CONVERGENCIA DE LAS CADENAS DE MARKOV

RESUMEN
Este documento contiene la teoría para demostrar la convergencia de las *Cadenas de Markov*, basado en conceptos básicos y especializados del Álgebra Lineal. También se introduce el concepto de la transformación **Z** como herramienta para resolver las ecuaciones de *Chapman-Kolmogorov*, y finalmente se muestra una pequeña aplicación de esta teoría.
Dado que gran parte de la literatura sólo se enfoca en las aplicaciones de esta teoría, este artículo se hace importante pues permite inferir cuando estos procesos estocásticos alcanzan o no convergencia la cual no es fácilmente entendible con las técnicas suaves usadas en la mayoría de la literatura.

PALABRAS CLAVES: Cadena de Markov, Transformada **Z**, Procesos Estocásticos.

ABSTRACT *This paper contains the theory necessary to demonstrate the Markovs Chains convergence, based on basics and specialized concepts about Linear Algebra. Also the **Z** transform concept is introduced as a tool to solve the Chapman-Kolmogorov's equations, and finally is showed a little application of this theory.*
Since most of the books which deal with this theory are only focused on applications, this paper becomes important because it allows to understand when Markov Chains reaches or not the convergence which is not easily understandable in most of the reference about stochastic process.

KEYWORDS: Markov Chain, **Z** Transform, Stochastic Process.

JUAN CARLOS BEDOYA
Ingeniero Electricista, M.Sc (C)
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
bedoya@ohm.utp.edu.co

MAURICIO BARRERA
Ingeniero Industrial, M.Sc (C).
Departamento de Planeación UTP.
Universidad Tecnológica de Pereira
vonneumann@hotmail.com

1. INTRODUCCIÓN

Un proceso estocástico es un proceso aleatorio que evoluciona de acuerdo con un parámetro que por lo general es el tiempo [6].

La variable aleatoria de estados $\vec{E}_t$ que describe el proceso está indexada por el parámetro t ó índice del proceso. Así, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias y existe una variable aleatoria por cada valor del parámetro t del proceso.

Las *Cadenas de Markov* son un tipo de procesos que carecen de memoria, es decir la transición a un estado siguiente solo depende del estado presente en que se encuentre el sistema y no importa el recorrido que ha hecho para llegar al estado presente. En este tipo de procesos la variable aleatoria de estados y el parámetro t (tiempo) se consideran variables discretas [6].

Las cadenas de Markov son una herramienta que permite, para ciertos problemas, determinar la probabilidad con la cual el proceso puede entrar en algún estado; sin embargo un fenómeno más interesante, es que después de ocurridas varias transiciones, estas probabilidades convergen a valores particulares.

Este artículo relaciona la teoría necesaria asociada con la Convergencia de las Cadenas de Markov, basándose en conceptos fuertes de Álgebra Lineal y las Ecuaciones en Diferencias enfocados a esta temática.
Las secciones de este artículo comprenden, las generalidades de las Cadenas de Markov y matrices estocásticas, las propiedades de las normas matriciales, la Transformada **Z**, la convergencia de las Cadenas de Markov, y finalmente se muestra un ejemplo aplicado de la teoría expuesta.

