

MÉTODO ITERATIVO PARA EL CÁLCULO DE POTENCIALES ELECTROSTÁTICOS

RESUMEN

Se presenta un método para obtener el potencial eléctrico en una región determinada del espacio, dadas las condiciones de frontera e incluso condiciones interiores. El método consiste en dividir la región en una rejilla sobre la cual se calcula el potencial usando promedios iterativos hasta obtener una estabilización en los valores. Los resultados se comparan con los obtenidos a través de la solución a la ecuación de Laplace y se muestran las ventajas del método en relación con su relativa simplicidad y su capacidad de resolver problemas más complejos. Se ilustra el caso bidimensional para facilitar la visualización de los resultados.

PALABRAS CLAVES: Potencial eléctrico, Problema de Dirichlet, Condiciones de frontera

ABSTRACT

This paper shows a method to obtain the electrostatic potential in a region with boundary and interior conditions. The method create a grid and obtains the potential trough iterative average. Advantage of the method is showed in the simulations. The bidimensional case is showed to improve visualization of the results.

KEYWORDS: Electrostatic Potencial, Dirichlet Problem, Boundary problems.

1. INTRODUCCIÓN

Un objeto de estudio dentro del electromagnetismo clásico es la propagación de las ondas electromagnéticas en presencia de medios materiales absorbentes o no, con superficies “uniformes” y complejas [1]. Lo anterior permite analizar; la radiación en antenas de sistemas de comunicaciones inalámbricos y la manera como se comportan tales ondas cuando a su paso se encuentran obstáculos como construcciones, vegetación, zonas montañosas entre otros [2].

Para avanzar en tal objeto de estudio, en un primer momento ha de enfrentarse el estudio del caso electrostático, donde, si bien no se presenta propagación de señal electromagnética, existen potenciales debido a distribuciones de carga cuyos efectos sí se propagan en medios materiales [3]. Aquí las soluciones a las ecuaciones de Maxwell carecen de derivadas temporales lo que implica soluciones independientes del tiempo. En un nivel superior se encuentra el análisis electrodinámico que presenta una complejidad mayor a nivel matemático y obliga el uso de herramientas computacionales, como métodos iterativos de baja y alta frecuencia, que entreguen resultados con buena precisión sin el esfuerzo adicional que representa el estudio analítico. La variable tiempo entra como complicante en estos problemas [4].

En general, para las aplicaciones que tienen que ver con el estudio de los campos electromagnéticos surge como herramienta importante el Electromagnetismo Computacional que pretende, entre otras cosas; evitar las complejidades de los estudios analíticos, disminuir los

tiempos en que se obtiene respuesta de los problemas y permitir la interpretación ágil de los resultados. Estos son elementos importantes en el desarrollo de aplicaciones a nivel de ingeniería [5].

En aras de fortalecer el recién conformado grupo de Investigación en Campos Electromagnéticos y Fenómenos Asociados, se ha planteado el desarrollo de metodologías computacionales. Este artículo presenta la obtención, simulación y posterior validación de un método de propagación de potenciales electrostáticos en presencia de obstáculos y con fronteras sometidas a diferentes niveles y funciones de potencial. De esta manera se avanza en el manejo de elementos matemáticos y computacionales importantes que permitirán progresar hacia métodos de alta y baja frecuencia, útiles en los estudios electrodinámicos anteriormente descritos [6].

En la sección 2 del documento se presenta el problema de Dirichlet que describe matemáticamente la situación para la que se genera la metodología. En la sección 3 se muestra el método iterativo y se comparan sus resultados con lo obtenido analíticamente a través de la solución a la ecuación de Laplace usando el método de separación de variables y el análisis de Fourier. Finalmente en la sección 4 se presenta el estudio de propagación en zonas que contienen obstáculos en su interior.

