipos físicos disponibles. El modelo clásico, con una respuesta en tiempo de subida lenta pero con baja acción de control sería ideal en situaciones donde no se requiera de respuestas rápidas, aunque su sintonización siempre es dispendiosa debido a la naturaleza heurística de la misma.

El modelo híbrido, en este caso, es la opción más recomendada, al mostrar el menor esfuerzo en la señal de control y posibilitando su implementación con equipos menos complejos. Además su respuesta en tiempo de subida y sin sobrepaso lo hace más útil en comparación con los otros tres modelos implementados.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. A. Villaseñor "Modelado difuso neuronal con algoritmo de aprendizaje estable" Ms.C. dissertation, Dept. Control Automático, Inst. Politécnico Nacional. Mexico, 2003.
- [2] D.I. Brubaker, "Fuzzy logic basics: intuitive rules replace complex math", Engineering design news, June 18 1992, pp. 111-116.
- [3] E. Laukonen, S. Yurkovich, "A ball and beam testbed for fuzzy identification and control design", Proc. 1993 IEEE American controls conf., vol 1, pp. 665-669.
- [4] C.J. Harris and C.G. Moore, "Phase Plane Analysis Tools for a Class of Fuzzy Control Systems", in the International Conference on Fuzzy Systems, EEUU, 1992, pp. 511-518.
- [5] L. X. Wang, "A course in fuzzy systems and control", Prentice Hall, 1997.
- [6] K. M., Passino, S., Yurkovich, "Fuzzy control", Addison and Wesley Longman Inc, EEUU, 1998.
- [7] J. Jantzen, "Design of fuzzy controllers", Technical University of Denmark, department of automation, lyngby Denmark, technical report no 98-E 864, 1998.
- [8] J. Jantzen, "Fuzzy supervisory control", Technical University of Denmark, department of automation, lyngby Denmark, technical report no 98-H 875, 1998.
- [9] A. Alzate, "Control Difuso", Maestría en Ingeniería Eléctrica. Universidad Tecnológica de Pereira, 1998.