

## CONTROL PREDICTIVO GENERALIZADO IMPLEMENTADO A DOS TANQUES ACOPLADOS

### RESUMEN

En este artículo se presenta el modelo del control predictivo generalizado con restricciones, implementado a un sistema de tanques acoplados. En la aplicación del controlador se muestra el modelo de los tanques acoplados, se fijan las restricciones del sistema y se realizan diferentes simulaciones variando los parámetros de sintonía del controlador. Finalmente se analizan los resultados obtenidos y se concluye respecto al desempeño del algoritmo.

**PALABRAS CLAVES:** Control predictivo generalizado, restricciones, tanques acoplados.

### ABSTRACT

*This paper presents the Generalized Predictive Control model with constraints, implemented to a coupled tanks system. In the controller's application the model of the coupled tanks is shown, the system's constraints are fixed and different simulations are done, changing controller's tuning parameters. Finally the obtained results are analyzed and the algorithm's performance is concluded.*

**KEYWORDS:** Generalized predictive control, constraints, coupled tanks.

### 1. INTRODUCCIÓN

El control predictivo se desarrolló a finales de los setenta y ha tenido un desarrollo considerable desde entonces, gracias a sus valiosos aportes en el control de procesos industriales.

El término control predictivo no designa a una estrategia de control particular, sino a un conjunto de métodos de control que difieren en el tipo de modelo utilizado para representar el proceso, las perturbaciones y la función objetivo considerada.

En los 80 una línea de trabajo se desarrolló en torno a las ideas del control adaptativo, realizándose estrategias de control predictivo para sistemas monovariantes y formulada sobre modelos de entrada y salida [3].

La formulación más conocida que usa el modelo de función de transferencia es sin duda el Control Predictivo Generalizado [4] (Generalized Predictive Control, GPC), aunque existen otras formulaciones que también usan modelos de función de transferencia (Extended Prediction Self Adaptive Control EPSAC y Extended Horizon Adaptive Control EHAC, por ejemplo).

El GPC se ha convertido en uno de los métodos más populares tanto en el mundo industrial como en el académico y ha funcionado con éxito en muchas aplicaciones industriales [3], mostrando buenas prestaciones a la vez que un cierto grado de robustez respecto a sobreparametrización o retardos mal conocidos.

Es capaz de proporcionar una solución explícita (en

### JUAN PABLO GONZÁLEZ T.

Ingeniero Electrónico, Ms.C  
Profesor Auxiliar  
Universidad Tecnológica de Pereira  
ing.juanpa@gmail.com

### NICOLÁS TORO GARCÍA

Ingeniero Eléctrico, Ms.C  
Profesor Asistente  
Universidad Nacional de Colombia  
sede Manizales  
ntoroga@unal.edu.co

ausencia de restricciones), puede tratar plantas inestables y de fase no mínima a la vez que incorpora la idea de horizonte de control y la consideración de pesos en los incrementos de la señal de control. Las diversas posibilidades disponibles para el GPC conducen a una gran variedad de objetivos de control comparado con otras realizaciones, algunas de las cuales pueden ser consideradas como subconjuntos o casos límites del GPC [1].

Por lo tanto el objetivo en este trabajo es mostrar las ventajas y la innovación del algoritmo GPC implementado en un sistema típico de los procesos industriales como lo es el de tanques acoplados. Considerando restricciones en el sistema, estabilidad y poco esfuerzo de control, se resalta el desempeño de este algoritmo con respecto a los controladores clásicos ya conocidos.

A continuación se describen las características generales del control predictivo generalizado y su respectivo desarrollo matemático, se muestra el modelado de los tanques acoplados y se fijan las restricciones del algoritmo. Finalmente se ilustran las simulaciones del sistema de control variando los parámetros de sintonía y se presenta el análisis de los resultados con las correspondientes conclusiones.

### 2. CONTROL PREDICTIVO GENERALIZADO

La idea básica del GPC [3] es calcular una secuencia de futuras acciones de control de tal forma que minimice

una función de coste multipaso. El índice a minimizar es una función cuadrática que mide por un lado la distancia entre la salida predicha del sistema y una cierta trayectoria de referencia hasta el horizonte de predicción, y por otro el esfuerzo de control necesario para obtener dicha salida.