2. CADENAS DE MARKOV

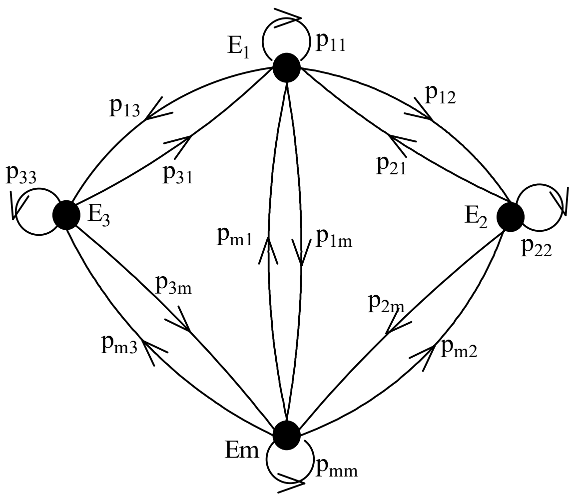

Figura 1.Representación de la transición entre estados para una cadena de Markov

Fecha de Recepción: 31 de agosto de 2006
Fecha de Aceptación: 12 Octubre de 2006

La figura 1 muestra el esquema básico de un proceso estocástico (para un instante de tiempo específico) donde las variables de estado han sido discretizadas en **m** posibles situaciones (Estados 1,…, Estado **m**) y el tiempo ha sido discretizado en etapas (horas, días, meses, etc).
En las cadenas de Markov se supone que el paso ó *transición* de un estado a otro sólo depende de ambos, es decir se puede asociar una probabilidad p_{ij} a la transición del estado E_i en la fecha n hacia estado E_j en la fecha **n+1**. Si llamamos $p_j(n)$ la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado E_j en una fecha **n**, y si las probabilidades de transición p_{ij} se mantienen constantes, tenemos una *Cadena de Markov*. La cadena de Markov es regida por la ecuación **(1)** que es conocida como las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov [2]

$$p_j(n+1)=\sum_{i=1}^{m} p_i(n)\cdot p_{ij} \qquad (1)$$

Esta ecuación indica que la probabilidad de entrar al estado **j** en la fecha **n+1** es la suma de las probabilidades de pasar de cualquier estado **i** al estado **j** dado que en la fecha **n** el proceso se encuentra en el estado **i.** La forma matricial (para todos los estados) de la ecuación (1) es:

$$\left[p(n+1)\right]=\left[p(n)\right]\left[M\right] \qquad (2)$$

Donde **M** es la matriz cuadrada de **m**x**m** de las probabilidades de transición p_{ij}, tales que $p_{ij}\geq 0$, y la suma por filas de **M** debe ser unitaria, esto es la $\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1$ lo cual representa que todas las posibles transiciones del estado **i** a cualquier otro estado **j** viene regida por una distribución de probabilidad (en este caso discreta). Una matriz **M** con las propiedades mencionadas anteriormente recibe el nombre de *Matriz Estocástica*.
Se puede verificar fácilmente la siguiente relación, para una cadena de Markov, conociendo las probabilidades de la fecha inicial

$$\left[p(n)\right]=\left[p(0)\right]\left[M\right]^n \qquad (3)$$

Cuando todos los elementos de **M** son diferentes de cero, y se verifica que $\underset{r\to\infty}{Lim}\left[M\right]^r=\left[\tilde{M}\right]$, la matriz **M** se llama *Ergódica*.

Es importante resaltar, las siguientes propiedades de las matrices estocásticas:

a) Si **A** y **B** son matrices estocásticas entonces **C=A · B** también lo es. Para la prueba de la propiedad verifiquemos que la suma de los elementos de cada fila de **C** suma uno, entonces:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \text{ y la suma}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right\}=\dots$$

$$\dots=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left\{\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\right\}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left\{1\right\}=1$$

b) Si **A** es una matriz estocástica, **λ=1** siempre es un valor propio de **A**. Para mostrar esta propiedad observemos inicialmente el determinante $\left|\lambda I-A\right|$

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{nk} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

observemos que en la igualdad $\left|\lambda I-A\right|=0$ (para obtener los valores propios) el valor **λ=1** convierte a la matriz $\lambda I-A$ en una matriz singular y por lo tanto su determinante es nulo. La singularidad de esta matriz pude ser demostrada a través del concepto de independencia lineal, una combinación lineal no-nula entre los vectores columna de dicha matriz da como resultado el vector nulo, entonces con **λ=1** tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} c_1+\cdots+\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ 1-a_{nn} \end{bmatrix} c_n=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las constantes $c_1=\cdots=c_n=1$ satisfacen la ecuación anterior (recordar que la suma por filas de una matriz estocástica es siempre la unidad).
Así queda demostrado que con **λ=1** existe dependencia lineal entre las columnas de $\lambda I-A$ y por lo tanto su determinante es nulo, garantizando pues que la unidad es siempre un valor propio de una matriz estocástica.

