MÉTODO DE LAS EXPANSIONES HOLOMORFAS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

The holomorphic expansions method to the solutions of partial differential equations with constants coefficients

RESUMEN

En este artículo se presentan soluciones explicitas para una ecuación diferencial parcial lineal de orden dos en varias variables utilizando el método expansiones holomorfas desarrollados en [6].

PALABRAS CLAVES: Expansión holomorfa, análogo complejo, operador de Cauchy.

ABSTRACT

In this article the explicit solutions for a second order partial lineal differential equation in several variables using the method of holomorphic expansions [6] is investigated.

KEYWORDS: *Holomorphic expansion*, Cauchy's operator, complex analog, finite solutions.

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Profesor Auxiliar, Magíster en Matemáticas
Ingeniero Civil
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO
Profesor Titular, Ph.D
Matemático
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
posoa@utp.edu.co

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA
Profesor Auxiliar, Ph.D
Matemático
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Para obtener soluciones de EDP lineales de segundo orden utilizamos la representación de funciones analíticas de variable real por medio de series con términos definidos en un espacio complejo multi-dimensional. Esto hace posible obtener una amplia clase de soluciones explicitas para las EDP lineales de coeficientes constantes. Las soluciones en series pueden degenerar a sumas finitas y soluciones polinomiales. En este artículo se ilustra el método desarrollado en [6] mediante solución de la ecuación EDP homogénea de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\,2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^{\,2}}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_4^{\,2}}-\frac{\partial u}{\partial t}=0, \qquad (1)$$

La ecuación (1) posee soluciones finitas e infinitas. En este trabajo se exhibirán algunas soluciones finitas.

2. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

En este artículo se tienen en cuenta las siguientes notaciones

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ son puntos de $\mathbb{R}^m$.

$H(\Omega)$ es el conjunto de funciones holomorfas sobre Ω.

$z=(z_1,z_2,\ldots,z_m)$ son puntos de $\mathbb{C}^m$.

$n=(n_1,n_2,\ldots,n_m)$; $n_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

$|n|=n_1+n_2+\ldots+n_m$.

$z^n = z_1^{n_1}\cdot z_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot z_m^{n_m}$.

$n!=n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_m!$.

$$\sum_{|n|}^{\infty} f_n=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_m=0}^{\infty} f_n .$$

Además las sumas sin límite superior se consideraran finitas.

Cualquier ecuación diferencial parcial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes se puede expresar como una ecuación de la forma

Fecha de Recepción: 28 Mayo de 2007
Fecha de Aceptación: 24 Agosto de 2007

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \frac{\partial^2 u}{\partial x^2{}_j} + 2\sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + 4cu = 0, \qquad (2)$$

donde $u = u(x), x \in D \subset R^m$ y $\left|a_j\right| = 1$ si $a_j \neq 0$, y se considera que al menos dos coeficientes a_j tienen el mismo signo. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $a_1 = a_2 = 1$.

En el dominio

$$G = \left\{(x, y) : x \in D, y = (y_1, y_2, ..., y_{m-2}) \in D_1 \subset R^{m-2}\right\}.$$

La ecuación (1) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2{}^2} + \sum_{j=3}^{m} a_j \frac{\partial^2 w}{\partial x_j{}^2} + 2\sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + 4cw = 0, \\ \displaystyle\frac{\partial w}{\partial y_k} = 0, \ k = 1, 2, ..., m-2. \end{cases} \qquad (3)$$

Definiendo las variables complejas

$$z_1 = x_1 + ix_2, \ z_2 = x_3 + iy_1, \ ..., \ z_{m-1} = x_m + iy_{m-2}.$$

y considerando a G como un dominio en el espacio complejo de dimensión $m-1$ e intercambiando la derivación parcial por operadores de Cauchy obtenemos

$$\begin{cases} d_{z_1} d_{\bar{z}_j} W - b d_{\bar{z}_j} W - \bar{b} d_{z_1} W + cW + \displaystyle\sum_{j=2}^{m-1} (a_{j+1} d_{z_j}{}^2 + b_{j+1} d_{z_j}) W = 0, \\ d_{z_1} - d_{\bar{z}_j} W = 0, \ b = \dfrac{1}{2}(b_1 - ib_2); \ j = 2, ..., m-1. \end{cases} \qquad (4)$$

Este sistema es el análogo complejo de (3) dado que satisface la parte real y la parte imaginaria de W.