2. EL PROBLEMA DE DIRICHLET

Algunos fenómenos físicos, en su estado estacionario, pueden ser modelados con la ecuación de Laplace:

VÍCTOR DANIEL CORREA R

Ingeniero Electricista
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
victordc@ohm.utp.edu.co

ALEXANDER MOLINA C

Ingeniero Electricista, M.Sc.
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira.
almo@utp.edu.co

ANDRÉS ESCOBAR MEJÍA

Ingeniero Electricista, M.Sc.
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira.
andreses1@utp.edu.co

$$\nabla^2 v = 0 \tag{1}$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano escalar (divergencia del gradiente). Ejemplos de estos fenómenos son la distribución de temperaturas y la distribución de potenciales electrostáticos en zonas donde no se acumulan cargas.

Este tipo de situación se plantea como un problema de Dirichlet: se calcula por ejemplo; el potencial eléctrico en cualquier punto en una región de una, dos o tres dimensiones dadas ciertas condiciones de frontera. La solución se obtiene resolviendo la ecuación de Laplace o de Poisson y determinando las constantes que dependen de las condiciones de frontera. En una gran variedad de problemas de este tipo, es usada la serie de Fourier en el proceso de solución.

Como caso de estudio se plantea: calcular la distribución del potencial electrostático en una barra muy larga de material dieléctrico con sección transversal rectangular que tiene dimensiones a y b (con su eje longitudinal en la dirección z) como se muestra en la figura 1. Una de las caras ($x = 0$) tiene un potencial V_0 mientras las demás se conectan a cero voltios.

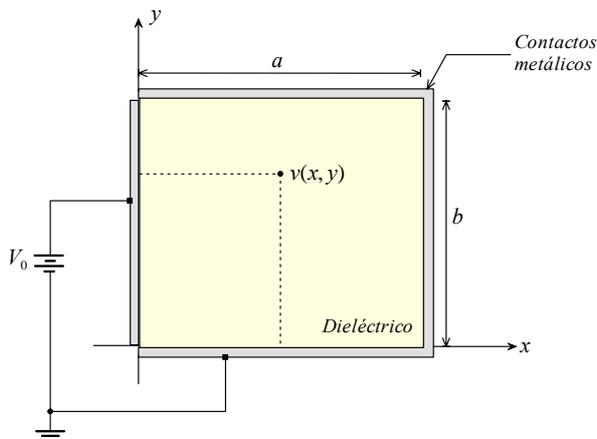


Figura 1. Región bidimensional y condiciones de frontera

El problema de Dirichlet en este caso es:

Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} v(x, 0) = v(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a \\ v(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b \\ v(0, y) = V_0, \quad 0 \leq y \leq b \end{aligned} \tag{3}$$

Al resolver usando separación de variables, en la que se propone una solución de la forma $v(x, y) = F(x)G(y)$ y evaluando las condiciones de frontera se obtiene la siguiente solución [7]:

$$v(x, y) = \frac{-4V_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{\text{senh}[(x-a)] \text{sen}(n\pi y/b)}{n \text{senh}(n\pi a/b)} \tag{4}$$

La figura 2a muestra la superficie que resulta de evaluar 15 términos de la serie mostrada en la ecuación (4) cuando $a = b = 1\text{cm}$ y $V_0 = 1\text{V}$. De igual manera se presentan algunas curvas de nivel (líneas $v = \text{constante}$). Puede notarse que, por las condiciones de frontera establecidas, la función obtenida presenta oscilación en puntos cercanos a la frontera $x = 0$. Este fenómeno, conocido como fenómeno de Gibbs, es debido a la naturaleza oscilatoria de la respuesta cuando una función discontinua es representada mediante su serie de Fourier.

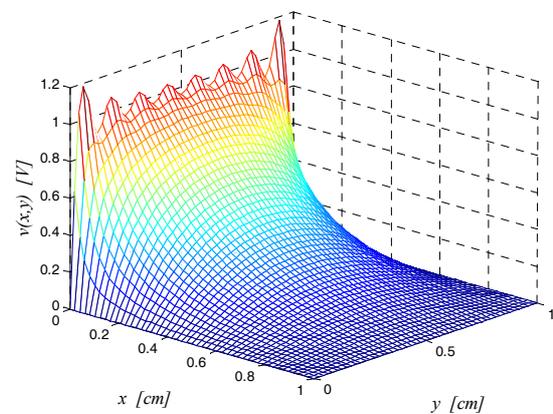


Figura 2a. Potencial eléctrico obtenido resolviendo la ecuación de Laplace.