## 2.1 Formulación del GPC

En el GPC el modelo de la planta viene dado por una función de transferencia discreta en la forma de un modelo CARIMA [10] (Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average):

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (1)$$

Donde  $u(t)$  y  $y(t)$  son las variables de entrada y salida respectivamente y  $e(t)$  es un ruido blanco de media cero. A, B y C son los siguientes polinomios en el operador retardo  $z^{-1}$  y  $d$  es el tiempo muerto del sistema:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_naz^{-na} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nbz^{-nb} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_ncz^{-nc} \\ \Delta &= 1 - z^{-1} \end{aligned}$$

Este modelo es muy apropiado para muchas aplicaciones industriales en las que las perturbaciones no son estacionarias, según se justifica en [4]. A partir de ahora el polinomio C se toma igual a 1.

El algoritmo GPC consiste en aplicar la secuencia de control que minimiza una función de coste de la forma:

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j/t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (2)$$

Donde  $\hat{y}(t+j/t)$  es la predicción óptima de la salida  $j$  pasos hacia delante calculada con datos conocidos en el instante  $t$ ,  $N_1$  y  $N_2$  son los horizontes mínimo y máximo de predicción y  $N_u$  es el horizonte de control,  $\delta(j)$  y  $\lambda(j)$  son secuencias de ponderación (normalmente constantes) y  $w(t+j)$  es la futura trayectoria de referencia. En muchas situaciones se considera  $\delta(j)$  igual a 1 y  $\lambda(j)$  constante.

El objetivo es pues el cálculo de la futura secuencia de control  $u(t), u(t+1), \dots$  de tal manera que la salida futura del proceso  $y(t+j)$  permanezca próxima a  $w(t+j)$ , lo cual se logra minimizando  $J$ .

## 2.2 Predicción óptima

Con objeto de minimizar la función de coste [3], hay que calcular la predicción óptima  $y(t+j)$  para  $j \geq N_1$  y  $j \leq N_2$ . Esto se lleva a cabo resolviendo una ecuación diofántica cuya solución se puede obtener mediante un algoritmo recursivo.

Considérese la siguiente ecuación diofántica:

$$\begin{aligned} 1 &= E_j(z^{-1})\Delta A + z^{-j}F_j(z^{-1}) \\ 1 &= E_j(z^{-1})\hat{A} + z^{-j}F_j(z^{-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

Los polinomios  $E_j$  y  $F_j$  se derivan de la ecuación diofántica y vienen unívocamente definidos con grados  $j-1$  y  $na$  (grado del polinomio A) respectivamente. Se pueden obtener dividiendo 1 entre  $\tilde{A}(z^{-1})$  hasta que el resto se pueda factorizar como  $z^j F_j(z^{-1})$ . El cociente de la división es el polinomio  $E_j(z^{-1})$ .

Como el grado del polinomio  $E_j(z^{-1})$  es igual a  $j-1$ , los términos de ruido se encuentran en el futuro y por tanto la mejor predicción viene dada por:

$$\hat{y}(t+j/t) = G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + F_j(z^{-1})y(t) \quad (4)$$

donde  $G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})$ .

En resumen, la forma de obtener los polinomios  $E_j$  y  $F_j$  es la siguiente:

- 1) Comenzar con  $E_1 = 1, F_1 = z(1 - \hat{A})$
- 2) Ir añadiendo nuevos términos a  $E_j$  con  $e_{j+1,j} = f_{j,0}$
- 3) Calcular  $f_{j+1,i} = f_{j,i+1} - f_{j,0}\hat{a}_{i+1} \quad i = 0 \dots na$ ,  
siendo  $f_{j,na+1} = 0$

