UNA EXPERIENCIA PEDAGOGICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y LOS FACTORES INTEGRANTES.

A Pedagogic Experience about Teaching Exact Differential Equations and Integrating Factors

RESUMEN
En este artículo se presenta una experiencia pedagógica alrededor del tema de las ecuaciones diferenciales exactas y no exactas con factor integrante, llamando la atención sobre procesos de solución que normalmente no se exploran y que podrían enriquecer la apropiación de conceptos en este tema en ocasiones problemático para los estudiantes de cursos regulares de ecuaciones diferenciales ordinarias.

PALABRAS CLAVES: Ecuaciones diferenciales, ecuaciones exactas, factores integrantes, invariación de funciones.

ABSTRACT
In this paper a pedagogic experience is presented about exact differential equations and integrating factors, calling the attention on solution processes that are not often explored and that could enrich the appropriation of concepts in this topic, some times problematic for students in the regular curses of ordinary differential equations.

KEYWORDS: *Differential equations, exact equations, integrating factors invariant functions.*

HUGO HERNAN ORTIZ A.
M. Sc. Enseñanza de la Matemática
Profesor
Universidad Autónoma Manizales
Grupo de Investigación en Física y Matemática
hugoral68@autonoma.edu.co

FRANCY NELLY JIMENEZ G.
M. Sc. Física
Profesor
Universidad Autónoma Manizales
Grupo de Investigación en Física y Matemática
francy@autonoma.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

En los cursos regulares de ecuaciones diferenciales ordinarias, es común encontrar dificultades en la apropiación de ciertos conceptos. Ante la ausencia de fórmulas mágicas para la orientación de cursos perfectos, buenas son las experiencias que como docentes adquirimos a lo largo de los años, dichas experiencias apuntan hacia una mejor asimilación y aplicación de los conceptos, haciéndolos duraderos y significativos.

En el caso particular del tema de las ecuaciones diferenciales exactas y no exactas con factor integrante, las razones pueden ser variadas, por ejemplo:

1. La forma como se enseñan las ecuaciones diferenciales ordinarias en lo conceptual y en lo metodológico, no permite al estudiante vislumbrar una teoría coherente que pueda agrupar en torno a elementos comunes, la gran mayoría de ecuaciones diferenciales estudiadas, lineales, exactas, homogéneas, etc. Lo anterior hace que el estudiante tenga que dividir su atención en técnicas diversas que se orientan en muy poco tiempo.
2. Otro factor a tener en cuenta es la naturaleza abstracta de las deducciones que se manejan y los pre-saberes, que exigen del estudiante un nivel de pensamiento que quizás no ha alcanzado.

En este artículo se muestra la forma en que se abordó el método de solución de las ecuaciones diferenciales exactas en un grupo de estudiantes de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Manizales con el objetivo de brindarle la posibilidad de manipular este mismo objeto desde diferentes perspectivas, posibilitando así un aprendizaje más significativo.

En este mismo escrito se brinda al docente lector un acercamiento al método del factor integrante de Lie [1], el cual puede servir como elemento unificador en el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden, y como primer paso en el estudio del método de las simetrías en la solución de EDO's y EDP's [2,3]. Aunque la teoría de Lie debe profundizarse en otros cursos muy específicos, si es posible desde un nivel básico hacer saber al estudiante que las ecuaciones lineales, homogéneas, de Bernoulli, entre muchas otras, pueden ser resueltas si cumplen con el criterio de invariación que se definirá más adelante

2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EXACTAS

En el contexto de un curso regular de Ecuaciones diferenciales ordinarias se definen las ecuaciones diferenciales exactas como aquellas de la forma:

Fecha de Recepción: 07 Septiembre de 2007
Fecha de Aceptación: 08 Noviembre de 2007

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

para las cuales se cumple que: $M_y = N_x$, Donde M, N, Mx, My son funciones continuas definidas en una región simplemente conexa.

Lo anterior implica que el miembro derecho de la ecuación (1) corresponde a la diferencial total de una función $z = f(x,y)$, es decir: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$ (2)

Al comparar (1) y (2) se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \tag{3.2}$$

2.1 Método Clásico de Solución

El método que se emplea usualmente parte de las ecuaciones (3.1 y 3.2), así:

Integrando (3.1) parcialmente respecto a x se tiene:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y). \tag{4}$$

Donde $g(y)$ es una función arbitraria a ser determinada.