3. NORMA MATRICIAL, EIGENVALORES Y EIGENVECTORES.

Así como para un espacio vectorial *V* de vectores puede definirse como *Norma* la aplicación de un elemento de *V* sobre los reales positivos, definamos para el espacio de matrices de orden **m** la *Norma Matricial* [5] como una aplicación, de un elemento del espacio de matrices, en los reales positivos que verifica que:

a) $\|A\|\geq 0$ y $\|A\|=0\leftrightarrow A=\theta$ donde θ es la matriz nula.
b) $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$
c) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$
d) $\|AB\|\leq\|A\|\cdot\|B\|$

Nótese que las primeras tres propiedades son similares a las propiedades de la norma de un vector con $\mathbf{m^2}$ elementos, sin embargo la cuarta propiedad diferencia las normas matriciales de las vectoriales. Ejemplo de normas matriciales son:

- $\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ (*Norma 1*).
- $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ (*Norma 2, o norma Euclidea*).
- $\|A\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p}$ (***p**-norma matricial*)

La **p-**norma infinita, que converge al máximo del $|a_{ij}|$ no es norma matricial ya que no satisface la propiedad **d)** por esta razón se puede ver en ciertos problemas que no todas las **p-**normas para **p>2** son matriciales.

Un complejo **λ** es ***eigenvalor*** o ***valor propio*** de una matriz **A** si $\exists\, \mathbf{v} \in V$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) que satisface $Av = \lambda v$ ($\mathbf{v} \neq \boldsymbol{\theta}$) y en tal caso **v** es el ***eigenvector*** o ***vector propio*** asociado a **λ.**

El ***espectro*** de una matriz **A** (***sp(A)***) es el conjunto de valores propios de dicha matriz; y se denomina ***radio espectral*** (***ρ*(A)**) al máximo de las magnitudes del espectro de **A** ($\rho(\mathbf{A}) = Max\ \{ |\lambda_i(\mathbf{A})| \}$ **).**

Las dos siguientes son propiedades de las normas matriciales:

1) $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ con $k \in N$

2) $\rho(A) \leq \|A\|$ para cualquier norma matricial.

Pruebas: **1)** Es consecuencia de la propiedad **d).** Para **2)** definamos **H** como la matriz cuadrada **H=[v|θ|…| θ]** (**v** es un vector propio de **A,** y **θ** es un vector columna de ceros), entonces [**A**] · [**H**] = λ[**H**], luego ||**A** · **H**|| = ||**λH**|| = |**λ**| · ||**H**|| y por la propiedad **d)** se tiene que ||**A** · **H**|| ≤ ||**A**|| · ||**H**||, luego |**λ**| ||**H**|| ≤ ||**A**|| · ||**H**||, y ya que ||**H**|| ≥ 0 (pues **v≠θ**) se tiene entonces que |**λ**| ≤ ||**A**|| que se satisface para cualquier valor propios **λ** del ***sp(A)***. Lo anterior indica que para cualquier norma matricial de una matriz **A**, ningún valor propio de dicha matriz será de magnitud superior a la norma.

Si **A** es una matriz estocástica, definamos a conveniencia, la norma matricial de **A** como:

$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{k}$, con *k>0*, y como **A** es estocástica, esta norma siempre será igual a n/k. Es facil mostrar que la norma así definida cumple con las cuatro propiedades, ya que esta norma es un caso específico de la ***p****-norma 1*.

Es conveniente analizar el rango de valores que puede asumir *k* de modo que la norma definida siga siendo norma matricial. La propiedad **d)** es quien restringe el valor máximo de *k* así: Si **A** y **B** son estocásticas, entonces ***C=A · B*** también lo es, luego $\|A \cdot B\| = \|C\| = n/k$ debe ser menor o igual que $\|A\| \cdot \|B\| = n^2/k^2$, esto es $n/k \leq n^2/k^2$, y ya que *k*>0, se tiene de la relación anterior que $0 < k \leq n$; escojamos entonces ***k=n***, que es valor para el cual la norma matricial definida toma el menor valor posible, para nuestra norma matricial, de modo que nuestra norma matricial para matrices estocásticas será siempre igual a la unidad.