En el punto medio del rectángulo, el potencial evaluado a partir de la ecuación 4 es:

$$v(0.5, 0.5) = 0.25 \text{ v}$$

Este valor se usará como dato de comparación para los resultados que se obtengan con el método iterativo, además de las gráficas de las funciones obtenidas.

En la figura 2b se presentan las líneas equipotenciales obtenidas con el método propuesto

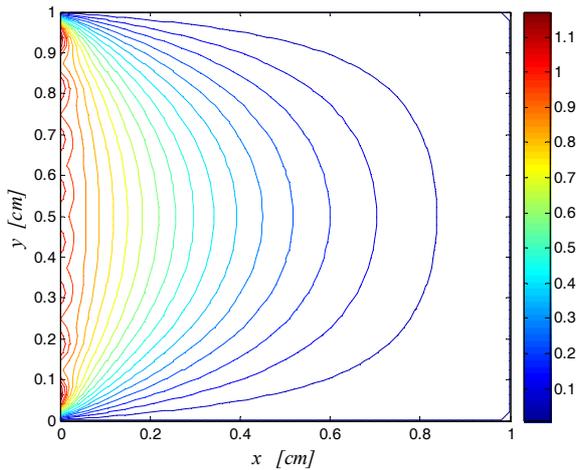


Figura 2b. Líneas equipotenciales de la superficie de la figura 2a.

3. EL MÉTODO ITERATIVO

En esta sección se presenta el desarrollo del método iterativo partiendo de sencillas suposiciones y de manera que se llegue a la implementación computacional esperada.

Si se tiene una función real $f(x)$, analítica en $x = x_0$, entonces puede aproximarse por su polinomio de Taylor de tercer orden alrededor de dicho punto. Esto es:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

Evaluando en $x = x_0 + h$ y en $x = x_0 - h$, siendo h un valor positivo pequeño, se obtiene

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3$$

$$f(x_0 - h) \approx f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3$$

Sumando estas expresiones y despejando $f''(x_0)$ permite obtener:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} \quad (5)$$

Una deducción más detallada, que incluye el error de aproximación puede encontrarse en [8].

La expresión anterior puede adecuarse para aproximar las derivadas parciales que aparecen en la ecuación 2 como sigue. Sean V_1, V_2, V_3 y V_4 los potenciales en puntos separados de (x_0, y_0) por una distancia h hacia la derecha

y la izquierda y hacia arriba y abajo respectivamente y V_0 el potencial en el punto (x_0, y_0) como se ilustra en la figura 3 es decir:

$$\begin{aligned} v(x_0 + h, y_0) &= V_1 \\ v(x_0 - h, y_0) &= V_2 \\ v(x_0, y_0 + h) &= V_3 \\ v(x_0, y_0 - h) &= V_4 \end{aligned}$$

Las derivadas v_{xx} y v_{yy} pueden entonces aproximarse con base en la ecuación 5 como sigue:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0) \approx \frac{v(x_0 + h, y_0) + v(x_0 - h, y_0) - 2v(x_0, y_0)}{h^2}$$

Reemplazando los valores antes mencionados se obtiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0) \approx \frac{V_1 + V_2 - 2V_0}{h^2} \quad (6)$$

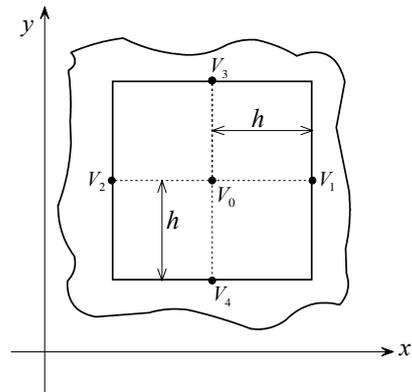


Figura 3. Un segmento de la subdivisión

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_0, y_0) \approx \frac{v(x_0, y_0 + h) + v(x_0, y_0 - h) - 2v(x_0, y_0)}{h^2}$$

Si siguiendo los mismos pasos que se emplearon para llegar a la ecuación 6, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_0, y_0) \approx \frac{V_3 + V_4 - 2V_0}{h^2} \quad (7)$$