Ahora Derivando $f(x,y)$ respecto a y e igualando el resultado a $N(x,y)$, puede obtenerse $g(y)$ a través de los siguiendo pasos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{d}{dy}g(y) = N(x,y), \tag{5}$$

$$g(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy. \tag{6}$$

Reemplazando $g(y)$ en (4) y teniendo en cuenta que $df = 0$, la solución estará dada en forma implícita por $f(x,y) = c$, esto es:

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy = c \tag{7}$$

Este procedimiento es ventajoso ya que permite abordar la solución en forma constructiva. Los ejercicios que normalmente se proponen para afianzar este tema van encaminados hacia la memorización del algoritmo, lo cual muchas veces impide por lo rígido del proceso manipular los conceptos involucrados desde diferentes perspectivas,
Debido a lo anterior no es difícil encontrar que aunque algunos estudiantes llegan efectivamente a la solución no han alcanzado las competencias argumentativas para sustentar elementos claves del procedimiento como por ejemplo: porque $f(x,y)$ es constante, y no se atrevan a elegir caminos alternativos aunque obvios como empezar integrando (3.2) parcialmente respecto a y.

2.2 Método Alternativo de Solución

Si se integra parcialmente (3.1) respecto a x y (3.2) respecto a y se tiene:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y). \tag{8}$$

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x). \tag{9}$$

La ecuación (8) puede escribirse en la forma:

$$f(x,y) = s(x,y) + m_1(x) + m_2(y), \tag{10}$$

donde:
$m_2(y)$ es una función arbitraria que contiene a $g(y)$ y cualquier otro sumando proveniente de la integración que contenga solo a la variable y.

De igual forma la ecuación (9) puede escribirse como:

$$f(x,y) = p(x,y) + n_2(y) + n_1(x) + c_1, \tag{11}$$

donde:
c_1 es una constante conocida y $n_1(x)$ es una función arbitraria que contiene a $h(x)$ y cualquier otro sumando proveniente de la integración que contenga solo a la variable x.

Al igualar (10) y (11) se tiene que:

$$s(x,y) = p(x,y) + c_1. \tag{12}$$

Es decir $s(x,y)$ y $p(x,y)$ se diferencian a lo sumo en una constante c_1.
En este punto es bueno que el estudiante justifique el porque en ambas integrales aparece la misma función $s(x,y)$.

Además

$$m_1(x) = n_1(x),$$
$$m_2(y) = n_2(y). \tag{13}$$

Con (12) y (13) se determina a $f(x,y)$:

$$f(x,y) = s(x,y) + n_2(y) + m_1(x), \tag{14}$$

y por lo tanto a la familia de soluciones $f(x,y) = c$.

De la experiencia con el grupo se encuentra que este método se hace mas directo para el estudiante, en cuanto le posibilita comprender que la integración de las ecuaciones (3.1) y (3.2) conduce a expresiones equivalentes que al ser igualadas evidencian la solución. Además al ofrecer ambos procedimientos en forma paralela, el estudiante adquiere más herramientas para la comprensión de este tipo de ecuaciones y su solución.

Como valor agregado de este método alternativo surge un algoritmo que el estudiante puede usar para verificar sus resultados, así:

Si se parte de una ecuación exacta de la forma (1)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

A partir de ella puede construirse la expresión:

$$\int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy = c. \qquad (15)$$

Que conduce luego de integrar parcialmente respecto a cada variable respectiva y sin tener en cuenta las funciones arbitrarias, a la expresión:

$$s(x,y) + m_1(x) + p(x,y) + n_2(y) = c, \qquad (16)$$

que como se observa contiene a la función $s(x,y)$ repetida en la forma $p(x,y)+c_1$. De la expresión anterior se puede construir la solución:

$$s(x,y) + m_1(x) + n_2(y) = c \qquad (17)$$

Este último acercamiento es el más eficiente en términos de tiempo para llegar a la solución y fue el más preferido por los estudiantes. Sin embargo, puesto que no es fácil inferir desde el procedimiento la argumentación para la validación del mismo, se les exigió obtener la solución mediante el empleo de uno de los dos procedimientos anteriores, utilizando el último algoritmo solo para verificar sus resultados.

3. FACTORES INTEGRANTES

3.1 Factores Integrantes Especiales

En la mayoría de textos de ecuaciones diferenciales, la búsqueda de factores integrantes se limita a aquellos que dependen de una sola variable así, si una ecuación de la forma (1) es no exacta, entonces existe un factor integrante

$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ Si el integrando solo depende de x, ó

$\mu(y) = e^{-\int \frac{M_y - N_x}{M} dy}$ Si el integrando solo depende de y.

