

CONTROL GLOBAL PARA EL PÉNDULO CON RUEDA DE REACCIÓN

Global Control for the Reaction Wheel Pendulum

RESUMEN

En el presente artículo se desarrolla e implementa un esquema de control, que usa una técnica no lineal conocida como Linealización por Realimentación y una estrategia de seguimiento de trayectoria, con el que se busca controlar de forma global el Péndulo con Rueda de Reacción. Tal esquema genera una señal de control que cancela la no linealidad de la planta y regula el error de seguimiento. Los resultados de la implementación práctica verifican la validez del planteamiento.

PALABRAS CLAVES: Error de seguimiento, linealización por realimentación, regulación, seguimiento de trayectoria.

ABSTRACT

This document shows the implementation of a nonlinear based on Feedback Linearization and a tracking scheme to control the Reaction Wheel Pendulum. The implementation is proposed in order to cancel the nonlinearity and to reduce the tracking error.

KEYWORDS: *Feedback Linearization, regulation, tracking error, trajectory tracking*

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas reales son implícitamente no lineales y con rangos de operación bastante amplios. Tales características exigen de la teoría de control técnicas sofisticadas soportadas matemáticamente, de la mano con enfoques novedosos para la generación de estrategias de control.

Una manera de enfrentar la no linealidad de los sistemas físicos es presentada por [1] donde, a partir de las derivadas LIE, se establecen leyes de control que hacen que el sistema en lazo cerrado tenga un comportamiento lineal. De esta manera se hace más sencilla la formulación de controladores.

Por otro lado, cuando es necesario hacer que un sistema se ubique en determinados valores de estado final se precisa del diseño de servo-controles. Algunas veces los sistemas necesitan caminar por estados que garanticen alcanzar el objetivo final y tal tarea se denomina seguimiento de trayectoria. En [2] y [3] se plantea la manera de efectuar el seguimiento de trayectorias a través de la regulación del error.

Este artículo analiza la manera de llevar un sistema no lineal a uno lineal equivalente mediante la linealización por realimentación, para luego aplicar el esquema de seguimiento de trayectoria propuesto en [2]. Tal linealización hace que la obtención de una ley de control sea más sencilla.

Fecha de Recepción: 30 Mayo de 2007
Fecha de Aceptación: 11 Julio de 2007

DIDIER GIRALDO BUITRAGO

M.Sc Stevens Tech. USA

Profesor Titular

Universidad Tecnológica de Pereira

dgiraldo@utp.edu.co

VÍCTOR DANIEL CORREA R.

Ingeniero Electricista

Profesor catedrático

Universidad Tecnológica de Pereira

victordc@ohm.utp.edu.co

ALEXANDER MOLINA C.

Ingeniero Electricista, M.Sc.

Profesor Auxiliar

Universidad Tecnológica de Pereira

almo@utp.edu.co

El nuevo esquema desarrollado se implementó en el péndulo con rueda de reacción, para su control de manera global, donde los resultados fueron satisfactorios. Este trabajo da una solución al problema de seguimiento de trayectoria, como complemento a los resultados presentados en [4], donde se logra solo la regulación de las variables de interés. La articulación de estos esquemas de control forma parte de la investigación en control mediante técnicas inteligentes desarrollada en el laboratorio de control de la Universidad Tecnológica de Pereira usando el *kit* del péndulo de reacción de Mechatronic Systems, Inc. .

En la sección 2 se presentan las técnicas a emplear para generar las señales de control. En la sección 3 se muestra el modelo del sistema, la manera como se genera la trayectoria y la implementación final del esquema de control desarrollado. Finalmente se plantean conclusiones.

2. LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN Y SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

Cuando en el control de un sistema no lineal se requieren grandes rangos de operación, una buena alternativa es emplear la linealización por realimentación, que cancela la no linealidad de la planta (en lazo cerrado se obtiene un sistema lineal). Esta linealización permite una segunda tarea que consiste en: incluir un regulador lineal que

mantenga los estados de la planta en un punto de operación deseado o seguir una trayectoria establecida previamente.