Reemplazando las ecuaciones 6 y 7 en la ecuación 2 resulta:

$$\frac{V_1 + V_2 - 2V_0}{h^2} + \frac{V_3 + V_4 - 2V_0}{h^2} = 0$$

De donde se obtiene que V_0 es:

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} \quad (8)$$

Esta es la expresión principal que se aplica en el método iterativo que se describe a continuación. Puede notarse su simplicidad a pesar de la complejidad matemática que supone la resolución de ecuaciones diferenciales parciales. De igual manera se puede apreciar cómo V_0 es una especie de promedio de los voltajes que se encuentran en su vecindad. Se presenta entonces la posibilidad de incluir éstos sencillos cálculos en la obtención de metodologías computacionales rápidas.

El proceso computacional es como sigue: La región rectangular de la figura 1 ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) se divide en una rejilla compuesta por pequeños cuadrados de lado h (figura 3) en cuyos vértices se calcula el potencial usando la expresión (8). El proceso se repite para cada punto, sin incluir los de la frontera, (sobre los cuales los valores se mantienen fijos e iguales a los iniciales), hasta que no se observe una variación significativa en los valores de los potenciales, es decir; hasta cumplir una tolerancia que resulta de comparar los valores de los potenciales de la actual iteración con los valores de la anterior.

Durante el proceso de simulación se encontró que los resultados finales no dependen de la forma como sean inicializados los potenciales en los puntos interiores de la rejilla (aunque tiene incidencia sobre el número de iteraciones requerido), por tanto puede asignarse cero como valor inicial en esos puntos.

Usando las condiciones de frontera de la figura 1 con $a = b = 1$ cm y $V_0 = 1$ V se resolvió el problema para una rejilla con 49 puntos en cada eje. La figura 4 presenta la superficie de potencial obtenida y sus curvas de nivel.

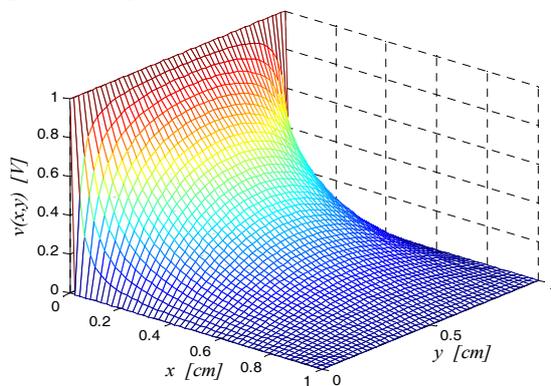


Figura 4a. Potencial obtenido con el método iterativo

Puede notarse que en este resultado no se presenta la oscilación que aparece en la solución analítica. El potencial en el punto central de la región toma el valor que se presenta:

$$v(0.5, 0.5) = 0.249986 \text{ V}$$

El anterior potencial presenta un error de 1×10^{-5} al compararlo con el valor obtenido al evaluar el mismo punto en la ecuación 4; con esta comparación y observando la similitud entre las superficies obtenidas para el potencial (figuras 2 y 4) se pretende mostrar la validez del método.