El polinomio  $G_{j+1}$  puede ser obtenido recursivamente como sigue:

$$G_{j+1} = E_{j+1}B = (E_j + f_{j,0}z^{-j})B = G_j + f_{j,0}z^{-j}B$$

Es decir, los primeros  $j$  coeficientes de  $G_{j+1}$  serán idénticos a los de  $G_j$  mientras que el resto viene dado por:

$$g_{j+1,j+i} = g_{j,j+i} + f_{j,0}b_i \quad \text{para } i = 0 \dots nb$$

Considérese ahora la predicción de forma matricial:

$$y = Gu + F(z^{-1})y(t) + G'(z^{-1})\Delta u(t-1) \quad (5)$$

Con:

$$y = [\hat{y}(t+d+1/t) \dots \hat{y}(t+d+N/t)]^T \quad (6)$$

$$u = [\Delta u(t) \Delta u(t+1) \dots \Delta u(t+N-1)]^T \quad (7)$$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$G'(z^{-1}) = \begin{bmatrix} (G_{d+1}(z^{-1}) - g_0)z \\ (G_{d+2}(z^{-1}) - g_0 - g_1 z^{-1})z^2 \\ \vdots \\ (G_{d+N}(z^{-1}) - \dots - g_{N-1} z^{-(N-1)})z^N \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$F(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{d+1}(z^{-1}) \\ F_{d+2}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{d+N}(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Nótese que los dos últimos términos en la ecuación (5) dependen sólo del pasado y se pueden agrupar por tanto dentro del vector *f* (respuesta libre) dando lugar a [1]:

$$y = Gu + f \quad (11)$$

### 2.3 Restricciones

Los 3 tipos de restricciones [8] que se van a emplear en el modelo de Control Predictivo Generalizado son:

- Variable manipulada: límites máximo y mínimo de la entrada *u*(*t*).

$$l = 0, 1, \dots, Nu - 1$$

$$u_{low}^l \leq \sum_{j=0}^l \Delta u(t+j/t) + u(t-1) \leq u_{high}^l(l); \quad (12)$$

- Rata de la variable manipulada: límites máximo y mínimo de la rata de cambio de la entrada  $\Delta u$ (*t*).

- Variable de salida: límites máximo y mínimo de la salida *y*(*t*).

$$Y_{low} \leq Y(t+1/t) \leq Y_{high} \quad (13)$$

### 2.4 Función objetivo

La función de coste se puede escribir como:

$$J = (Gu + f - w)^T (Gu + f - w) + \lambda u^T u \quad (14)$$

donde

$$w = [w(t+d+1) \dots w(t+d+N)]^T$$

Reordenando términos y eliminando aquellos que no dependen de *u* se obtiene:

$$J = u^T \{G^T \delta G + \lambda\} u + 2(f - w)^T \delta G u \quad (15)$$

De esta forma de tiene el Hessiano *H* y el gradiente *c* [11], [2].

$$H = G^T \delta G + \lambda \quad (16)$$

$$c = G^T \delta (f - w) \quad (17)$$

El problema de optimización con un objetivo cuadrático e inecuaciones lineales (restricciones) se han definido dentro de un problema cuadrático.

$$\min_{\Delta u(t)} J \quad (18)$$

$$\text{sujeto a: } C^u \Delta u(t) \geq C(t+1/t)$$

Donde *C<sup>u</sup>* combina todas las matrices en el lado izquierdo de la desigualdad y *C*(*t*+1/*t*) en el lado derecho contiene todos los vectores de error de la ecuación de restricción.

Debido al uso de la estrategia deslizante, sólo se aplica realmente el primer elemento del vector *u*, repitiendo de nuevo el mismo procedimiento al siguiente instante de muestreo.

### 3. TANQUES ACOPLADOS

Se muestra el esquema del sistema en el que dos tanques se acoplan de la siguiente manera, ver figura 1.

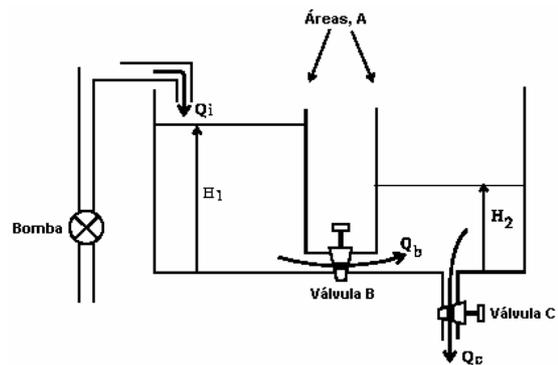


Figura 1. Sistema de tanques acoplados.