2.1 Linealización por realimentación y las derivadas LIE

Para un sistema no lineal afín [4] puede plantearse un modelo de estados dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (1)$$

siendo $x \in \mathcal{R}^n$ el vector de estados (para un sistema de orden n), $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ funciones vectoriales suaves en \mathcal{R}^n (vectores columna); $h(\cdot)$ es la función escalar de salida y u es la entrada de control, también escalar. Esta última se define en términos de los estados del sistema y debe permitir el adecuado seguimiento de una trayectoria que ha de conducir al sistema hacia un punto de equilibrio predefinido.

Para la linealización por realimentación, se toman las derivadas sucesivas con respecto al tiempo, de la salida del sistema presentado en (1), hasta obtener una relación directa con la entrada de control (linealización entrada-salida). El número de veces que sea necesario derivar $h(x)$ se conoce como el *grado relativo* r del sistema [4].

Derivando $h(x)$ con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \nabla h(x) \dot{x} \\ &= \nabla h(x) [f(x) + g(x)u]\end{aligned}\quad (2) \text{ y } (3)$$

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (4)$$

Donde $L_f h$ y $L_g h$ son las derivadas LIE [1] de h con respecto a f y g respectivamente [4]. Si $L_g h \neq 0$, el grado relativo del sistema es uno, de lo contrario, diferenciando de nuevo la salida se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \frac{d}{dt} L_f h(x) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \dot{x} \\ \ddot{y} &= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u\end{aligned}\quad (5)$$

En este caso, si $L_g L_f h(x) \neq 0$, el sistema tiene grado relativo dos, de lo contrario deben tomarse más derivadas de la salida hasta obtener lo presentado en la ecuación (6).

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u \quad (6)$$

Por simplicidad, se busca que en lazo cerrado el sistema se comporte como un integrador de orden r , es decir, se establece una dinámica de la forma

$$y^{(r)} = v \quad (7)$$

siendo v una señal lineal de control. Comparando (6) y (7) se obtiene la expresión (8) que muestra matemáticamente el valor para la entrada de control, u .

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} [v - L_f^r h(x)] \quad (8)$$

En (8) puede notarse la relación no lineal entre la entrada y los estados del sistema.

2.2 El problema del seguimiento de trayectoria

El problema de la regulación de sistemas físicos es tan solo un caso particular del control que pretende llegar en un instante t_f a un estado deseado. Lo general es entonces ubicar no solo los estados finales especificados sino las trayectorias con las que se pretende alcanzar tales estados.

El empleo de esquemas de seguimiento de trayectoria es útil toda vez que es necesario evitar cambios bruscos en los estados del sistema para ubicar la salida del mismo en la referencia deseada. Las variaciones súbitas en los valores de las variables de estado implican valores elevados de las señales de control, lo que lleva a la saturación en los sistemas físicos controlados por computador.

Teniendo en cuenta lo anterior mencionado y según [5], es necesario que las trayectorias construidas sean funciones suaves del tiempo, que consideren las restricciones del controlador y del sistema físico.

En la figura 1 se muestra un ejemplo del seguimiento de trayectoria, donde se aprecia que la señal real se acerca asintóticamente a la señal deseada.

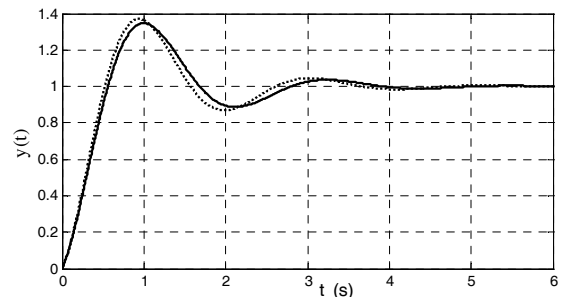


Figura 1. Ejemplo del seguimiento de trayectoria.

Considerando un esquema de control que actúe sobre la diferencia de las dos señales mencionadas, es posible analizar el problema como uno donde se desea regulación sobre el error tal como lo muestra la figura 2.