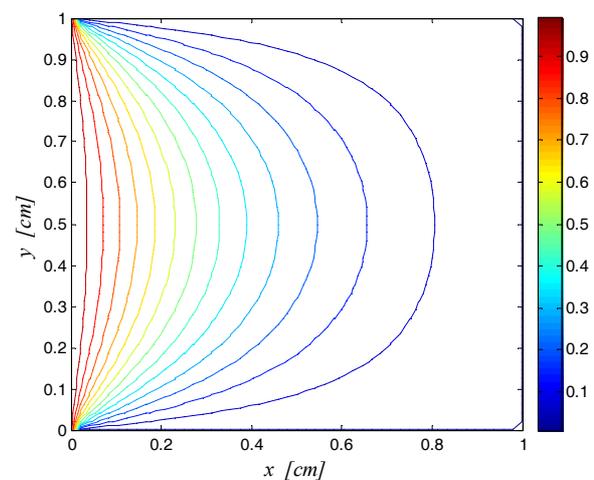


Figura 4 b. Líneas equipotenciales

4. PROBLEMAS DE MAYOR COMPLEJIDAD

Si la región definida en la figura 1 tiene condiciones de frontera diferentes de cero (constantes o funciones de la posición) en sus cuatro lados, el potencial eléctrico para los puntos interiores debe obtenerse superponiendo soluciones similares a la ecuación 4 para cada una de las caras cuando se usa el método analítico [3]. De otro lado, con el método iterativo se puede resolver directamente este problema como se resolvió el anterior ya que la única condición impuesta consiste en no modificar los valores de frontera. Adicionalmente, es posible definir subregiones internas sobre las cuales el potencial tenga un valor definido (condiciones en puntos interiores), este es un problema de difícil solución para el método analítico [3].

Como ejemplo se analiza el caso de una región rectangular de dimensiones $a = 5$ cm y $b = 10$ cm en cuyo interior se ubican dos laminas conductoras, también de forma rectangular (por permitir una definición sencilla) a potenciales $V_1 = -2$ V y $V_2 = 2$ V de dimensiones $a_1=b_1=1$ cm y $a_2 = 0.5$ cm, $b_2 = 6$ cm respectivamente. Las posiciones de los cuerpos equipotenciales, dentro de

la región definida, se muestran en la figura 5. Además se establecen las siguientes condiciones de frontera:

$$v(x, 0) = v(x, b) = 1V, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v(0, y) = -2V, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$v(a, y) = 2 - 2|2y - b|/bV, \quad 0 \leq y \leq b$$

Entre tales condiciones $v(a,y)$ es una función triangular que toma los siguientes valores extremos:

$$v(a, 0) = v(a, b) = 0V, \quad v(a, b/2) = 2V$$

Con la solución del problema, usando el método iterativo, se obtienen las distribuciones de potencial que se muestran en la figura 6. Las líneas equipotenciales son de gran importancia ya que a partir de ellas pueden construirse las líneas de campo eléctrico, con lo que un problema de electrostática queda muy bien definido matemáticamente y con gran utilidad a nivel pedagógico, dado su alto componente visual.

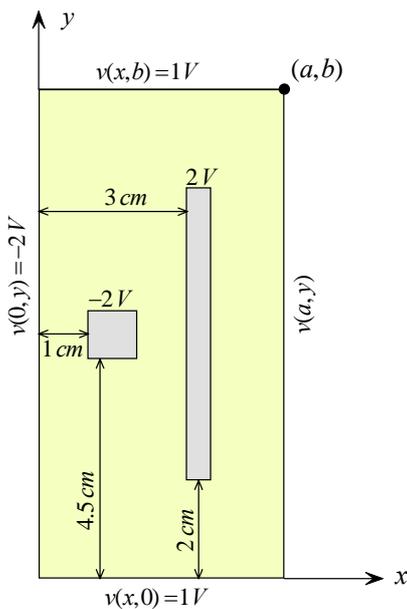


Figura 5 Problema con condiciones de frontera e interiores

. En la figura 6.a se presenta la superficie con los valores de los potenciales para los diferentes puntos de la región. Es posible ver cómo en las zonas internas se mantienen unas “mesetas” que indican el cumplimiento de las condiciones internas impuestas físicamente para el problema. Por otro lado, en la misma gráfica, se pueden ver los valores que toman los potenciales en las fronteras

Aquí la utilidad práctica del método toma importancia ya que en tiempos cortos fue posible estudiar la distribución de potenciales para una amplia variedad de condiciones tanto en la frontera como en puntos interiores, sin incurrir

en elaboradas soluciones analíticas que pueden desviar la atención en cuanto a los objetivos de interpretación física del problema.