Con esta norma matricial así definida y por la propiedad **2)** se tiene entonces que la magnitud máxima de algún valor propio de una matriz estocástica será como máximo la unidad.

4. LA TRANSFORMADA Z

Se define aquí la transformación Z ya que es muy útil para mostrar las propiedades de las cadenas de Markov [4].

Sea **n** una variable entera no negativa, y consideremos una secuencia o función $f(n)$ unívoca y definida para valores enteros no negativos de ***n***, y que verifica que $\exists a \geq 0, |f(n)| \leq a^n$, entonces definamos $F(z)$ como la transformación *Z* de $f(n)$ así:

$$F(z) = Z\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot z^n \tag{4}$$

La serie anterior es convergente por lo menos para un $|z| < 1/a$. Observe que la transformación es un operador lineal.

Para nuestro estudio, nos interesa mostrar los siguientes resultados:

- Si $f(n) = \alpha^n$ entonces
$$F(z) = \frac{1}{1-\alpha z} z \text{ si } |\alpha| \leq 1 \tag{5}$$
- La transformación de *f(n+1)* es
$$Z\{f(n+1)\} = \frac{F(z) - f(0)}{z} \tag{6}$$

Prueba:

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^n = 1/(1-\alpha z)$ siempre que $|z| < 1/|\alpha|$ ***Probado (5)***

$Z\{f(n+1)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) \cdot z^n = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \cdot z^{k-1} = \ldots$

$\ldots = z^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^k - f(0)\right) = F(z) - f(0)/z$ ***Probado (6)***

5. CONVERGENCIA DE LAS CADENAS DE MARKOV

Retomando la ecuación (2) y transformando ambos miembros mediante (4) tenemos:

$([P(z)]-[P(0)])/z=[P(z)][M]$, entonces

$$[P(z)]=[P(0)][C(z)]^{-1} \qquad (5)$$

$$\text{donde } [C(z)]=[I_m]-z[M]$$

Existe una relación inversa entre las raíces en z del determinante de la matriz C y los elementos del ***sp(*M*)***, esto es:

$|C(z)|=0$ es $|[I]-z[M]|=z^m\,|1/z[I]-[M]|=\ldots$

$\ldots=z^m\,|\lambda[I]-[M]|=0$ y con $z\neq 0$ se tiene que las raíces en z son los inversos de los valores propios de la matriz estocástica **M.**

Recordemos que la inversa de la matriz $C(z)$ se calcula como el inverso de su determinante multiplicado por su matriz Adjunta [1] así:

$$[P(z)]=[P(0)]\left\{\frac{1}{|C(z)|}Adj\left(C(z)\right)\right\} \qquad (6)$$

La ecuación **(6)** puede ser desarrollada en fracciones parciales simples, con denominadores que pueden ser de la forma $(z-r_k)$ (r_k es cada una de las raíces del determinante de $C(z)$) ó de la forma $(1-\lambda_k z)$ (el inverso de r_k es λ_k ($\lambda_k\in$ ***sp(*M*)***). Se escogerá esta última expresión ya que ella permite obtener la transformación **Z** inversa de forma inmediata.

Se tiene entonces que para el caso de **m** valores propios diferentes el desarrollo en fracciones simples es [3]

$$[P(z)]=[P(0)]\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-\lambda_k z}[A_k]\right\} \qquad (7)$$

donde las matrices $\mathbf{A_k}$ tiene entradas constantes (independientes de z).

Al aplicar la transformación **Z** inversa a (7) mediante (5) tenemos:

$$[p(n)]=[p(0)]\left\{\sum_{k=1}^{m}[A_k]\lambda_k^n\right\} \qquad (8)$$

Para analizar la convergencia de la cadena de Markov recordemos que en el conjunto de valores propios $\boldsymbol{\lambda_k}$ de la matriz estocástica ***M*** siempre existe por lo menos un valor propio igual a la unidad y además que los demás se encuentran dentro del circulo unitario complejo; por lo tanto a medida que **n** aumenta de valor (cuando han ocurrido suficientes transiciones) la suma de la ecuación **(8)** se reduce sólo a aquel término asociado al valor propio unitario ya que los demás sumandos tienden a desaparecer por ser de magnitud menor que la unidad.

6. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para un sistema con tres estados se tienen las probabilidades de transición entre estados

$$M=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{31} \\ p_{21} & p_{22} & p_{32} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.3 & 0 & 0.7\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$$

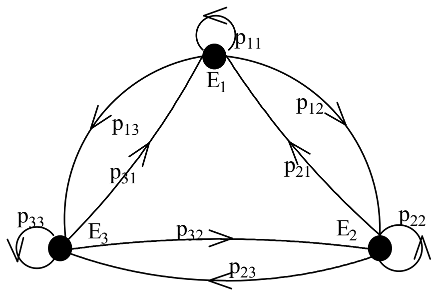

Figura 2.Representación de la transición entre estados para una cadena de Markov

Bajo el supuesto de que el proceso se encuentra en el *Estado 1*, calcule las probabilidad del que el proceso se encuentre en alguno de los estados después de sucedidas muchas transiciones. (Las probabilidades de transición no cambian con el tiempo).

Observe que **M** es una matriz estocástica, y sus valores propio son: $\lambda_1=1 \quad \lambda_2=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{10} \quad \lambda_3=\dfrac{-2-\sqrt{3}}{10}$, observe que uno de ellos es la unidad y los demás son de magnitud menor a ésta.

En cuanto a la matriz $[C(z)]=[I_m]-z[M]$ tenemos:

$$[C(z)]=\begin{bmatrix}1-0.4z & -0.5z & -0.1z\\ -0.3z & 1 & -0.7z\\ -0.5z & -0.3z & 1-0.2z\end{bmatrix}$$

$$[C(z)]^{-1}=\begin{bmatrix}-0.21z^2-0.2z+1 & -0.07z^2+0.5z & 0.35z^2+0.1z\\ 0.29z^2+0.3z & 0.03z^2-0.6z+1 & -0.25z^2+0.7z\\ 0.09z^2+0.5z & 0.13z^2+0.3z & -0.15z^2-0.4z+1\end{bmatrix}$$

$$|C(z)| = 1 - 0.6z - 0.33z^2 - 0.07z^3$$

Y al expandir $[C(z)]^{-1}$ en fracciones parciales tendríamos que:

$$[C(z)]^{-1} = \frac{1}{1-z}[A_1] + \frac{1}{1-\lambda_2 z}[A_2] + \frac{1}{1-\lambda_3 z}[A_3]$$

La ecuación **(7)** aplicada a este problema resulta en

$$[p(n)] = [p(0)]\left[[A_1] + [A_2]\lambda_2^n + [A_3]\lambda_3^n\right]$$

Y de estos términos sólo interesa el primero de ellos, ([**A₁**]) pues pasadas muchas transiciones los dos últimos términos tienden a cero. Por lo tanto sólo necesitamos a **A₁**] y para ello simplemente multiplicamos a $[C(z)]^{-1}$ por $(1-z)$ y hacemos $z = 1$, obteniendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4014 & 0.2925 & 0.3061 \\ 0.4014 & 0.2925 & 0.3061 \\ 0.4014 & 0.2925 & 0.3061 \end{bmatrix}$$

Así que las probabilidades después de muchas transiciones son:

$$[p(n)] = [p(0)][A_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.4014 & 0.2925 & 0.3061 \\ 0.4014 & 0.2925 & 0.3061 \\ 0.4014 & 0.2925 & 0.3061 \end{bmatrix}$$

$$[p(n)] = \begin{bmatrix} 0.4014 & 0.2925 & 0.3061 \end{bmatrix}$$

7. ANOTACIONES FINALES

Es importante aclarar que el espectro de la matriz estocástica puede contener:

- *Todos los elementos del espectro son diferentes*:
Este fue el caso que se expuso anteriormente, y con el cual se observa claramente la convergencia de la cadena de Markov.

- *Existen elementos con multiplicidad, pero su magnitud es estrictamente meno que la unidad:*
Para este caso, la única diferencia que se presenta con el proceso anteriormente mostrado tiene que ver con la expansión en fracciones parciales que se muestra en la ecuación **(7)**, y se puede mostrar, por medio de la transformación **Z** inversa, que cada una de las fracciones simples asociadas con el valor propio con multiplicidad producirá una función de $\boldsymbol{\lambda^n}$ la cual decrece a medida que suceden las transiciones.