Ahora, si se ha diseñado una trayectoria (salida) deseada $y_d(t)$ que sea diferenciable tantas veces como indique el grado relativo del sistema, la señal de control v puede definirse como

$$v = y_d^{(r)} - k_1(y - y_d) - k_2(\dot{y} - \dot{y}_d) - \dots - k_n(y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)}) \quad (9)$$

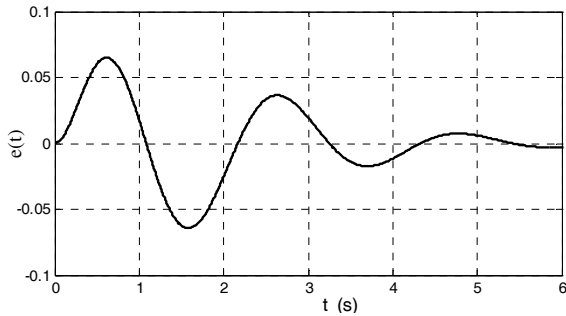


Figura 2. Regulación del error entre salida deseada y salida real.

De forma que con (7) y (9) la dinámica del sistema en lazo cerrado queda establecida como

$$e^{(r)} + k_n e^{(r-1)} + \dots + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0 \quad (10)$$

Siendo $e = y - y_d$ el error de seguimiento. Este tiende asintóticamente a cero si las constantes k_i se seleccionan de forma apropiada.

3. CONTROL GLOBAL DE UN SISTEMA FÍSICO: EL PÉNDULO CON RUEDA DE REACCIÓN

3.1 El modelo del sistema

El péndulo de reacción (RWP) fue propuesto por Mark W. Spong en [5] como una variante al péndulo invertido. La figura 3 muestra una representación del sistema junto con algunas de sus variables. El ángulo θ_1 se mide desde la posición vertical, θ_2 es el ángulo de la rueda con respecto a la misma referencia y ϕ es el ángulo relativo entre la barra y la rueda.

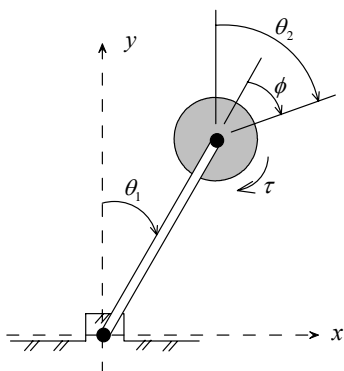


Figura 3. Péndulo con rueda de reacción

El modelo del sistema se obtiene en la sección 5 del artículo [4].

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 - a \sin \theta_1 &= -bu \\ \ddot{\theta}_2 &= cu \end{aligned} \quad (11)$$

Para efectos de la implementación realista del esquema propuesto se cuenta con el kit del péndulo de reacción de Mechatronic Systems, Inc. En éste la señal de control está restringida al rango [-10, 10] Voltios. Los valores de las constantes son

$$a = 78 \quad b = 1.08 \quad c = 198$$

El ángulo θ_2 presenta un comportamiento cíclico, por lo tanto su valor no es relevante para el control del péndulo. Por esta razón puede plantearse un modelo de orden reducido tomando las variables de estado

$$x_1 = \theta_1 \quad x_2 = \dot{\theta}_1 \quad x_3 = \dot{\theta}_2$$

De (11) se obtiene entonces el modelo de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a \sin x_1 - bu \\ \dot{x}_3 &= cu \end{aligned} \quad (12)$$

Estas ecuaciones pueden plantearse en forma vectorial, con lo que resulta

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ a \sin x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix} u \quad (13)$$

Comparando (13) con la primera ecuación en (1) se encuentran directamente f y g para el modelo del péndulo con rueda de reacción

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ a \sin x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix} \quad (14)$$

Al igualar a cero la función f se obtienen los puntos de equilibrio del sistema que también pueden observarse intuitivamente en la figura 3, esto es (considerando $u = 0$)

$$\bar{x}_1 = \pm m \pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Donde \bar{x}_1 es un punto de equilibrio estable si m es impar e inestable si m es par. El desafío de control consiste en estabilizar el péndulo en la posición vertical arriba (equilibrio inestable).