Se pueden expresar la soluciones de (4) en términos de expansiones holomofas (**HE**)

$$W = \sum_{|n|=0}^{\infty} \overline{z}^{n} W_n(z) \qquad (5)$$

donde los coeficientes $W_n(z) \in H(G)$ son indeterminados. Sustituyendo (5) en (4) obtenemos

$$\sum_{|n|=0}^{\infty} \overline{z}^{n} \Big[(n_1 + 1)(d_{z_1} - b) W_{n_1+1}$$

$$+ \sum_{j=2}^{m-1} (a_{j+1} d_{z_j}{}^2 + b_{j+1} d_{z_j}) W_n - (\bar{b} d_{z_1} - c) W_n \Big] = 0, \qquad (6)$$

$$\sum_{|n|=0}^{\infty} \overline{z}^{n} (n_j + 1) W_{n_j+1} - d_{z_j}) W_n = 0, \qquad (7)$$

$$j = 2, .., m-1.$$

Se escribe W_{n_j+1} para $W_{n_1, n_2, ..., n_{j-1}, n_j+1, n_{j+1}, ..., n_{m-1}}$ como un manera de compactar la expresión.

Para satisfacer (6) debemos tener

$$\left(n_1 + 1\right)\left(d_{z_1} - b\right) W_{n_1+1}$$

$$+ \sum_{j=2}^{m-1} \left(a_{j+1} d_{z_j}{}^2 + b_{j+1} d_{z_j}\right) W_n - \left(\bar{b} d_{z_1} - c\right) W_n = 0 \qquad (8)$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria con respecto a W_{n_1+1}

$$W_{n_1+1}(z) = \frac{1}{\left(n_1 + 1\right)!} F_{n_1+1}\left(\zeta\right) \exp\left(b z_1\right) + \frac{1}{n_1 + 1} JL\left(W_n\right) \qquad (9)$$

$F_{n_1+1}(\zeta)$ es una función arbitraria holomorfa en $\dot{G}$, la cual es la proyección de G sobre el subespacio $z_1 = const.$

$$L\left(V(z)\right) = \left[\bar{b} d_{z_1} - \sum_{j=2}^{m-1} (a_{j+1} d^2{}_{z_j} + b_{j+1} d_{z_j}) - c\right] V(z)$$

$$J\left(V(z)\right) = \int_0^{z_1} V\left(\xi, \zeta\right) \exp\left(b\left(z_1 - \xi\right)\right) d\xi.$$

De la ecuación (7) se tiene

$$W_{n_j+1} = \frac{1}{n_j + 1} d_{z_j} W, \ j = 2, 3, ..m-1. \qquad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) nos permiten calcular todos los coeficientes de la serie (5) empezando con las funciones arbitrarias $W_0 \in H(G)$ y $F_j \in H\left(\dot{G}\right)$.

La suma formal de la serie satisface el sistema (4).

2.1. Soluciones finitas

En particular cuando $b_1 = b_2 = c = 0$ en la ecuación (1) se cubren las ecuaciones clásicas de coeficientes constantes y además admiten soluciones finitas. En este caso (9) permanece invariable y (8) se transforma a:

$$W_{n_1+1}(z) = \frac{1}{\left(n_1 + 1\right)!} F_{n_1+1}\left(\zeta\right) + \frac{1}{n_1 + 1} JK\left(W_n\right). \qquad (11)$$

donde

$$K(W_n) = -\sum \left(a_{j+1} d_{z_j}{}^2 + b_{j+1} d_{z_j}\right) W_n,$$

$$J\left(V(z)\right) = \int V(\xi, \zeta) d\xi.$$

La escogencia de las funciones iniciales

$W_0 = \phi(z_1)P_0(\zeta)$, $F_j(\zeta) = P_j(\zeta)$, $j < \infty$, con $P_j(\zeta)$ polinomios y $\phi(z_1) \in H(G_1)$ una función arbitraria holomorfa en la proyección de G sobre el plano $\zeta = const$, proporciona que todo W_n sea igual a cero para un valor de $|n|$ lo suficientemente grande. Cualquier solución finita es generada por funciones iniciales del tipo mencionado anteriormente.