En estos tanques acoplados el sistema de estados está formado por el nivel *H<sub>1</sub>* en el tanque 1 y el nivel *H<sub>2</sub>* en el tanque 2. Si la entrada de control es el flujo de la bomba *Q<sub>i</sub>*, entonces la variable a ser controlada será normalmente el segundo estado, que es el nivel *H<sub>2</sub>*, con perturbaciones causadas por variaciones en el flujo de salida del sistema por la válvula *B* o por cambios en la válvula *C*.

Dada la siguiente función de transferencia [6], en la que se define la salida del sistema como el nivel en el tanque 2 y la entrada como el flujo en la bomba:

$$\frac{h_2(s)}{q_i(s)} = \frac{G}{(T_1s+1)(T_2s+1)} \quad (19)$$

Donde G es la ganancia del sistema y las constantes de tiempo  $T_1$  y  $T_2$  están relacionadas a los niveles de operación en los tanques y son funciones de los parámetros del sistema; la diferencia de niveles en los tanques es directamente proporcional al área de la sección transversal de los tanques.

Teniendo en cuenta los parámetros que corresponden a esta función de transferencia, se puede realizar una identificación sencilla y práctica del sistema a través de la respuesta al escalón. Los parámetros hallados en [7] son los siguientes:

$$\begin{aligned} G &= 0.5361 \\ T_1 &= 2.03 \text{ seg} \\ T_2 &= 126.41 \text{ seg} \end{aligned}$$

Entonces la aproximación lineal de segundo orden del sistema se expresaría como:

$$\frac{h_2(s)}{q_i(s)} = \frac{0.00208}{s^2 + 0.623s + 0.00388} \quad (20)$$

Ahora se procede a discretizar [9] la función de transferencia, con un periodo de muestreo de 99.74 s y con un retenedor de orden cero, a través de la función c2d de Matlab [12]:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.2469z^{-1} + 0.00295z^{-2}}{1 - 0.5339z^{-1}} \quad (21)$$

#### 4. IMPLEMENTACIÓN DEL GPC

El algoritmo GPC ahora se aplica para controlar el nivel en los tanques acoplados, cuyo modelado matemático se obtuvo en la sección anterior y corresponde a un prototipo simulado.

El GPC se implementó en el entorno de programación Matlab, para aprovechar el manejo de matrices, funciones básicas de control [12] y el Toolbox de optimización [5]. A través del programa realizado se ingresa la función de transferencia de la planta, las restricciones y demás parámetros del controlador y posteriormente se procede a simular.

A continuación se muestran los parámetros definidos para el controlador y las simulaciones obtenidas.

Se definen las restricciones en la señal de control, en la velocidad de la señal de control y en la salida, para ser tenidos en cuenta en cada optimización (programación

cuadrática) del algoritmo.

Las restricciones en la señal de control que corresponde al flujo de entrada del tanque 1, son las siguientes:

$$\begin{aligned} U_{\max} &= 180 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}} \\ U_{\min} &= 0 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}} \\ \Delta U_{\max} &= 80 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}} / s \\ \Delta U_{\min} &= -80 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}} / s \end{aligned}$$

Las restricciones en la salida que corresponde al nivel de líquido del tanque 2 son:

$$\begin{aligned} Y_{\max} &= 100 \text{ cm} \\ Y_{\min} &= 0 \text{ cm} \end{aligned}$$

Para continuar con la implementación del GPC, se sintonizarán los horizontes de predicción y los factores de ponderación.

El factor de ponderación de la salida  $\delta$  se considerará igual a 1 (sugerido por [4]) y se tomarán diferentes valores del factor de ponderación de la señal de control para analizar el comportamiento del algoritmo.

Implementando el GPC con restricciones en el sistema, ante una referencia de 80 cm de nivel, con un horizonte de predicción  $N = 30$  y horizonte de control  $N_u = 5$ , Se observan en la figura 2 las respuestas para  $\lambda = 0.2, 0.8, 1.5$  y 5.