3.2 Generación de la trayectoria

Para considerar lo expuesto en la sección 2.2, mediante simulación se generó una trayectoria en la que el sistema se hace oscilar desde la posición de reposo y con una amplitud que crece gradualmente en el tiempo, hasta llegar a la posición invertida [7]. Esto se logra aplicando una entrada de valor constante y que cambia de signo dependiendo de si el sentido de giro es horario o antihorario como se muestra en la figura 4, dentro de un umbral alrededor de $\theta_1 = \pi$.

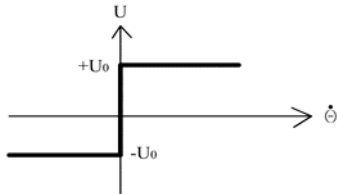


Figura 4. Señal de control usada para la generación de la trayectoria deseada.

Variando el umbral establecido y el valor de U_0 se ajusta el tiempo de subida del sistema hasta la posición vertical invertida. Alrededor de la posición invertida, un controlador lineal se encarga de regular las variaciones en el ángulo del péndulo y evitar que este caiga de nuevo a la posición de reposo.

3.3 Implementación Del control global

En esta etapa se toma como salida el ángulo θ_1 de la barra, que es la variable a controlar (figura 3). Derivando con respecto al tiempo, de acuerdo a lo planteado en la sección 2.1, se obtienen los siguientes resultados

$$y = h(x) = x_1 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \\ &= a \sin x_1 - bu \end{aligned} \tag{16}$$

Al aplicar una entrada de control según sugiere (8) se establece la dinámica lineal dada en (7) con $r = 2$, esto es

$$u = \frac{1}{-b}(v - a \sin x_1) \tag{17}$$

$$\ddot{y} = v \tag{18}$$

Con la trayectoria $y_d(t)$ generada según se describió en la subsección anterior, la señal de control lineal v queda definida como

$$v = \ddot{y}_d - k_1(y - y_d) - k_2(\dot{y} - \dot{y}_d) \tag{19}$$

Como ya se estableció, las constantes k_1 y k_2 deben tener valores con los cuales el error de seguimiento, $e = y - y_d$,

tienda a cero de modo que se logre un seguimiento asintótico [6]. Para este caso tales valores son $k_1 = 320.47$ y $k_2 = 26.67$.

Aparte del esquema anterior, se incluye una realimentación de la velocidad de la rueda, $\dot{\theta}_2$, de manera que ésta variable de estado se mantenga en valores pequeños, permitiendo mayor capacidad de aceleración.

El diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado se muestra en la figura 5; en él se quiere ilustrar cómo la señal de control no lineal, u , incluye un regulador lineal del error de seguimiento [8].

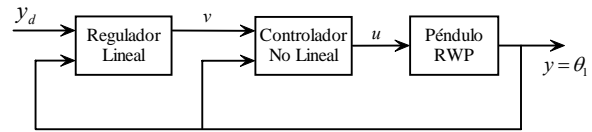


Figura 5. Representación esquemática del sistema en lazo cerrado

La figura 6 muestra la trayectoria deseada, la respuesta de la planta y la señal de control. Puede notarse que el error de seguimiento es considerablemente pequeño, comparado con los valores nominales de la salida a pesar de la saturación en la señal de control. Se observa que el valor inicial para $y(t)$ es de $-\pi = -3.1415$, luego oscila con amplitud creciente alrededor de tal valor por unos pocos segundos hasta que la amplitud es lo suficientemente grande para llegar al estado de equilibrio en la posición invertida, es decir; $y(t) = 0$. El control se implementó sobre el módulo *Mechatronics Control Kit*® disponible en el Laboratorio de Investigación en Sistemas de Control del programa de Ingeniería Eléctrica, la programación se desarrollo con la ayuda de Matlab®.