3. APLICACIÓN DEL MÉTODO

A continuación se hace una descripción detallada de la aplicación del método de las expansiones holomorfas para la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

Definimos las variables complejas

$$z_1 = x_1 + ix_2,\ z_2 = x_3 + iy_2,\ z_3 = x_4 + iy_2,$$
$$z_4 = t + iy_3 = x_5 + iy_3. \tag{13}$$

Sea G un dominio en el espacio complejo de dimensión 4. Intercambiando la ecuación diferencial parcial real por operadores de Cauchy mediante las transformaciones

$$dz_1 d\overline{z_1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right), \tag{13}$$

$$dz_2 dz_2 - dz_3 dz_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial y_1} i\right]$$
$$-\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial y_2} i\right], \tag{14}$$

$$-\frac{1}{2}dz_4 = -\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{\partial}{\partial y_3} i\right], \tag{15}$$

$$dz_1 d\overline{z}_1 + dz_2 dz_2 - dz_3 dz_3 - \frac{1}{2}dz_4$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_5}\right]$$

$$dz_1 d\overline{z}_1 + dz_2 dz_2 - dz_3 dz_3 - \frac{1}{2}dz_4$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_5}\right]$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial y_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial y_2} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial y_3}\right)i, \tag{16}$$

Para eliminar los términos $y_i = 1, 2, 3$ en (16) Se introducen las ecuaciones siguientes

$$dz_j - d\overline{z}_j = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - \frac{\partial}{\partial y_{j-1}} i\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_{j+1}} + \frac{\partial}{\partial y_{j-1}} i\right] = -\frac{\partial}{\partial y_{j-1}} i, \tag{17}$$

con $j = 2, 3, 4$.

Los operadores de Cauchy siguientes forman el análogo complejo del sistema (11)

$$\left(dz_1 d\overline{z}_1 + dz_2 dz_2 - dz_3 dz_3 - \frac{1}{2}dz_4\right)u = 0, \tag{18}$$

$$\left(dz_2 - d\overline{z}_2\right)u = 0,\ \left(dz_3 - d\overline{z}_3\right)u = 0,$$
$$\left(dz_4 - d\overline{z}_4\right)u = 0. \tag{19}$$

Expresando la solución del sistema (18) y (19) en términos de **EH** Se tiene

$$u = \sum_{|n|=0}^{\omega} n_1 \overline{z}^n u_n(z), \tag{20}$$

donde u_n, son coeficientes indeterminados de $h(G)$. Sustituyendo (20) en (18) y (19) se obtiene

$$dz_1 d\overline{z}_1(u) = \sum_{|n|=0}^{\omega} (n_1+1)\overline{z}^n \frac{\partial}{\partial z_1} u_{n_1+1, n_2, n_3, n_4}(z), \tag{21}$$

$$dz_2 dz_2(u) = \sum_{|n|=0}^{\omega} \overline{z}^n \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} u_n(z), \tag{22}$$

$$dz_3 dz_3(u) = \sum_{|n|=0}^{\omega} \overline{z}^n \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} u_n(z), \tag{23}$$

$$dz_4(u) = \sum_{|n|=0}^{\omega} \overline{z}^n \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} u_n(z), \tag{24}$$

Reemplazando las ecuaciones (20)-(24) en (18) se obtiene

$$\sum_{|n|=0}^{\omega}\left[(n+1)\frac{\partial}{\partial z_1}u_n(z) + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}u_n(z)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial z_3^2}u_n(z) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_4}u_n(z)\overline{z}^n\right] = 0. \tag{25}$$