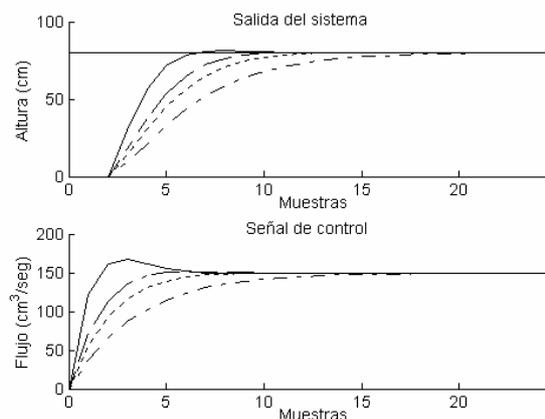


Figura 2. Variación del factor de peso de la señal de control del GPC.  $\lambda=0.2$ , línea sólida;  $\lambda=0.8$ , línea de guiones;  $\lambda=1.5$ , línea punteada;  $\lambda=5$ , línea guión-punto.

De acuerdo a lo observado en la figura 2, se aprecia que para  $\lambda = 0.2$  el fluido en el tanque alcanza el nivel de referencia de 80 cm más rápido que los demás, pero con un mayor esfuerzo de control. A medida que se aumenta el  $\lambda$  el sistema tarda más en alcanzar la referencia y el

esfuerzo en la señal de control disminuye.

A continuación se tomará el horizonte de control  $N_u = 1$  y el horizonte de predicción  $N = 30$ . El comportamiento del sistema se observa en la figura 3, con  $\lambda = 0.2, 5$  y  $10$ .

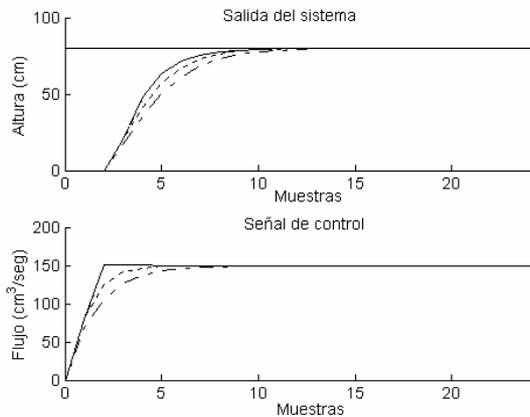


Figura 3. Variación del factor de peso de la señal de control del GPC.  $\lambda=0.2$ , línea sólida;  $\lambda=5$ , línea punteada;  $\lambda=10$ , línea guión-punto.

En la figura 3 se observa que el controlador responde de manera muy similar al tomar diferentes  $\lambda$ , cuando se tiene un horizonte de control pequeño. Pero como en el caso anterior al tomar más pequeño el valor de  $\lambda$ , más rápido el sistema sigue la referencia pero con mayor esfuerzo de control.

A pesar de que se varíe el horizonte de control o de predicción en las simulaciones, al aumentar el factor de ponderación de la señal de control  $\lambda$ , el esfuerzo de control disminuye y el error aumenta.

Ahora se simulará el sistema variando el factor de ponderación del error  $\delta$ , tomando  $N = 30$ ,  $N_u = 5$  y  $\lambda = 0.8$ . El comportamiento del sistema se aprecia en la figura 4 para  $\delta = 0.5, 2$  y  $5$ .

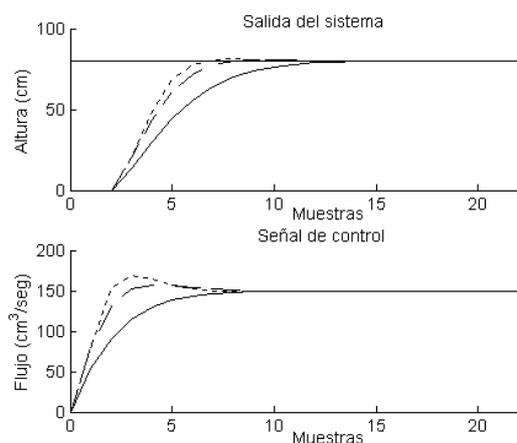


Figura 4. Variación del factor de peso del error del GPC.  $\delta=0.5$ , línea sólida;  $\delta=2$ , línea de guiones;  $\delta=5$ , línea

punteada.