En algunos casos particulares se plantean formas específicas del factor integrante por ejemplo Nagle [4] plantea:

Si $H(xy) = \dfrac{N_x - M_y}{xM - yN}$ solo depende del producto xy, entonces la ecuación (1) tiene un factor integrante de la forma:

$$\mu(xy) = e^{\int H(z)dz}; \quad z = xy. \qquad (18)$$

3.2 Factores Integrantes más generales

Un aspecto menos conocido del tema anterior es la posibilidad de hallar factores integrantes desde la perspectiva de los grupos de transformaciones continuas. La idea en este punto es brindar al lector los lineamientos generales de esta teoría, sin profundizar en todos los detalles que pueden ser encontrados en las referencias citadas. Para empezar se definirán ciertos conceptos básicos.

3.2.1 Invariación de una función

Definición: Se dice que una función $f(x,y)$ es invariante bajo el conjunto de transformaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x,y,\alpha), \\ y_1 &= \varphi(x,y,\alpha), \end{aligned} \qquad (19)$$

si $f(x_1, y_1) = f(x,y)$, $\qquad (20)$

donde α toma valores en los reales y se conoce como parámetro de la transformación. Si además dotamos a este conjunto de transformaciones de la operación de composición y de las propiedades que definen un grupo [5], se obtiene un grupo de Lie a un parámetro (en donde $\alpha = 0$ debe corresponder a la transformación idéntica)

Por ejemplo cualquier función de la forma: $z = f(x^2 + y^2)$ es invariante bajo el grupo de las rotaciones en el plano:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\alpha - ysen\alpha \\ y_1 &= xsen\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \qquad (21)$$

De igual forma se dice que una ecuación diferencial de primer orden $f(x,y,y') = 0$ es invariante bajo el siguiente conjunto de transformaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x,y,\alpha), \\ y_1 &= \varphi(x,y,\alpha), \\ y'_1 &= \theta(x,y,y',\alpha) = \frac{dy_1}{dx_1}, \end{aligned} \qquad (22)$$

si y solo si $f(x_{1,}y_1,y_1')=f(x,y,y')$, lo cual implica la condición de invariación

$$df(x_1,y_1,y'_1)=0\,. \tag{23}$$

Por ejemplo puede verificarse [6] que la ecuación:

$$y'=\frac{y-xg(x^2+y^2)}{x+yg(x^2+y^2)}. \tag{24}$$

Es invariante bajo el grupo de transformaciones de las rotaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\alpha - ysen\alpha,\\ y_1 &= xsen\alpha + y\cos\alpha,\\ \frac{dy_1}{dx_1} &= \frac{d(xsen\alpha + y\cos\alpha)}{d(x\cos\alpha - ysen\alpha)}. \end{aligned} \tag{25}$$

3.2.2 Teorema del factor integrante de Lie

Suponga que la ecuación sobre un dominio simplemente conexo,

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{26}$$

Es invariante bajo un grupo uniparamétrico de la forma (22), entonces la función

$$\mu(x)=\frac{1}{\xi M+\eta N},\qquad \xi M+\eta N\neq 0, \tag{27}$$

es un factor integrante de la ecuación dada, donde

$$\begin{aligned} \xi(x,y) &= \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\Big|\alpha=0,\\ \eta(x,y) &= \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big|\alpha=0. \end{aligned} \tag{28}$$

La demostración del anterior teorema [7,8] se sigue por la equivalencia entre la condición de integrabilidad de las ecuaciones exactas y la condición de invariación (23).

3.2.3 Ejemplo

Aplicando la anterior teoría a la ecuación:

$$y'=\frac{y-x(x^2+y^2)}{x+y(x^2+y^2)}. \tag{29}$$

Se aprecia por (24) que es invariante bajo el grupo (25).

Llevándola a la forma (26) se tiene:

$$[y-x(x^2+y^2)]dx-[x+y(x^2+y^2)]dy=0. \tag{30}$$

De las ecuaciones (28):

$$\xi=-y,\quad \eta=x. \tag{31}$$

Por lo tanto un factor integrante para la ecuación (29) es:

$$\mu(x)=\frac{1}{\xi M+\eta N}=-\frac{1}{x^2+y^2}\,. \tag{32}$$

Luego, al multiplicar la ecuación (29) por el factor integrante (32) se obtiene la ecuación exacta:

$$\frac{[-y+x(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}dx+\frac{[x+y(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}dy=0 \tag{33}$$