Por lo tanto

$$(n+1)\frac{\partial}{\partial z_1}u_n(z)+\frac{\partial^2}{\partial {z_2}^2}u_n(z)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial {z_3}^2}u_n(z)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_4}u_n(z)=0, \quad (26)$$

$$d\overline{z}_1(u)=\sum_{|n|=0}^{\omega} n_1\ \overline{z}^n\overline{z}_1^{-1}u_n(z).$$

Para $j=2,3,4$

$$dz_j(u)=\sum_{|n|=0}^{\omega}\overline{z}^n\ \frac{\partial}{\partial z_j}u_{n_1,\ldots,n_{j+1},n_4}(z),$$

$$d\overline{z}_j(u)=\sum_{|n|=0}^{\infty}(n_j+1)\overline{z}^n u_{n_1,\ldots,n_{j+1},n_4}(z),$$

$$dz_j(u)-d\overline{z_j}(u)=\sum_{|n|=0}^{\omega}\Bigg[\frac{\partial}{\partial z_j}u_{n_1,n_j,n_3,n_4}(z)$$

$$-\sum_{|n|=0}^{\omega}(n_j+1)u_{n_1,n_2,n_j+1,n_4}(z)\Bigg]=0.$$

De esta manera

$$\frac{\partial}{\partial z_j}u_{n_1,n_j,\ldots,n_4}(z)-(n_j+1)u_{n_1,n_2,n_j+1,n_4}(z)=0.$$

Así

$$u_{n_1,n_2,n_j+1,n_4}(z)=\frac{1}{n_j+1}\frac{\partial}{\partial z_j}u_{n_1,n_j,\ldots,n_4}(z). \quad (27)$$

Si reorganizamos (26) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z_1}u_n(z)=\frac{1}{n_1+1}\Bigg[-\frac{\partial^2}{\partial {z_2}^2}u_n(z)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial {z_3}^2}u_n(z)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_4}u_n(z)\Bigg]. \quad (28)$$

Integrando con respecto a z_1 esta última expresión

$$u_{n_1+1,n_2,n_3,n_4}(z)=\frac{f_{n_1+1}}{(n_1+1)!}(z)$$

$$+\int\left[-\frac{\partial^2 u_n(z)}{\partial {z_2}^2}+\frac{\partial^2 u_n(z)}{\partial {z_3}^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_n(z)}{\partial z_4}\right]dz_1, \quad (29)$$

con $n_i=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,3,4$.

Para efecto de hallar algunas soluciones finitas a partir de las relaciones de recurrencia (27) y (29) escogemos

$\int f_{n_1+1}(z_2,z_3,z_4)=0$ y y una función inicial

$$W_o=\phi(z_1)P_o(z_2,z_3,z_4)=\cos(z_1)z_2z_3z_4=u_{0,0,0,0}.$$

Así que

$$u_{0,0,0,0}=\cos(z_1)z_2z_3z_4. \quad (30)$$

Sustituyendo (29) en (30) se tiene

$$u_{1,0,0,0}=\frac{1}{2}\int\left[-\frac{\partial^2}{\partial {z_2}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {z_3}^2}-\frac{\partial^2}{\partial {z_4}^2}\right]\left(\cos(z_1)z_2z_3z_4\right)dz_1$$

$$=\frac{1}{2}sen(z_1)z_2z_3,$$

$$u_{2,0,0,0}=\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial z_4}\left[\frac{1}{2}Sen(z_1)z_2z_3\right]dz_1=0,$$

$$u_{n,0,0,0}=0,\ n\geq 2.$$

Utilizando (27) se obtiene

$$u_{1,1,0,0}=\frac{\partial}{\partial z_2}\left(sen(z_1)z_2z_3\right),$$

$$u_{1,1,0,0}=\frac{1}{2}sen(z_1)z_3.$$

De igual manera se calculan los demás coeficientes u_n. Así la solución correspondiente a la ecuación (18) y (19) es de la forma:

$$\begin{aligned}u&=\cos(z_1)z_2z_3z_4+\frac{1}{2}sen(z_1)z_2z_3\overline{z}_1\\&+\frac{1}{2}sen(z_1)z_3\overline{z}_1\overline{z}_2+\frac{1}{2}sen(z_1)z_2\overline{z}_1\overline{z}_3\\&+\cos(z_1)z_3z_4t_2+\cos(z_1)z_2z_4t_3\\&+\cos(z_1)z_2z_3\overline{z}_4+\cos(z_1)z_4\overline{z}_2\overline{z}_3\\&+\cos(z_1)z_3\overline{z}_2\overline{z}_4+\cos(z_1)\overline{z}_2\overline{z}_3\overline{z}_4\\&+\cos(z_1)z_2\overline{z}_3\overline{z}_4+\frac{1}{2}sen(z_1)\overline{z}_1\overline{z}_2\overline{z}_3.\end{aligned} \quad (31)$$

Separando la parte real e imaginaria de (31) finalmente se tiene dos soluciones reales, que corresponden a la solución de la ecuación diferencial parcial (12)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}e(u)&=2\cosh(x_2)sen(x_1)x_1x_3x_4\\&+2\cos(x_1)sen(x_2)x_2x_3x_4\\&+8\cos(x_1)\cos h(x_2)x_3x_4x_5,\\ \mathbb{I}m(u)&=2\cosh(x_1)sen(x_2)x_1x_3x_4\\&-2\cosh(x_2)sen(x_1)x_2x_3x_4\\&-8sen(x_1)senh(x_2)x_3x_4x_5.\end{aligned}$$

4. CONCLUSIÓN GENERAL

El método de las expansiones holomorfas se puede aplicar para hallar soluciones analíticas explicitas de las ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes de segundo orden en particular las ecuaciones clásicas de la físico-matemática (la ecuación de transferencia de calor, la ecuación de onda, y la ecuación de Laplace). También es posible una generalización del mismo para tratar algunas ecuaciones EDP con coeficientes variable así como sistemas de EDP de coeficiente variable véase ([3] y [7]). El método tiene una particular eficacia tratándose de la búsqueda de soluciones simbólicas por lo que es posible en principio elaborar un software simbólico en cualquiera de los paquetes comerciales que existen en el mercado como el Maple o el Matemática. Además se puede hallar soluciones finitas exactas de EDP de coeficientes constantes lo cual es de considerable interés teórico en la comparación de la bondad de los modelos numéricos basados en esquemas de diferencia finita, método de elementos finitos y residuos ponderados entre otros véase ([5,6]). También se pueden hallar bases para el espacio de soluciones polinomiales los resultados pueden ser comparados con [1,2].

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] P.S. Pedersen, *A basis for polynomial solutions to systems of linear constants coefficient PDEs*, Adv.-Math **117** (1) (1996), 157-163.

[2] A. Turbiner, *On polynomial solutions of differential equations*, J.-Math.-Phys**. 33**(12) (1992), 3989-3993.

[3] A.I Alexandrovich, *Application of two complex variables to the theory of elasticity*, Dokl.-Akad.-Nauk **232**(3) (1977), 542-544

[4] V.I Vasov, S.L Skorokhodov, *On the development of Trefftz method*, Dokl.-Akad.-Nauk, **337**(6) (1994), 713-717.

[5] K. Rectorys, V. Zahradnik, *Solution of he firs biharmonic problem by the method of leat squares on the boundary, Aplikace Matematiky*, **19**(2) (1974), 101-131.

[6] A. Rodionov, *Explicit Solutions for linear partial differential equations*, J.-Math, Vol 2, No 2. December (2000), 34-42.

[7] A. Rodionov. C. M. Escobar, *Solución al sistema de Lamé utilizando la variable compleja, tesis de grado, Universidad Nacional de Colombia*. (2003).