En la figura 4 se aprecia que al aumentar el valor de delta, el sistema alcanza más rápido la referencia, pero aumentando el esfuerzo de la señal de control. Caso contrario al factor de ponderación de la señal de control.

Por lo tanto en todos los casos se cumple que si se aumenta el esfuerzo de control, el error en el sistema disminuye y viceversa, además las restricciones impuestas en el algoritmo no son sobrepasadas en ningún caso, alcanzándose exitosamente la referencia.

Los resultados del control predictivo generalizado aplicado al control de nivel en los tanques, comprueba la optimabilidad del GPC con respecto al error en la salida y el esfuerzo en la señal de control teniendo en cuenta las restricciones, con la ventaja de aumentar o disminuir el esfuerzo de control a través de los factores de ponderación. Además el desempeño general del controlador es manipulado por los horizontes de control y de predicción, que en la actualidad carecen de un método de sintonía que garantice estabilidad (con restricciones) en bucle cerrado [3].

La mayor dificultad de la aplicación del controlador es la necesidad de obtener una identificación apropiada del sistema, que permita modelar una función de transferencia que describa la dinámica del sistema en el punto de operación determinado.

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha presentado el esquema del control predictivo generalizado con restricciones, implementado a un control de nivel en un sistema de tanques acoplados. Se mostraron los resultados de simulación variando los parámetros del controlador con el fin de analizar la eficiencia y las ventajas de este controlador predictivo. En todos los casos el sistema alcanzó la referencia, no se sobrepasaron las restricciones impuestas y se comprobó el compromiso de desempeño entre el esfuerzo de control y el error en la salida.

Es muy importante tener un verdadero conocimiento de las restricciones del sistema, ya que en este caso el algoritmo se basa en esas limitaciones para obtener la señal de control a través de la programación cuadrática.

Hay que buscar un punto satisfactorio para realizar las variaciones del horizonte de predicción y el horizonte de control, en todo momento se debe compensar en lo posible, eficiencia computacional con desempeño en la respuesta del algoritmo.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

[1] BORDONS, A.C. Control predictivo: metodología, tecnología y nuevas perspectivas, Departamento de

Ingeniería Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla. Aguadulce, Almería, 2000.

[2] CAMACHO, E.F. Constrained Generalized Predictive Control. IEEE transactions on automatic control, vol. 38, no. 2, february 1993.

[3] CAMACHO, Eduardo F. and Bordons, Carlos. Model Predictive Control, Springer-Verlag London Limited, 2004.

[4] CLARKE, D.W., Mohtadi, C., and Tuffs, P.S., Generalized Predictive Control. Part I. The basic algorithm. Automatica, 23(2):137-148, 1987.

[5] COLEMAN, T., Branch, M.A., Grace, A. Optimization Toolbox for use with Matlab, version 2.

[6] LAUBWALD, E., "Coupled tanks systems 1", control-systems-principles.co.uk.

[7] LLATA, J.R., Oria, J.P., Sarabia, E.G., Arce, J., Robles, A., Control Predictivo de Tanques Acoplados. Universidad de Cantabria.

[8] MORARI, M., Lee, J.H., García, C.E. Model Predictive Control, March 15, 2002.

[9] OGATA, K. Sistemas de Control en Tiempo Discreto, Prentice Hall, 1996.

[10] PIKE, A.W., Grimble, M.J., Johnson, M.A., Ordys, A.W., and Sharkoor S. Predictive Control, Industrial Control Centre, University of Strathclyde, Glacow, Scotland, 1996.

[11] SANCHIS, J., Martínez, M., Blasco, X. y Ramos, C., GPC con restricciones. Reducción en el tiempo de cálculo basada en el uso de componentes principales. Universidad Politécnica de Valencia, 2002.

[12] SHANIAN, Bahram-Hassul, Michael. Control System Design Using Matlab, Prentice Hall 1993.