Siguiendo los pasos del método abreviado de la sección 2.2 se tiene:

$$\int\frac{[-y+x(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}dx+\int\frac{[x+y(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}dy=C \tag{34}$$

Integrando parcialmente sin tener en cuenta las funciones arbitrarias resultantes de la integración se llega a:

$$-\arctan\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+\arctan\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}=C\,, \tag{35}$$

teniendo en cuenta que:

$$\arctan\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}\,, \tag{36}$$

Identificamos la función que se repite en las integraciones y a partir de ella construimos la solución:

$$\arctan\frac{y}{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c\,. \tag{37}$$

El anterior método requiere de la solución de la condición de invariación (23) para ξ y η, lo cual podría ser más complicado que la ecuación que se pretende abordar, sin embargo algunos autores [9] han adelantado el trabajo de resolver la ecuación de invariación para ecuaciones de diverso tipo, entre las cuales figuran la gran mayoría de ecuaciones de primer orden estudiadas a nivel de pregrado, y otras tantas para las cuales las técnicas usuales fallan. Este trabajo se encuentra sintetizado en tablas en las cuales se reportan ecuaciones diferenciales junto con los correspondientes ξ y η. Además, la existencia de software especializado [10] en el tema hace posible obviar este obstáculo meramente computacional, para centrar más los esfuerzos hacia el manejo conceptual, argumentativo y propositito del tema.

Al presentar esta teoría al grupo de estudiantes se notó una buena aceptación ya que les permitía abordar mediante una sola técnica las ecuaciones de primer orden que habían resuelto por los métodos tradicionales. Para desarrollar este tema se recurrió a una versión resumida de las tablas anteriormente citadas. En estos momentos los autores se encuentran desarrollando un software específico para la obtención de ξ y η que pueda ser usado por los estudiantes de ecuaciones diferenciales a nivel de pregrado.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En opinión de los autores las diferentes formas de abordar el tema de las ecuaciones diferenciales exactas tal y como se muestra en este artículo, contribuyeron a la construcción de conceptos más sólidos en los estudiantes, ya que las diversas representaciones que aprendieron sobre un mismo objeto (ecuaciones exactas) les brindaron la posibilidad de aplicarlo, contrastarlo y verificarlo desde diferentes contextos.

En problemas de modelado del mundo real, obtener una solución cerrada de la ecuación diferencial que representa el fenómeno (cuando esto es posible), ayuda a una mejor comprensión del mismo y da información sobre el comportamiento de las soluciones. En este sentido el método del factor integrante de Lie es valioso ya que brinda la posibilidad de obtener soluciones exactas de una gran cantidad de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Bien vale la pena estudiar la posibilidad de integrar el método del factor integrante de Lie a los cursos regulares en ecuaciones diferenciales ordinarias, involucrando por su naturaleza misma, las ayudas computacionales necesarias.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] P. J. Olver, "Application of Lie Groups to Differential Equations", Second Edition, Springer Verlag, New York, 1993.

[2] G. Bluman and S. Kumel, "Symmetries and Differential Equations", Second Edition, Springer Verlag, New York, 1989.

[3] P. Clarkson and E. Mansfield, "Symmetry Reductions and exact solutions of a class of Nonlinear Heat Equations", Department of mathematic, University of Exeter, University of Colorado. Journal of nonlinear mathematical Physics, Agosto 2002.

[4] R. K. Nagle. E. B. Saff, A. D. Zinder, "Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera", Editorial Pearson Educación, México, 2005.

[5] J. F. Caicedo, "Teoría de Grupos", Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas y estadística, Tercera Edición, Colombia, 1987.

[6] H. H. Ortiz, "Solución de Ecuaciones Diferenciales mediante el método de los grupos de Lie". Tesis de Maestría. Universidad Tecnológica de Pereira, 2007

[7] H. H. Ortiz, A. E. Posso. "Solución de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante el método de los Grupos de Lie". *Scientia et técnica*. Universidad Tecnológica de Pereira. Año XIII, No. 34. pp 467-471, Mayo 2007

[8] A. Campos, "Iniciación en el análisis de ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie", Prepublicación, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 1995.

[9] E. George, "Solution of Ordinary Differential Equations by Continuous Groups", Chapman and Hall/Crc , United States, 2001.

[10] W. Hereman, "Review of Symbolic Software for Lie Symmetrie Analysis", *Mathematical and Computer Modelling.* Vol. 25 (8/9), pp. 115-132, 1997. [Online].Available: http://www.df.uba.ar/users/jakubi/simetrias/software.html.