- *Existen elementos con magnitud igual a la unidad:*
Para este caso se puede decir que la Cadena de Markov pudiera no Converger a un valor específico, e incluso, en el caso de que estos elementos tengan multiplicidad la Cadena de Markov diverge.

Para entender esta idea sería necesario profundizar mucho más en la teoría de estabilidad y la transformada **Z**; sin embargo recurriendo a los criterios de estabilidad dados por la Teoría de Sistemas de Control Digital, se conoce que cuando los valores propios del sistema están ubicados en la frontera del círculo unitario el sistema es oscilante, y además si existe multiplicidad el sistema se torna inestable.

Para explicar el fenómeno anterior, tomemos como ejemplo un caso simple en el cual $\lambda = -1$ es un valor propio de **M**.

Considere que en el ejercicio anterior la matriz de transiciones es

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sus valores propios son $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 0$. El lector podrá comprobar que la matriz $[C(z)]^{-1}$ puede escribirse como

$$[C(z)]^{-1} = \frac{1}{1-z}[A_1] + \frac{1}{1+z}[A_2] + [A_3]$$

donde

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}; [A_2] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.1 \\ -0.5 & 0.4 & 0.1 \\ -0.5 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}; [A_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$[p(n)] = [p(0)]\left[\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.1 \\ -0.5 & 0.4 & 0.1 \\ -0.5 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}\right] \text{Y}$$

se concluye entonces que las probabilidades no convergen a un valor específico ya que para valores pares de la transición (valores pares de **n**) las probabilidades toman un valor diferente al de las transiciones impares.

8. CONCLUSIONES

Se ha mostrado el panorama de las *Cadenas de Markov*, como un proceso estocástico donde tanto las variables tiempo como el estado son variables discretas. Se mostró la convergencia de dicho proceso bajo un análisis claro que involucra conceptos del Algebra Lineal y mediante la transformada **Z** como herramienta para resolver las ecuaciones *Chapman-Kolmogorov*.

La transformada **Z** aquí definida difiere un poco de la transformación conocida comúnmente, sin embargo las

propiedades derivadas de la definición aquí dada han sido demostradas y justificadas [4].
Por esta razón es que los valores propios de **M** son los inversos de las raíces del determinante de la matriz **C**(**z**). Si hubiésemos empleado la definición de transformación **Z** usada en la teoría de Sistemas Control Digital (donde el exponente de **z** en la ecuación **(4)** no es **n** sino ***-n***) los valores propios de **M** coincidirían con las raíces del determinante de la matriz **C**(**z**).

El enfoque que se le ha dado a este problema está estrechamente relacionado con la teoría de *Sistemas de Control Digital* [3], pues las probabilidades finales de la Cadena de Markov equivalen a la respuesta de *Estado Estable* de un sistema digital, cuyas V*ariables de Estado* y sus S*alidas* equivalen a la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado determinado y la matriz asociada (al sistema digital) es la matriz estocástica, ante una excitación de condiciones iniciales (equivalente a las probabilidades del estado inicial) .

9. BIBLIOGRAFÍA

[1] APOSTOL, T. Multi Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability. Volume II, Second edition. Toronto, 1969.

[2] CRAMER, H, Métodos Matemáticos de la Estadística. Segunda edición 1960.

[3] GIRALDO, Didier. Sistemas de Control Digital. Universidad Tecnológica de Pereira. Primera edición. 1999.

[4] KAUFMANN, A. Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones. Tomo II, Primera edición, páginas 408 a 425.1256 páginas, Editorial Continental, México, 1982.

[5] *www.alojamientos.us.Es/edan/asignaturas/CN2/ ApuntesCN-II.pdf.*
Apuntes de Cálculo Numérico. Volumen II, Curso 2004/2005, Octubre 2004.

[6] ZAPATA, C. Confiabilidad de Sistemas Eléctricos. Universidad Tecnológica de Pereira. 2005