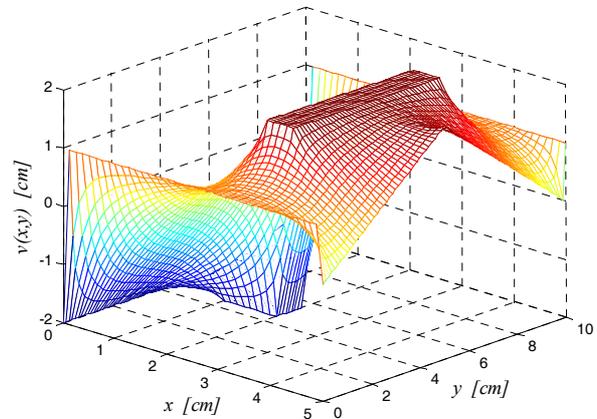


Figura 6a Superficie de potencial electrostático resultante

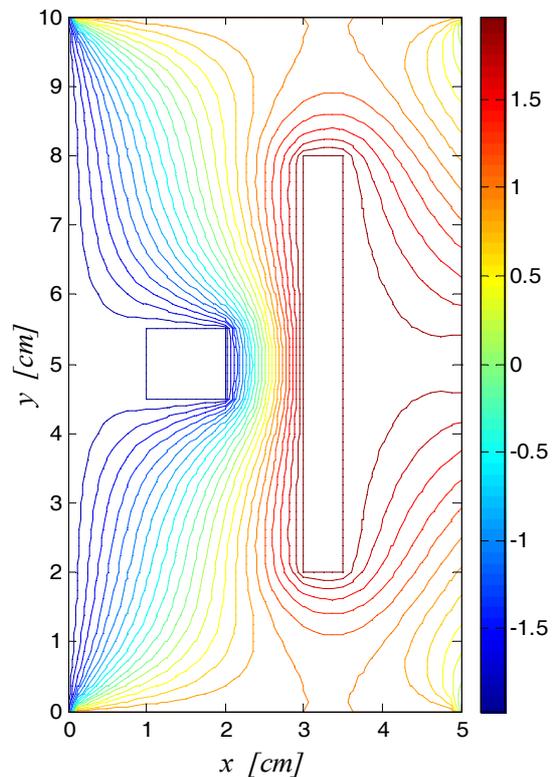


Figura 6 b Líneas equipotenciales

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se mostró que el método iterativo propuesto entrega resultados satisfactorios en comparación con la solución analítica además de resolver problemas de gran complejidad sin incurrir en procesos de solución demasiado elaborados que podrían alejar al ingeniero de su objetivo principal: analizar los resultados obtenidos.

El método es sencillo de implementar computacionalmente. La convergencia es relativamente rápida y la precisión puede ser tan buena como se desee, de acuerdo al criterio de parada, tal como se mostró en el ejemplo inicial para el punto (0.5, 0.5) cm.

Este tipo de implementaciones computacionales son el punto de partida para, de manera posterior, analizar el caso electrodinámico; útil en estudio de antenas, propagación, análisis de compatibilidad bioelectromagnética, entre otros.

A futuro se propone la aplicación de técnicas que permitan aproximar soluciones a problemas con funciones o parámetros variables con el tiempo.

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] REVUELTO, Gómez I. et al. “Método Híbrido FEM-GTD/UTD para el Análisis de Estructuras Radiantes haciendo uso de NURBS” XX Simposium Nacional de la URSI. Universitat Ramon Llull, Barcelona (España), sep 2005. Sesión “Electromagnetismo II”.
- [2] ENGQUIST, B. “Absorbing Boundary conditions for the Numerical Simulations of Waves” Mathematics of Computation, 1977.
- [3] JACKSON, John David. Classical Electrodynamics, tercera edición, 808 paginas, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [4] NORBURY, John, “Electromagnetics for Undergraduate”, Physics Department University of Wisconsin-Milwaukee. 1999.
- [5] SILVESTER, Peter P. “Finite Elements for Wave Electromagnetics”. IEEE Press. 1995.
- [6] GARCÍA, B. “Fundamentos de Electromagnetismo: Iniciación al Cálculo Numérico en Electromagnetismo”. Dpto. de Electromagnetismo y Física de la Materia –Universidad de Granada. 2004.
- [7] EDWARDS, C. H. y PENNEY, David. Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera, Tercera edición, 774 paginas, Prentice Hall, México, 1994.
- [8] BURDEN, Richard L. y FAIRES, J. Douglas. Análisis Numérico, Séptima edición, 839 páginas, Thomson Learning, Bogotá, 2002.
- [9] HAYT, William H. Teoría Electromagnética, quinta edición, 525 páginas, Mc Graw Hill. Mexico, 1994.