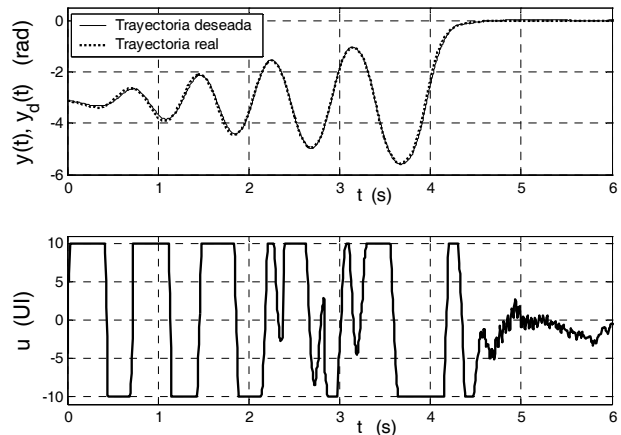


Figura 6. Superior. Gráficas de las trayectorias; deseada y real. Inferior: Gráfica de la señal de control.

En la figura 7 se presenta el error. Aquí se observa cómo después de los 4.5 s éste se hace menor a 0.02 rad. Las pequeñas oscilaciones que se presentan en el estado

estable son debidas a perturbaciones generadas por los cables de conexión, las irregularidades en la fricción del motor así como a pequeños desbalances inherentes a la construcción del *kit*.

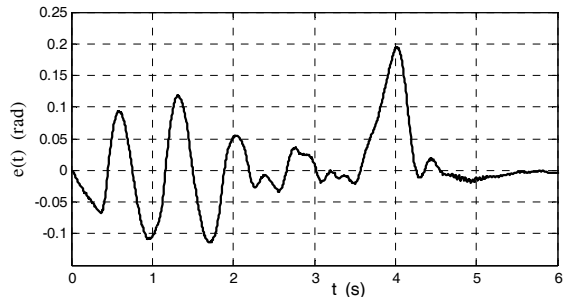


Figura 7. Gráfica del error de seguimiento.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La linealización por realimentación mostró ser efectiva para la simplificación del problema de seguimiento y regulación en sistemas no lineales, ya que con un único controlador se llevan a cabo estas dos tareas que se han resuelto típicamente en dos etapas de control diseñadas de manera independiente.

El seguimiento de trayectoria vía regulación del error mostró buen comportamiento. Los resultados experimentales fueron satisfactorios a lo largo de toda la trayectoria tanto para el valor del error como para la señal de control, aún teniendo presente la saturación.

La unión de las dos estrategias tratadas permite obtener un esquema único de control para sistemas no lineales de una manera sencilla e intuitiva.

Las trayectorias, definidas de maneras heurísticas y verificadas a través de simulación evitan desarrollos matemáticos elaborados permitiendo concentrar los esfuerzos en la realizabilidad de las mismas.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] V. M. Becerra, "Advanced Nonlinear Control" Lecture Notes in a Nonlinear Control Course. [online] pp 64-75, Disponible: www.personal.rdg.ac.uk.
- [2] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", 3rd ed., Great Britain, Springer, 1995, pp. 387-416.
- [3] J. J., Slotine, "Applied Nonlinear Control", 1st ed., New Jersey, Prentice-Hall Inc, 1991, pp 263-270.
- [4] D. Giraldo, V. D. Correa, "Control Local de un Sistema no Lineal" *Scientia Et Technica*, vol. 34, pp. 60-65, Marzo 2007.
- [5] SPONG, Mark W. et al. "Nonlinear Control of the Inertia Wheel Pendulum". University of Illinois. Estados Unidos, 2000.

- [6] Y. L. Perry, "Feedback Linearization and Robust Sliding Mode Control", Advanced Control Systems Course, 2nd revision, Dec. 2002.
- [7] V. M. Hernandez, H. Sira-Ramirez, "Generalized PI Control for Swinging up and Balancing the Inertia Wheel Pendulum" *IEEE proceedings*, American Control Conference, pp 2809-2814, Denver Colorado, Junio 2003.
- [8] L. Praly, R. Ortega, "Stabilization of Nonlinear System Via Forwarding" *IEEE Transactions in Automatic Control*, Vol 46 N° 9, pp 1461-1466, Sep 2001.